3. RECTA REAL

Es muy común manejarse en la vida cotidiana con números que oscilan en ciertos rangos. Muchos de los fenómenos que se producen en la naturaleza no tienen soluciones exactas, y para resolverlos debemos contentarnos, por ejemplo, con acotarlos entre dos valores determinados. En esta unidad precisamente aprenderemos a manejarnos con este tipo de situaciones. Para ello, en principio, daremos la noción de **intervalo**, y finalizaremos entrenándonos en la resolución de inecuaciones.

3.1 Intervalos reales

La Ballena Franca, visita cada año las costas de la Península de Valdés, se aparea y pasea sus ballenatos. Esto constituye un gran atractivo turístico en nuestra provincia.

El peso de la Ballena Franca oscila entre 30 a 35 toneladas. Un macho adulto mide unos 12 metros, en tanto que una hembra mide unos 13,5 metros. Desde la playa El Doradillo considerada área natural de reproducción, se puede disfrutar plenamente de un avistaje costero. La temporada de Ballenas se extiende de Junio a Diciembre.

La máxima concentración de ballenas se produce entre Octubre y Noviembre, época en que pueden contabilizarse entre 350 a 400 individuos. Esto convierte a las aguas vecinas de la Península Valdés en el área de cría más importante del Hemisferio Sur.

Aunque no lo creas, mucha de la información aquí indicada puede expresarse matemáticamente, como veremos a continuación.

Frecuentemente trabajaremos con subconjuntos de números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden. Así, por ejemplo, hablaremos de

“los números reales mayores que 2 y menores que 5”

En símbolos,

$$\{\underbrace{x \in \mathbf{R}}_{\text{números reales}} \;/\; \underbrace{2 < x < 5}_{\substack{\text{mayores que } 2 \\ \text{y menores que } 5}}\}$$

o de

“los números reales menores o iguales que $\frac{3}{2}$”

En símbolos,

$$\{\underbrace{x \in \mathbf{R}}_{\text{números reales}} \;/\; \underbrace{x \leq \frac{3}{2}}_{\substack{\text{menores o} \\ \text{iguales que } 3/2}}\}$$

Otras veces deberemos simbolizar expresiones tales como:

“la cantidad x de ballenas que puede contabilizarse entre Octubre y Noviembre se halla entre 350 y 400”

En símbolos,

$$350 < x < 400$$

Estos subconjuntos de R se definen mediante *intervalos*.

Intervalo abierto (*a* , *b*)

Si *a* , *b* Î R y *a* < *b*, se define (*a* , *b*) = {*x* Î R / *a* < *x* < *b*}.

Gráficamente:

Intervalo cerrado [*a* , *b*]

Si *a* , *b* Î R y *a* £ *b*, se define [*a* , *b*] = {*x* Î R / *a* £ *x* £ *b*}.

Gráficamente:

Si a coincide con b, el intervalo cerrado es un único punto.

Intervalos semiabiertos o semicerrados

Si a, b Î R y $a < b$ se define:

(a , b] = {x Î R / a < x £ b }

[a , b) = {x Î R / a £ x < b }

Gráficamente:

(a , b] se representa como 

[a , b) se representa como 

En todos los casos, los números a y b se llaman ***extremo inferior*** y ***extremo superior*** del intervalo, respectivamente.

Ejemplo:

Atención

Los símbolos - ∞ y + ∞ deben ser considerados con especial cuidado, recordando que se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.

Estas definiciones se pueden generalizar, considerando a la recta y a la semirrecta como intervalos, con sólo introducir los símbolos - ∞ y + ∞.

Así, tenemos

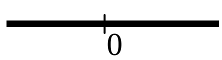
en símbolos — gráficamente

$[c, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq c\}$ → 

$(c, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > c\}$ → 

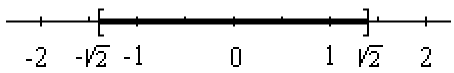
$(-\infty, d] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq d\}$ → 

$(-\infty, d) = \{x \in \mathbb{R} / x < d\}$ → 

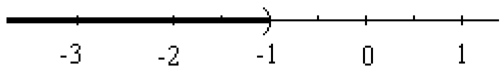
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ → 

***Ejemplos*:**

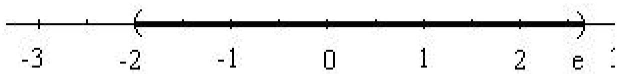
$[\,-\sqrt{2}\;,\;\sqrt{2}\,] \;=\; \{x \in \mathrm{R} \;/\; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\,\}$ ®



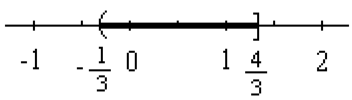
$(-\infty\,,-1) \;=\; \{x \in \mathrm{R} \;/\; x < -1\,\}$ ®



$(-2\,,\mathrm{e})$ ®



$\left(-\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{4}{3}\right]$ ®



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Dados los siguientes subconjuntos de R:

a) $A = \{\,x \,/\; x \in \mathrm{N} \;\wedge\; -2 < x < 3\,\}$

b) $B = \{\,x \,/\; x \in \mathrm{Z} \;\wedge\; -2 < x < 3\,\}$

c) $C = \{\,x \,/\; x \in \mathrm{Q} \;\wedge\; -2 < x < 3\,\}$

d) $D = \{\,x \,/\; x \in \mathrm{R} \;\wedge\; -2 < x < 3\,\}$

Recuerda observar a qué conjunto numérico pertenecen los elementos. Por ejemplo, en el conjunto B los elementos son números "enteros" x tales que $-2 < x < 3$.

i) Analizar los elementos que pertenecen a cada conjunto. ¿Es posible determinar la cantidad de elementos?.

ii) Representar en la recta real, de ser posible, cada conjunto.

2)

En caso de que existan infinitos números, el modo de indicarlos es mediante la notación de intervalos.

a) ¿Cuáles son los números naturales comprendidos entre -2 y 3 ?.

b) ¿Cuáles son los números enteros comprendidos entre -2 y 3 ?.

c) ¿Cuáles son los números racionales comprendidos entre -2 y 3 ?.

d) ¿Cuáles son los números reales comprendidos entre -2 y 3 ?.

3) Expresar mediante intervalos cada uno de los siguientes subconjuntos de R: el conjunto de los números reales x que satisfacen:

a) x es mayor que 2 y menor que 6.

b) x es mayor o igual que -1.

c) x es menor que $\frac{2}{3}$.

d) x supera al menor número entero positivo.

e) x es menor que el mayor número par negativo.

f) x está comprendido entre los dos múltiplos positivos de 4 de un solo dígito.

4) Representar sobre la recta real los siguientes intervalos:

a) $[2 , 5]$

b) $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -3 < x < \frac{4}{3} \}$

c) $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

d) $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < 2{,}75 \}$

5) Determinar:

> ***Recuerda que...***
>
> El símbolo $\cup$
> representa la unión de conjuntos.
> El símbolo $\cap$
> representa la intersección de conjuntos.

a) $[-\frac{1}{4} , 2) \cup [1 , +\infty)$

b) $(-3 , -1) \cup [\frac{5}{2} , 3)$

c) $(-3 , -1) \cap [\frac{5}{2} , 3)$

d) $[0 , \sqrt{5}) \cap [\frac{3}{2} , \frac{7}{2}]$

6) Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones y representar los subconjuntos de $\mathbb{R}$ correspondientes.

a) $0 < x \leq 2 \wedge x \in [1 , 3)$

b) $x > -1 \wedge x \in (2 , 5)$

c) $x \in [-4 , +\infty) \wedge x < -2$

d) $x \in (-2 , 2) \wedge x \in [1 , +\infty)$

e) $x \in (-\infty , 3) \wedge x \in (-3 , +\infty)$

f) $-3 \leq x < 1 \wedge x \notin [0 , 2)$

7) Dados los intervalos $A = [-2 , 1)$; $B = [-1 , +\infty)$; $C = [-3 , 2{,}5)$ determinar:

a) $(A \cap B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

8) Sean $A = [-2 , 6]$; $B = (1 , 5]$; $C = (-1, 3)$ calcula:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

9) Expresar en forma de intervalos la información dada en la introducción acerca de las Ballenas Francas.

3.2. Valor absoluto o módulo de un número real

Módulo
o
Valor Absoluto

Dado un número $a \in \mathbb{R}$, llamaremos *módulo* ó *valor absoluto* de a, al mismo número a si este es positivo o cero, y $-a$ si a es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$|3| = 3$

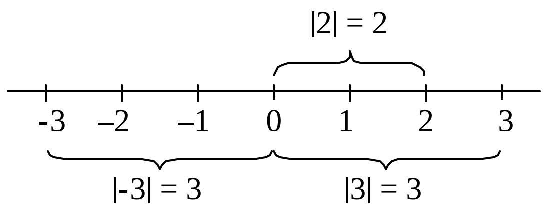
$|-3| = -(-3) = 3$

$|0| = 0$

El módulo de un número real es siempre mayor ó igual a cero.

Si $|a| = 3$
puede ser $a = 3$
ó bien $a = -3$.

Si representamos los números reales mediante puntos en una recta, el valor absoluto de a se interpreta como la distancia que hay entre a y el origen 0.

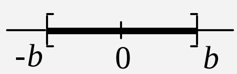


Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$,
la desigualdad $|x| \leq b$
también se expresa como
$x \leq b \ \wedge \ x \geq -b$.

El símbolo $\wedge$ se lee "y".

Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ entonces la desigualdad $|x| \leq b$ es equivalente a la doble desigualdad

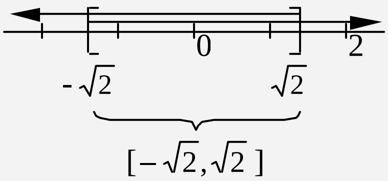
$$-b \leq x \leq b.$$



Como $|x|$ mide la distancia de x al 0, que $|x|$ sea menor ó igual que b significa que la distancia de x a cero no debe ser mayor que b.

Recordemos que...

$x \in$ R y $|x| \leq \sqrt{2}$
es equivalente a
$x \leq \sqrt{2} \ \wedge \ x \geq -\sqrt{2}$.
Si representamos cada una de estas desigualdades, la intersección de ambos conjuntos es precisamente el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

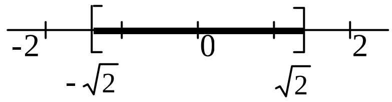


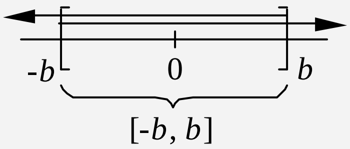
Ejemplo:

$$|x| \leq \sqrt{2} \quad \text{es equivalente a} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \ .$$

Por lo tanto, $|x| \leq \sqrt{2}$ significa que $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Si representamos en la recta numérica obtenemos:



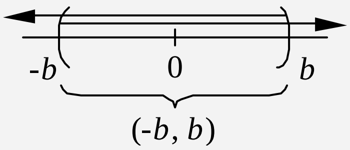


En general, $-b \leq x \leq b$ es equivalente a

$$x \geq -b \ \wedge \ x \leq b$$

y representa la intersección

$$[-b, +\infty) \cap (-\infty, b] = [-b, b]$$



Análogamente, $|x| < b$ es equivalente a

$$-b < x < b$$

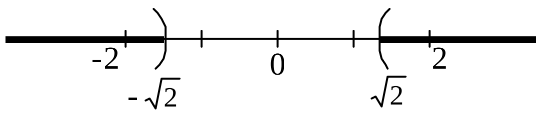
(o también $x < b \ \wedge \ x > -b$).

La distancia de x al cero debe ser mayor que $\sqrt{2}$.

Una forma de encontrar los números reales x que verifican

$$|x| > \sqrt{2} ,$$

es descartar de la recta real aquellos que verifican $|x| \leq \sqrt{2}$. Así, se obtiene $x > \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{2}$. Gráficamente,



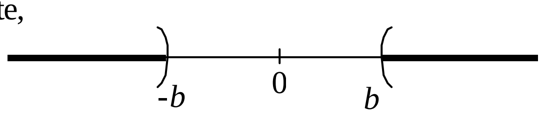
Por la definición de intervalos,
$x \in$ R y $|x| > b$
significa que
$x \in (-\infty, -b)$ ó $x \in (b, +\infty)$,
es decir,
$|x| > b$
equivale a
$x \in (-\infty, -b) \cup (b, +\infty)$.

En general, si $b \in$ R y $b > 0$,

$|x| > b$ es equivalente a decir que $x > b$ o $x < -b$.

Es decir, la distancia del x al cero debe ser mayor que b.

Gráficamente,

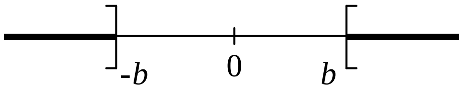


$x \in$ R y $|x| \geq$ b
significa que
$x \in (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$

Análogamente,

$$|x| \geq b \quad \text{es equivalente a decir} \quad x \geq b \quad \text{ó} \quad x \leq -b.$$

Gráficamente,



Ejemplo:

$$|x - a| < b$$

significa que x está a menos de b unidades respecto de a; mientras que

$$|x - a| > b$$

significa que x está a más de b unidades de a.

En el caso general

$$|x - a|$$

mide la distancia entre x y a.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

10) Resolver y representar gráficamente. Expresar la solución, de ser posible, en forma de intervalos.

Ejemplo:

$$|x + 9| = 5$$

Solución:

$|x + 9| = 5 \quad \rightarrow x + 9 = 5$ ó $x + 9 = -5$

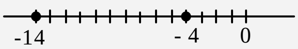
$\rightarrow x = 5 - 9$ ó $x = -5 - 9$

$\rightarrow x = -4$ ó $x = -14$

La solución en este caso es entonces

$S = \{-4, -14\}$.

Gráficamente:



a) $|x| = \dfrac{3}{2}$

b) $|x - 5| = 2$

c) $|x| \geq 3$

d) $|x| \leq 5$

11) Expresar las afirmaciones siguientes, si es posible, como intervalos:

a. x está a menos de 5 unidades de 3

b. y está a lo sumo 4 unidades de 7

c. t está a una distancia de 3 unidades de 5

d. x está al menos a 4 unidades de -5

e. x es menor que 4 y mayor que -4

3.3. Inecuaciones lineales

Las ecuaciones se caracterizan por presentar el signo de igualdad, mientras que en las desigualdades aparecen precisamente algunos de los signos $<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$. De todas formas, tanto las ecuaciones como las inecuaciones pueden ser de primer grado. Una inecuación es de primer grado cuando las incógnitas que aparecen en su expresión tienen exponente igual a 1.

Ecuaciones → ***Igualdades*** (=)

Inecuaciones → ***Desigualdades*** ($<$, $\leq$; $>$, $\geq$)

De primer grado

$3x - 2 = 1$	$3x - 2 < 1$
$\dfrac{x+1}{2} = 4$	$\dfrac{x+1}{2} > 4$
$x + y = 24$	$x + y \geq 24$
$-2\,x + 1 = x - 3$	$-2\,x + 1 \leq x - 3$

Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la desigualdad.

Ejemplos:
Resolveremos algunas inecuaciones.

a) $3\,x - 2 < 1$

Aplicandopropiedades

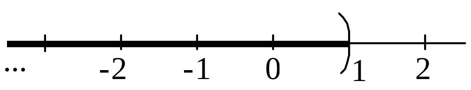
$$3\,x - 2 < 1$$
$$3\,x - 2 + 2 < 1 + 2$$
$$3\,x < 3$$
$$\frac{1}{3}\,3\,x < \frac{1}{3}\,3$$
$$x < 1$$

Despejando:

$$3x - 2 < 1$$
$$3\,x < 1 + 2$$
$$3\,x < 3$$
$$x < 3 : 3$$
$$x < 1$$

Solución: S = (- ∞ , 1).

Representación gráfica:



b) $\dfrac{x+1}{2} > 4$

Aplicando propiedades

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$$\frac{x+1}{2} \,.\, 2 > 4 \,.\, 2$$

$$x + 1 > 8$$

$$x + 1 + (-1) > 8 + (-1)$$

$$x > 7$$

Despejando:

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$$x + 1 > 4 \,.\, 2$$

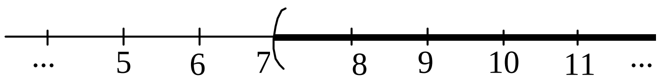
$$x + 1 > 8$$

$$x > 8 - 1$$

$$x > 7$$

Solución: S = (7 , + ∞)

Representación gráfica:



c) $x + y \geq 24$

En este caso tenemos una inecuación lineal con dos incógnitas, que se verifica para infinitas parejas de números.

Verificación:

$$0 + 24 \geq 24$$

$$2 + 23 \geq 24$$

$$-3 + 30 \geq 24$$

$$\frac{1}{2} + \frac{71}{3} \geq 24$$

$$1 + 100 \geq 24$$

Ejemplo:

$$x = 0 \;;\; y = 24$$

$$x = 2 \;;\; y = 23$$

$$x = -3 \;;\; y = 30$$

$$x = \frac{1}{2} \;;\; y = \frac{71}{3}$$

$$x = 1 \;;\; y = 100$$

d) $-2x + 1 \leq x - 3$

Aplicando propiedades:

$$-2x + 1 \leq x - 3$$

$$-2x + 1 + (-x) \leq x - 3 + (-x)$$

$$[-2x + (-x)] + 1 \leq [x + (-x)] - 3$$

$$-3x + [1 + (-1)] \leq -3 + (-1)$$

$$-3x \leq -4$$

$$-\frac{1}{3} \,.\, (-3)\, x \geq -\frac{1}{3} \,.\, (-4)$$

Despejando:

$$-2x + 1 \leq x - 3$$

$$-2x - x \leq -3 - 1$$

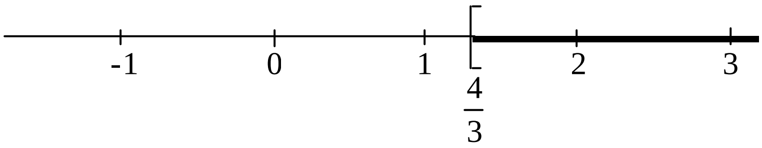
$$-3x \leq -4$$

$$x \geq -4 : (-3)$$

$x \geq \frac{4}{3}$ $\qquad\qquad$ $x \geq \frac{4}{3}$

Solución: $S = \left[\frac{4}{3} , +\infty \right)$

Representación gráfica:



Las inecuaciones permiten resolver problemas.

***Ejemplo*:**
Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico

Sea x el peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

$$\underbrace{\text{Peso de la furgoneta}}_{875} - \underbrace{\text{peso de 4 cajones}}_{4 \cdot x} \quad \underbrace{\text{no es menor que 415 kg}}_{\geq 415}$$

Debemos resolver entonces la inecuación

Pasos de resolución:		$875 - 4x \geq 415$
Restamos 875 a ambos miembros de la desigualdad	$\rightarrow$	$-4 \cdot x \geq 415 - 875$
Hacemos el cálculo en el segundo miembro	$\rightarrow$	$-4 \cdot x \geq -460$
Para despejar x, multiplicamos a ambos miembros por $-¼$. Recordemos que cuando multiplicamos por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad	$\rightarrow$	$x \leq \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-460)$
Hacemos el cálculo	$\rightarrow$	$x \leq 115$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$. Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo (0 , 115]. Graficamos la solución en la recta real:

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

12) Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:

a) $2\,x - 3 < 4 - 2\,x$

b) $5 + 3\,x \leq 4 - x$

c) $4 - 2\,t > t - 5$

d) $x + 8 \leq 3\,x + 1$

e) $2 \,.\left(x - \dfrac{1}{2} \right) > 3\,x$

f) $\dfrac{a+2}{4} \leq \dfrac{a-1}{3}$

g) $3\,x - 12 \leq \dfrac{5\,x - 6}{4}$

h) $3\,.\,(4 - x) > 18\,x + 5$

i) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} > 5 - \dfrac{x}{6}$

j) $-\dfrac{x}{4} - 4 \geq \dfrac{5\,x}{3} - \dfrac{1}{6}$

k) $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} > \dfrac{x+14}{2} - 2$

l) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{7} - x + 2 < 0$

m) $\left(2 - \dfrac{1}{3}x\right)(-3) + 4\,.\left(-\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{7}{4}\right) > 0$

n) $x - \sqrt{2} > 0$

13) Indicar si la siguiente resolución es V o F justificando la respuesta:

Ayuda

Recuerda lo que ocurre cuando multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número.
¿Es lo mismo hacerlo por un número positivo que por un número negativo?

$$\frac{3}{x} < 2$$

$$\frac{3}{x}\,x < 2\,x$$

$$3 < 2\,x$$

$$\frac{1}{2}\,3 < \frac{1}{2}\,2\,x$$

$$\frac{3}{2} < x$$

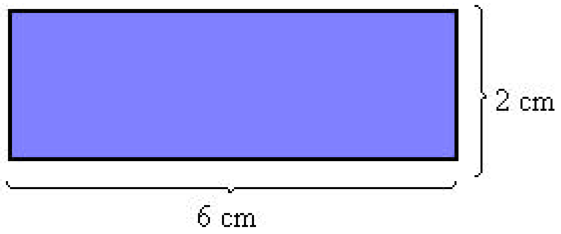
14) ¿Cuáles son los números cuyo triplo excede a su duplo en más de 20?.

15) ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de 4, que satisface la siguiente inecuación:

$x + 2 < 3\,x + 1$?.

16) Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7. ¿Qué se puede decir de su perímetro p ?.

17) El perímetro de un cuadrado no supera el perímetro del rectángulo de la figura. ¿Qué se puede asegurar acerca de la superficie S del cuadrado ?.



18) Un padre y su hijo se llevan 22 años. Determinar en qué período de sus vidas, la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo.

19) Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 100 Km/h y 150 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 3 horas?.

20) Una fábrica paga a sus viajantes \$10 por artículo vendido más una cantidad fija de \$500.Otra fábrica de la competencia paga \$15 por artículo y \$300 fijas. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?.

21) Sean $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x + 1 < 4\}$ y $B = \left(-\infty , \frac{3}{2}\right] \cup \left[3 , +\infty\right)$. Determinar $A \cap B$

22) Determinar:

$$\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 2x - 4 > 0\} \cap \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 3 - x \geq 0\}$$

23) Hallar y representar en la recta los números reales que verifican:

a) $|x - 4| > 2$

b) $|x + 2| \leq 3$

c) $|4 - x| > 0$

d) $0 < |x + 3| < 1$

e) $0 < |x - 3| < \frac{1}{4}$

f) $|12 - 4x| > 3$

g) $|4x - 3| \leq 5$

h) $|-3x + 6| < 2$

i) $|1 + 2x| \geq \frac{1}{2}$

j) $|3 - x| - 5 \geq 0$

k) $-2|x + 1| + 8 < 0$