2ª Evaluación	**A**		**CURSO 2013/14**
ASIGNATURA: Matemáticas I		**FECHA:** 17/03/2014	
ALUMNO:			**1º Bachillerato: A**

COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA

1.- Sea f(x) la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Hallar a y b para que f sea continua y derivable en el punto x = 0.

(1,25 ptos)

2.-a) Estudiar la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **(0,75 ptos)**

b) Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x) = 2x + \cos x$ en el punto de abcisa $x = 0$. **(1 pto)**

3.-

a) Calcular el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{\ln(x^2-4)}}$ **(0,5 ptos)**

b) Escribir la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ como función a trozos **(0,5 ptos)**

4.- Derivar las siguientes funciones: **(2 ptos)**

a) $f(x) = \operatorname{Arcsen}\sqrt{6x^3 - 4x} \cdot 7^{\operatorname{cotang}(5x-6)}$

b) $y = [sen(2x-1)]^{tgx^2}$

5.- Calcular los siguientes límites: **(1,5 ptos)**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Ln(2x^2-1)}{Tang(x-1)}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\tan g\, x}$;

6.- Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, calcular la ecuación de una circunferencia concéntrica con la anterior y de radio doble que esta. Estudiar la posición relativa de la circunferencia dada con la recta $x - 3y + 4 = 0$. **(1,25 ptos)**

7.- Hallar la ecuación reducida de una hipérbola cuyos focos están en F(3, 4), F´(3, -4) y cuya diferencia de distancias es 4. Calcular las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de las asíntotas.. **(1,25 ptos)**

(A)

1) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & x\leq 0 \\ -x^2+ax+b & x>0\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} \cos x & x<0 \\ -2x+a & x>0\end{cases}$

(1) $\operatorname{Dom} f(x)=\mathbb{R}$, ya que las dos funciones que la componen son continuas en $\mathbb{R}$, la posible discontinuidad es $x=0$

(2) Estudio la continuidad en $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} (-x^2+ax+b)=b$

$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x=0$

$f(0)=0$

Para que sea continua $\boxed{b=0}$

3º Estudio la derivabilidad

$\lim_{x\to 0^+} -2x+a=a$

$\lim_{x\to 0^-} \cos x=1$

Para que sea derivable $\boxed{a=1}$

Para que $f(x)$ sea continua y derivable $a=1$ y $b=0$

(2) a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ $\operatorname{Dom} f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

En $x=1$ $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{0}=\infty$ hay una discontinuidad inevitable de salto ∞

En $x=-1$ $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to -1} \dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$ hay una discontinuidad evitable

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

b) $f(x)=2x+\cos x$ $f'(x)=2-\operatorname{sen} x$

$x_0=0$ tg $y-1=2(x-0)$

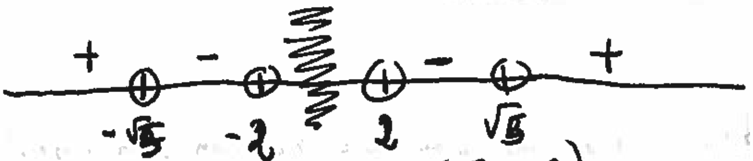
$y_0=1$ normal $y-1=-\frac{1}{2}(x-0)$

$m=f'(0)=2$

(2)

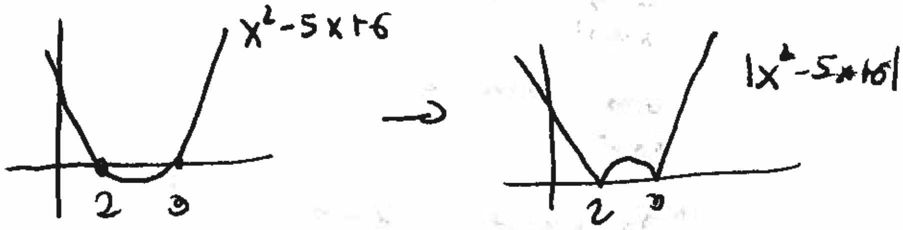
1) a) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{\ln(x^2-4)}}$ pr un lado $x^2-4=0$ $x=\pm\sqrt{4} \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$

pr otro lado $\ln(x^2-4)=0$ $x^2-4=e^0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$



$\operatorname{Dom} f(x)=(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$

b) $f(x)=|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6 & x\le 2 \\ -(x^2-5x+6) & -2<x<3 \\ x^2-5x+6 & x\geq 3 \end{cases}$



4) a) $f(x)=\arcsin\sqrt{6x^3-4x}\cdot 7^{\operatorname{cotg}(5x-6)}$

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{18x^2-4}{2\sqrt{6x^3-4x}}}{\sqrt{1-(6x^3-4x)}}\cdot 7^{\operatorname{cotg}(5x-6)}+\arcsin\left(\sqrt{6x^3-4x}\right)\cdot 7^{\operatorname{cotg}(5x-6)}\cdot\dfrac{-5}{\operatorname{sen}^2(5x-6)}\ln 7$

b) $y=(\operatorname{sen}(2x-1))^{\operatorname{tg}x^2}$

$\ln y=\operatorname{tg}x^2\ \ln(\operatorname{sen}(2x-1))$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2x}{\cos^2x^2}\ln(\operatorname{sen}(2x-1))+\operatorname{tg}x^2\ \dfrac{2\cos(2x-1)}{\operatorname{sen}(2x-1)}$

$y'=\left[\dfrac{2x\ln(\operatorname{sen}(2x-1))}{\cos^2x^2}+\dfrac{2\operatorname{tg}x^2\cos(2x-1)}{\operatorname{sen}(2x-1)}\right]\left(\operatorname{sen}(2x-1)\right)^{\operatorname{tg}x^2}$

5) a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}\overset{\text{Indet}}{=}\dfrac{0}{0}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{4x}{2x^2-1}}{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x\cos(x-1)}{2x^2-1}=4$

b) $\Rightarrow A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}$; $\ln A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\ln(1-\cos x)=\infty\cdot 0=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\operatorname{cotg}x}=\dfrac{0}{0}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^3x}{1-\cos x}=0$

$\boxed{A=e^0=1}$

6) $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ $\qquad 3=a^2+b^2-r^2$

$C=(3,2)$

$r^2=9+4-3=10 \quad r=\sqrt{10} \qquad r_2=2\sqrt{10}$

$$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=40}$$

Calculamos la distancia del centro a la recta $x-3y+4=0$

$$d(C,r)=\frac{|3-9+4|}{\sqrt{1+9}}=\frac{2}{\sqrt{10}}<r \Rightarrow \text{Son secantes}$$

7) $F=(3,4)$, $F'=(3,-4)$ $\Rightarrow C=(3,0) \qquad c=4 \qquad 16=4+b^2 \quad b^2=12$

$2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$ $\qquad A=(3,2) \qquad B=(3+\sqrt{12},0)$

$A'=(3,-2) \qquad B'=(3-\sqrt{12},0)$

$$\frac{y^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{12}=1 \qquad m=\frac{\pm\sqrt{12}}{-2}=\pm\sqrt{3}$$

Asíntota $\boxed{y=\pm\sqrt{3}(x-3)}$

2ª Evaluación	**B**	**CURSO 2013/14**

PINOSIERRA

ASIGNATURA:________ Matemáticas I_____**FECHA:** ___17/03/2014_____

ALUMNO:____ **1º Bachillerato: A**

1.- Se considera la función . $f(x) = \begin{cases} Lnx & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < \infty \end{cases}$.

a) ¿Para qué valores de a y b la función es continua?.

b) ¿Para qué valores de a y b es derivable?. **(1,25 ptos)**

2.- **a)** Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$ en el punto de abcisa x = 1. **(1 pto)**

b) Estudiar la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ **(0,75 ptos)**

3.- a)Calcular el dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{\ln(x^2-1)}}$ **(0,5 ptos)**

b) Escribir la función $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ como función a trozos **(0,5 ptos)**

4.- Derivar las siguientes funciones: **(2 ptos)**

a) $f(x) = (Ln(6x - 7))^{Arctang(8x)}$

b) $f(x) = Cos\sqrt{x^4 - 6x + 5}.Cotg(e^{5x-9})$

5.- Calcular los siguientes límites: **(1,5ptos)**

a) $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^x$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$

6..- Calcula la ecuación de una circunferencia tangente a los ejes coordenados y que pasa por A(9,2) Y calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A **(1,25 pto)**

7.- Hallar la ecuación de la elipse con C(-1, 2); F(-1, 3) y suma de distancias 6. Escribir las coordenadas de sus cuatro vértices. **(1,5 pto)**

1) $f(x)=\begin{cases} \ln x & 0<x<1 \\ ax^2+b & 1\le x<\infty \end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f(x)=(0,\infty)$ $\quad f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0<x<1 \\ 2ax & x>1 \end{cases}$

En $x=0$ $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ hay una discontinuidad inevitable de salto ∞

<u>Continuidad</u>
En $x=1$

$\lim_{x\to 1^+} ax^2+b = a+b$

$\lim_{x\to 1^-} \ln x = 0$

$f(1)=a+b$

Para que sea continua $a+b=0$

<u>Derivabilidad</u>

$\lim_{x\to 1^+} 2ax = 2a$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1$

Para que sea derivable

$2a=1$

$\boxed{a=1/2}$

Para que sea continua y derivable

$a=1/2$

$b=-1/2$

2) a) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ $\quad f'(x)=\frac{e^x x - e^x}{x^2}$

$x_0=1$ $\quad$ tg $y-e=0(x-1) \to y-e=0$

$y_0=e$ $\quad$ normal $y-e=-\frac{1}{0}(x-1) \to x-1=0$

$m=0$

b) (Igual que el del otro grupo)

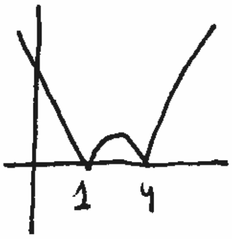
3) a) por un lado $\ln(x^2-1) \Rightarrow x^2-1>0$ $\quad$ + $\; -1 \;$ − $\; 1 \;$ +

por otro lado $\sqrt{\ln(x^2-1)} \Rightarrow \ln(x^2-1)\ge 0$ $\quad$ + $\; -\sqrt{2} \;\; \sqrt{2} \;$ +

$\ln(x^2-1)=0 \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\mathrm{Dom}\, f(x) = (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$

b) $f(x) = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2-5x+4 & x \le 1 \\ -(x^2-5x+4) & 1 < x < 4 \\ x^2-5x+4 & x \geq 4 \end{cases}$ ②



4) a) $f(x) = \cancel{\arcsin\sqrt{6x^3}}$

$f(x) = (\ln(6x-7))^{\operatorname{Arctg}(8x)} =$

$\ln y = \operatorname{Actg}(8x) \ln(\ln(6x-7))$

$$\frac{y'}{y} = \frac{8}{1+64x^2}\ln(\ln(6x-7)) + \operatorname{Arctg}(8x)\frac{\frac{6}{6x-7}}{\ln(6x-7)}$$

$$y' = \left[\frac{8\ln(\ln(6x-7))}{1+64x^2} + \frac{6\operatorname{Arctg}(8x)}{(6x-7)\ln(6x-7)}\right](\ln(6x-7))^{\operatorname{Arctg}(8x)}$$

b) $f(x) = \cos(\sqrt{x^4-6x+5}) \cdot \operatorname{cotg}(e^{5x-9})$

$$y' = -\operatorname{sen}(\sqrt{x^4-6x+5})\frac{4x^3-6}{2\sqrt{x^4-6x+5}} \cdot \operatorname{cotg}(e^{5x-9}) - \cos(\sqrt{x^4-6x+5})$$

$$\frac{(e^{5x-9}) \cdot 5}{\operatorname{sen}^2(e^{5x-9})}.$$

⑤ a) $A = \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x \quad \ln A = \lim_{x\to\infty} x\ln(\cos(\frac{1}{x})) = \infty \cdot 0 =$

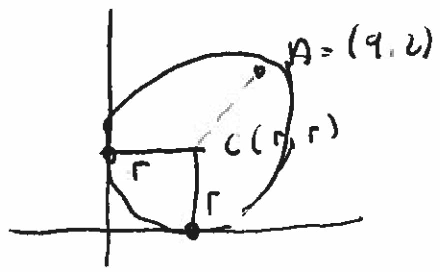
L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{+\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = 0$$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2(e^x-1)e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2e^{2x}-2e^x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4e^{2x}-2e^x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

6)



$\vec{AC} = (r-9, r-2)$

$|\vec{AC}| = \sqrt{r^2+81-18r+r^2-4r+4} = r$

$r^2-22r+85=0$ → $r=17$, $r=5$

Si $r=17$

C_1 $(x-17)^2+(y-17)^2 = 17^2$

$\vec{AC} = (+8, 15)$ $\quad \vec{AC}_\perp = (15, -8)$

tg $\frac{x-9}{15} = \frac{y-2}{-8}$ $\quad$ normal $\frac{x-9}{8} = \frac{y-2}{15}$

Si $r=5$

C_2 $(x-5)^2+(y-5)^2 = 5^2$

$\vec{AC} = (-4, 3)$ $\quad \vec{AC}_\perp = (3, 4)$

tg $\frac{x-9}{3} = \frac{y-2}{4}$ $\quad$ normal $\frac{x-9}{-4} = \frac{y-2}{3}$

7) $C=(-1,2)$ $\quad c=1$ $\quad a=3$ $\quad 9=1+b^2$ $\quad b=\sqrt{8}$

$F=(-1,3)$

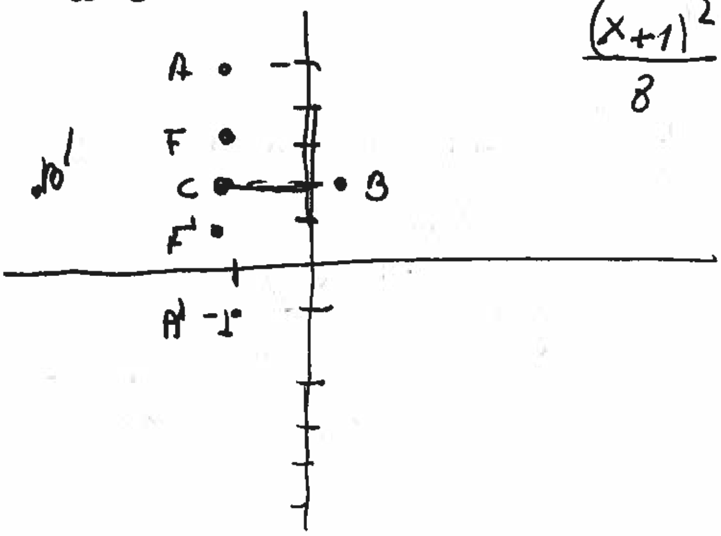
$F'=(-1,1)$

$A=(-1,5)$

$A'=(-1,-1)$

$B=(-1+\sqrt{8}, 2)$

$B'=(-1-\sqrt{8}, 2)$



$\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$