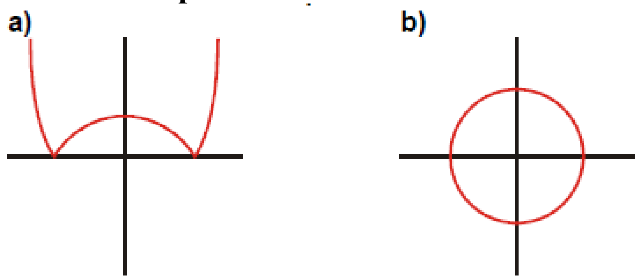
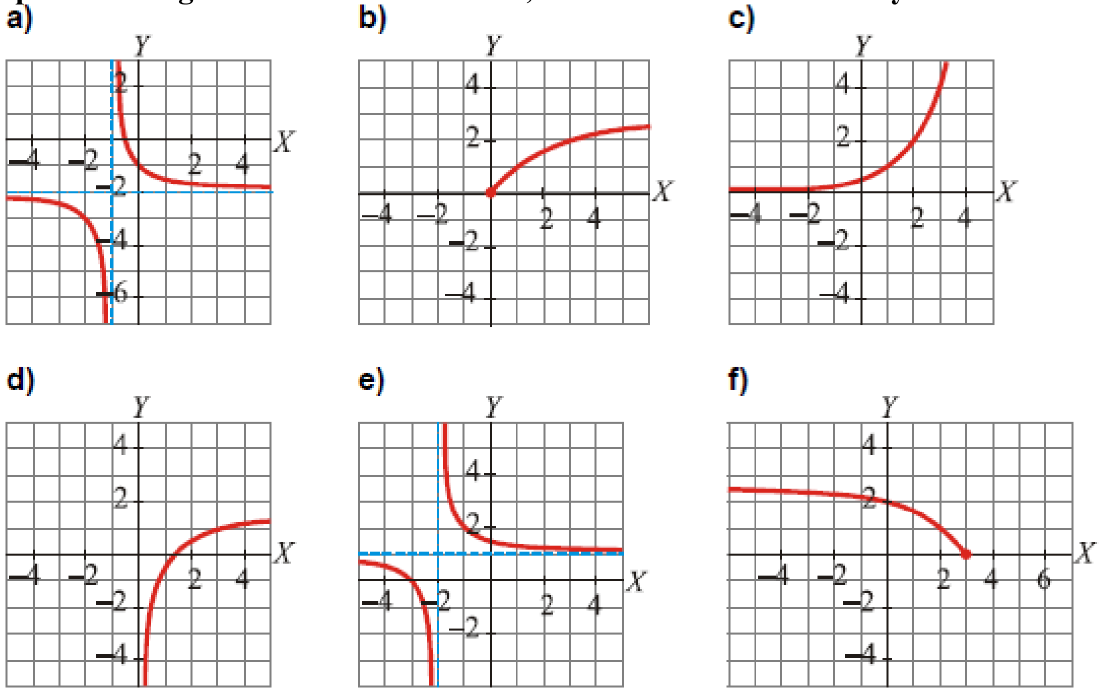
AUTOEVALUACIÓN DE N$^{\underline{OS}}$ COMPLEJOS Y FUNCIONES 1º BACH. CIENC.

1. Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:



Solución: En una función, a cada valor de x le corresponde, a lo sumo, un valor de y. Por tanto, a) es función, pero b) no lo es.

2. A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio y su recorrido:



Solución:

a) Dominio = $\mathbf{R} - \{-1\}$
Recorrido = R – {-2}

b) Dominio = $[0, +\infty)$
Recorrido = $[0,\infty)$

c) Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$
Recorrido = $(0,\infty)$

d) Dominio = $(0,\infty)$
Recorrido = R

e) Dominio = R – {-2}
Recorrido = R – {1}

f) Dominio = $(-\infty,3]$
Recorrido = $[0,\infty)$

3. Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$	**b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}$	**c)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$	**d)** $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{9x^2-16}}$
e) $f(x)=\sqrt{-12+7x-x^2}$	**f)** $f(x)=\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$	**g)** $f(x)=\mathrm{Ln}\,\dfrac{x+4}{x-3}$	**h)** $f(x)=e^{1-x^2}$

Solución.

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$: Función Racional, el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador.

$$D[f(x)]=\{x\in R \,/\, x^2-9\neq 0\} : x^2-9=0 : x^2=9 : x=\pm 3$$

$$D\left[\frac{x-2}{x^2-9}\right]=R-\{\pm 3\}$$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}$: Función Racional, el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador.

$$D[f(x)]=\{x\in R \,/\, x^2\neq 0\} : x^2=0 : x=0$$

$$D\left[\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}\right]=R-\{0\}$$

Nota. La raíz no impone condiciones al dominio por ser de índice impar.

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan el radicando mayor o igual que cero.

$$D[f(x)]=\left\{x\in R \,/\, \frac{x^2-1}{x}\geq 0\right\}$$

$$\frac{x^2-1}{x}\geq 0 : \begin{cases}\text{Ceros: } x^2-1=0 : x=\pm \\ \text{Polos: } x=0\end{cases} \qquad \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x}\geq 0$$

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
-2		-0,5		0,5		2
$\frac{-\cdot-}{-}=-$	0	$\frac{+\cdot-}{-}=+$	$\nexists$	$\frac{+\cdot-}{+}=-$	0	$\frac{+\cdot+}{+}=+$

$$D\left[\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\right]=[-1,0)\cup[1,+\infty)$$

d) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{9x^2-16}}$: Función con denominador irracional, el dominio son todos los números reales que hagan el radicando mayor que cero.

$$D[f(x)]=\{x\in R \,/\, 9x^2-16>0\}$$

$$(9x^2-16)>0 : (3x+4)\cdot(3x-4)>0$$

$\left(-\infty,\frac{-4}{3}\right)$	$\frac{-4}{3}$	$\left(\frac{-4}{3},\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$
-2		0		2
$-\cdot-=+$	$\nexists$	$+\cdot-=-$	$\nexists$	$+\cdot+=+$

$$D\left[\frac{5}{\sqrt{9x^2-16}}\right]=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$$

e) $f(x)=\sqrt{-12+7x-x^2}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan dicando mayor o igual que cero.

$$D[f(x)]=\{x\in R/-x^2+7x-12\geq 0\}$$

$$-x^2+7x-12\geq 0:\ -(x-3)\cdot(x-4)\geq 0$$

$(-\infty,3)$	3	$(3,4)$	4	$(4,+\infty)$
2		3,5		5
$-\cdot-\cdot-=-$	0	$-\cdot+\cdot-=+$	0	$-\cdot+\cdot+=-$

$$D\left[\sqrt{-12+7x-x^2}\right]=[3,4]$$

f) $f(x)=\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$: Función Racional con expresiones irracionales, el dominio lo imponen dos condiciones, todos los números reales excepto los que anulen el denominador que además hagan mayor o igual que cero los radicándoos de las expresiones irracionales.

$$D[f(x)]=\left\{x\in R/\begin{matrix}x\geq 0\\ 3-\sqrt{x}\neq 0\end{matrix}\right\}:\begin{cases}x\geq 0: x\in[0,+\infty)\\ 3-\sqrt{x}\neq 0: x\neq 9\end{cases}$$

$$D\left[\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right]=[0,9)\cup(9,+\infty)=[0,+\infty)-\{9\}$$

g)

$$f(x)=Ln\frac{x+4}{x-3}$$

$$D[f(x)]=\left\{x\in R/\frac{x+4}{x-3}>0\right\}$$

$$\frac{x+4}{x-3}>0:\begin{cases}x+4=0: x=-4\\ x-3=0: x=3\end{cases}$$

$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,3)$	3	$(3,+\infty)$
-5		0		4
$-\cdot-=+$	0	$+\cdot-=-$	0	$+\cdot+=+$

$$D\left[Ln\frac{x+4}{x-3}\right]=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$$

h) $f(x)=e^{1-x^2}$

La función exponencial no impone restricciones al dominio, si el exponente es un número real, existe su exponencial, por lo tanto:

$$D[\text{Función exponencial}]D[\text{Exponente}]$$

$$D\left[e^{1-x^2}\right]=D\left[1-x^2\right]=R$$

4. Un globo (con forma esférica) se hincha mediante una maquina durante un minuto. El radio, r (cm) del globo varía con el tiempo de la siguiente forma:

r (t) = t · (120 − t) t (s)

Expresar:

a) El volumen del gas contenido en el globo en función de r

b) El volumen del gas contenido en el globo en función de t

Solución.

a) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

b) $\left.\begin{array}{r} V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \\ r = t\cdot(120-t) \end{array}\right\} : V(t) = \dfrac{4}{3}\pi(t\cdot(120-t))^3 = \dfrac{4}{3}\pi t^3(120-t)^3$

5. Dadas las funciones

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad g(x) = \frac{x}{x^2-1} \qquad h(x) = x^2 + x$$

Calcular:

a) Sus dominios

b) Simetrías

c) Las funciones [g o f](x) , [h o f](x)

d) Sus funciones inversas cuando existan.

Solución.

a) Dominios:

$$D\left[\sqrt{x^2-4}\right] = \left\{x \in R \,/\, x^2 - 4 \geq 0\right\}$$

$x^2 - 4 \geq 0 : (x+2)\cdot(x-2) \geq 0$

$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
-3		0		3
$-\cdot- = +$	0	$+\cdot- = -$	0	$+\cdot+ = +$

$$D\left[\sqrt{x^2-4}\right] = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

$$D\left[\frac{x}{x^2-1}\right] = \left\{x \in R \,/\, x^2 - 1 \neq 0\right\} : x^2 - 1 \neq 0 : x^2 \neq 1 : x \neq \pm 1$$

$$D\left[\frac{x}{x^2-1}\right] = R - \{\pm 1\}$$

$D\left[x^2 + x\right] = R$ Por ser polinómica

b) Simetría: De forma rigurosa hay que estudiar como se transforma la función cuando se cambia x por –x, pudiendo darse tres casos diferentes:

- f (–x) = f (x). Función par. Simétrica respecto de OY
- f (–x) = –f (x). Función impar. Simétrica respecto de (0, 0).
- Ninguno de los anteriores. No tiene simetría.

- $f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)$: Simétrica PAR
- $g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x}{x^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-g(x)$: Simetría impar
- $h(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq\begin{cases}\neq h(x)\\ \neq -h(x)\end{cases}\Rightarrow$ No tiene simetria

Existe otra forma menos rigurosa que es un poco más sencilla. Se seleccionan dos valores ±a pertenecientes al dominio de la función y se calcula el valor de la función en ellos.

- f (–a) = f (a). Función par. Simétrica respecto de OY
- f (–a) = –f (a). Función impar. Simétrica respecto de (0, 0).
- Ninguno de los anteriores. No tiene simetría.

- $\pm 3\in D[f(x)]:\left\{\begin{matrix}f(-3)=\sqrt{(-3)^2-4}=\sqrt{5}\\ f(3)=\sqrt{3^2-4}=\sqrt{5}\end{matrix}\right\}:f(-3)=f(3)$. Simétrica PAR
- $\pm 2\in D[g(x)]:\left\{\begin{matrix}g(-2)=\dfrac{-2}{(-2)^2-1}=\dfrac{-2}{3}\\ g(2)=\dfrac{2}{2^2-1}=\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right\}:g(-2)=-g(2)$. Simetría impar
- $\pm 1\in D[h(x)]:\left\{\begin{matrix}h(-1)=(-1)^2+(-1)=0\\ h(1)=1^2+1=2\end{matrix}\right\}:h(-1)\neq\begin{cases}h(1)\\ -h(1)\end{cases}$. No tiene simetría

c) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{f(x)}{(f(x))^2-1}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-5}$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=(f(x))^2+f(x)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2+\sqrt{x^2-4}=x^2-4+\sqrt{x^2-4}$

d) $f^{-1}(x)$: Se intercambian y con x y se despeja y.

$$y=\sqrt{x^2-4}\ :\ x=\sqrt{y^2-4}\ :\ x^2=y^2-4\ :\ y^2=x^2+4\ :\ y=\sqrt{x^2+4}$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+4}$$

$h^{-1}(x)$ No tiene inversa.

6. Sean las funciones: f(x) = sen x g(x) = x^2
Calcular:

a) f o g b) g o f c) g o (f o g)

Solución.

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left\{\begin{matrix} f(x)=\text{sen } x \\ g(x)=x^2\end{matrix}\right\}=\text{sen}(g(x))=\text{sen}(x^2)$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left\{\begin{matrix} g(x)=x^2 \\ f(x)=\text{sen } x\end{matrix}\right\}=(f(x))^2=(\text{sen } x)^2=\text{sen}^2 x$

c) $(g\circ(f\circ g))(x)=g(f(g(x)))=\left\{\begin{matrix} g(x)=x^2 \\ f(g(x))=\text{sen } x^2\end{matrix}\right\}=(f(g(x)))^2=(\text{sen } x^2)^2=\text{sen}^2 x^2$

7. Calcular la inversa [$f^{-1}(x)$] de las siguientes funciones:

a) $f(x)$ **b)** $f(x)=\text{Ln}\dfrac{x-1}{x-2}$

a) $f(x)=e^{1-x^2}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x=e^{1-y^2}$
2. Se despeja y en función de x: $x=e^{1-y^2}$ $\quad \text{Ln } x=\text{Ln } e^{1-y^2}$

   $\text{Ln } x=1-y^2$: $y^2=1-\text{Ln } x$ $\quad y=\sqrt{1-\text{Ln } x}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x)=\sqrt{1-\text{Ln } x}$

b) $f(x)=\text{Ln}\dfrac{x-1}{x-2}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x=\text{Ln}\dfrac{y-1}{y-2}$
2. Se despeja y en función de x: $x=\text{Ln}\dfrac{y-1}{y-2}$ / $e^x=e^{\text{Ln}\frac{y-1}{y-2}}$ / $e^x=\dfrac{y-1}{y-2}$

   $e^x(y-2)=y-1$ / $ye^x-2e^x=y-1$ / $ye^x-y=2e^x-1$ / $y(e^x-1)=2e^x-1$

   $y=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}}$

8. Sean las funciones:

$$f(x)=\frac{1}{3x-1}\ ;\ g(x)=\frac{2}{6x+2}\ ;\ h(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

Calcular:

a) $\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}$

b) $\dfrac{g(x)\cdot h(x)}{f(x)}$

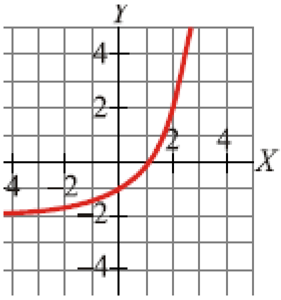
Solución.

a) $$\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}=\frac{\frac{1}{3x-1}-\frac{2}{2(3x+1)}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3x+1}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{1\cdot(3x+1)-1\cdot(3x-1)}{(3x-1)\cdot(3x+1)}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{3x+1-3x+1}{9x^2-1^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=$$

$$=\frac{\frac{2}{9x^2-1}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{2\cdot(x-1)}{(9x^2-1)\cdot(x+1)}=\frac{2x-2}{9x^3+9x^2-x-1}$$

b) $$\frac{f(x)-h(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{3x-1}-\frac{2}{2(3x+1)}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3x+1}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{1\cdot(3x+1)-1\cdot(3x-1)}{(3x-1)\cdot(3x+1)}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{3x+1-3x+1}{9x^2-1^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=$$

9. A partir de la gráfica de y = f (x):



Calcula:

$f^{-1}(-1)$ y $f^{-1}(0)$

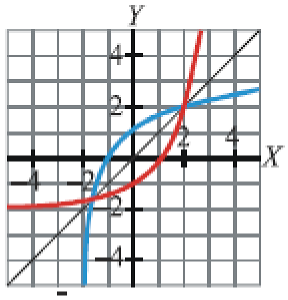
Representa, en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$

Solución:

a) $f^{-1}(-1)=0$ porque $f(0)=-1$

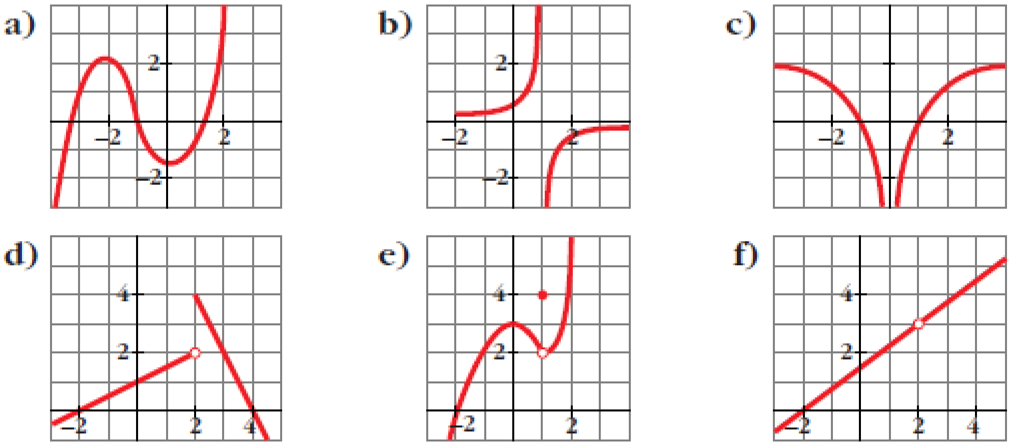
$f^{-1}(0)=1$ porque $f(1)=0$

b)



10. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



SOLUCIÓN:

a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

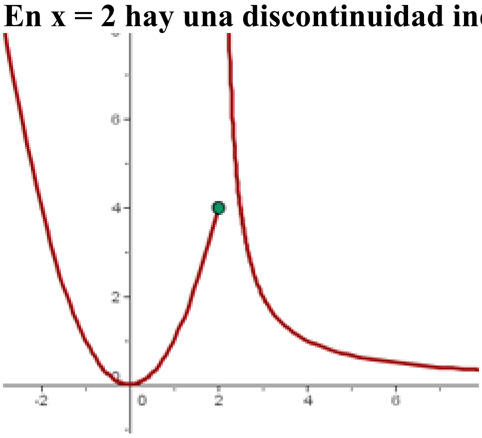
f) No está definida en $x = 2$.

11. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y de qué tipo son:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad\qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{2}{x-2} = \infty$$

En x = 2 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.



12.

Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \ne 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a\end{array}\right\} 2 = 4 - a \to a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a\end{array}\right\} a = 2$

13.

En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en días).

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

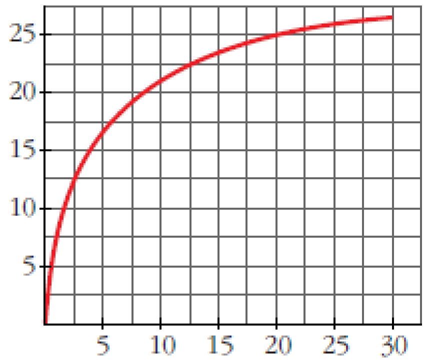
c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si nunca acabara el entrenamiento?

SOLUCIÓN:

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21{,}43 \to 21$ montajes el décimo día.

b)



c) Se aproxima a 30 $\left(\text{pues } \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30\right)$.

14.

¿Existe algún valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN:

No, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

15. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-3x+5}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2+x-1}{x+3} - 5x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} (x-2) = -2-2 = -4$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-3x+5}{x-1} = \dfrac{-3\cdot 1^+ + 5}{1^+ - 1} = \dfrac{-3+5}{0^+} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-3x+5}{x-1} = \dfrac{-3\cdot 1^- + 5}{1^- - 1} = \dfrac{-3+5}{0^-} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x+8}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2+x-1}{x+3} - 5x\right) = [\infty - \infty] =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2+x-1-5x(x+3)}{x+3} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{5x^2}+x-1-\cancel{5x^2}-15x}{x+3} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-14x-1}{x+3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -14$

e)

$\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\left[\frac{1}{x-2}-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\cdot\frac{1-x+2}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{x-2}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

16.

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

SOLUCIÓN:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{x} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{|x|} = 3$

17. Calcula el límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3n - \sqrt{9n^2+5n}\right)$$

Solución:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3n - \sqrt{9n^2+5n}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3n - \sqrt{9n^2+5n}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2+5n}\right)}{3n + \sqrt{9n^2+5n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9n^2 - (9n^2+5n)}{3n + \sqrt{9n^2+5n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{9n^2} - \cancel{9n^2} - 5n}{3n + \sqrt{9n^2+5n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2+5n}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2}} = \frac{-5}{3+3} = -\frac{5}{6}$$

18. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x}, & si \quad x < -1 \\ x+3, & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-x^2}, & si \quad x < 1 \\ x - \dfrac{1}{2}, & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) $(\Re)$ **b)** $(\Re - \{-1\})$

19. Analiza para los distintos valores de k la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}, si \quad x\neq 1\\ k, \quad si \quad x=1\end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$k=0 \quad \Re-\{2\}; \quad k\neq 0 \quad \Re-\{1,2\}$

20. Halla el valor de a y b para que sean continuas las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a, \quad si \quad x\leq -1\\ x+1, \quad si \quad x\in(-1,1)\\ 2-b, \quad si \quad x\geq 1\end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a=-1, b=0, $\Re$

21. Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de x = 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2+2x}$$

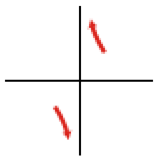
¿Qué significado tiene el límite anterior? Justifica tu respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x^2+2x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x^2+2x}=+\infty$$



22. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ b) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

Solución:

a) Verticales: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^+ - 3 \cdot 1^+ + 3}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^- - 3 \cdot 1^- + 3}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Horizontal: no tiene.

Oblicua:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 - 3x + 3 & x - 1 \\ \cline{3-3} & -x^2 + x & x - 2 \\ \cline{2-2} & -2x + 3 & \\ & 2x - 2 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = x - 2 + \frac{1}{x - 1}$$

La asíntota es: $y = x - 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

b) Verticales: no tiene.

Horizontal:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 3} = 1 \Rightarrow$ La asíntota es: $y = 1$

$$\frac{x^2}{x^2 + 3} - 1 = \frac{x^2 - x^2 - 3}{x^2 + 3} = \frac{-3}{x^2 + 3}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{x^2 + 3} \right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{3}{x^2 + 3} \right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

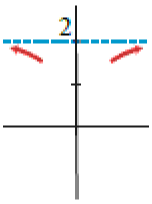
23. Halla las asíntotas de la siguiente función y representa los resultados que obtengas. ¿Qué puedes afirmar acerca de las asíntotas según los resultados obtenidos?

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$



Con calculadora podemos comprobar que:

- Dando valores muy grandes y positivos $(x \to +\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.
- Dando valores muy grandes y negativos $(x \to -\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.

24. Los gastos mensuales de una familia en alimentación y ropa dependen de sus ingresos x. Así:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + k & \text{si } 0 \le x \le 1200 \\ \dfrac{1000x}{x + 300} & \text{si } x > 1200 \end{cases}$$

con x y f (x) dados en euros.

(a) Calcula el valor de k para que los gastos sean continuos.

(b) Calcula el límite de f (x) cuando x → + ∞ y explica su significado.

Solución:

a) Para que los gastos sean continuos, $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1200$, puesto que para el resto de valores tenemos asegurada la continuidad:

$y = 0{,}5x + k$ es una función lineal $\rightarrow$ continua en el dominio dado $0 \le x = 1200$.

$y = \dfrac{1000x}{x + 300}$ es una función de proporcionalidad inversa, continua en el dominio dado $x > 1200$.

Imponemos la continuidad en $x = 1200$ para calcular k:

$$\left.\begin{array}{l} f(1200) = 0{,}5 + 1200 + k = 600 + k \\ \lim\limits_{x \to 1200^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1200} f(0{,}5x + k) = 600 + k \\ \lim\limits_{x \to 1200^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1200} \dfrac{1000x}{x + 300} = 800 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x \to 1200^-} f(x) = \lim_{x \to 1200^+} f(x) \rightarrow 600 + k = 800 \rightarrow k = 200$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1000x}{x + 300} = 1000$$

Los gastos mensuales de una familia, por muchos ingresos que tenga, son como máximo: 1000 euros.

25. Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:

a) **b)**

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\frac{32\,(-i)}{i\,(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{18^\circ + 72^\circ k};\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

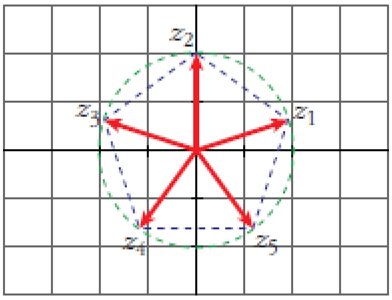
$z_1 = 2_{18^\circ} = 1{,}9 + 0{,}6i$

$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$

$z_3 = 2_{162^\circ} = -1{,}9 + 0{,}6i$

$z_4 = 2_{234^\circ} = -1{,}2 - 1{,}6i$

$z_5 = 2_{306^\circ} = 1{,}2 - 1{,}6i$



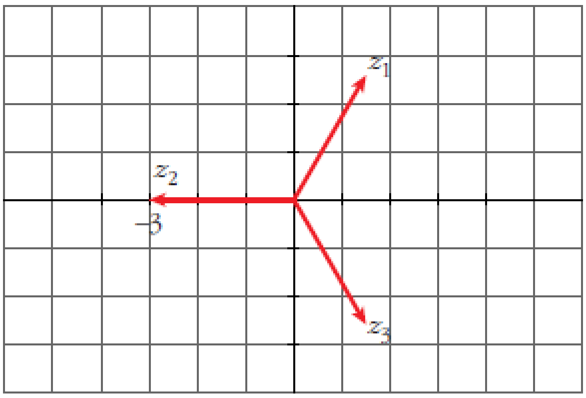
$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ k};\quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen}\,300^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



26. Calcula:

a) $\dfrac{1 + 2i}{2 - i}(2 + i) + \dfrac{1 - 2i}{2 + i}(2 - i)$ **b)** i^{126} **c)** $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5$ **d)** $\sqrt[6]{-64}$

a)

$$\frac{1+2i}{2-i}(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}(2-i)=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)}+\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)}=$$

$$=\frac{(1+2i)(2+i)^2+(1-2i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$$

$$=\frac{(1+2i)(4-1+4i)+(1-2i)(4-1-4i)}{4+1}=$$

$$=\frac{(1+2i)(3+4i)+(1-2i)(3-4i)}{5}=\frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5}=$$

$$=\frac{-10}{5}=-2$$

b)

$$i^{126}=i^2=-1$$

c)

$$(1+i\sqrt{3})^5=(2_{60°})^5=32_{300°}=32(\cos 300°+i\,\mathrm{sen}\,300°)=$$

$$=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$$

d)

$$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64_{180°}}=\sqrt[6]{2^6}_{\,(180°+360°k)/6}=2_{30°+60°k};\quad k=0,1,2,3,4,5$$

Las seis raíces son:

$2_{30°}=\sqrt{3}+i$ $\quad 2_{90°}=2i$ $\quad 2_{150°}=-\sqrt{3}+i$

$2_{210°}=-\sqrt{3}-i$ $\quad 2_{270°}=-2$ $\quad 2_{330°}=\sqrt{3}-i$

27. Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto ($\sqrt{2},\sqrt{2}$). Halla los otros vértices.

El punto $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ corresponde al afijo del número complejo $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=2_{45°}$.

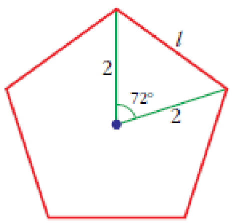
Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por $1_{72°}$:

$z_2=2_{117°}=-0{,}91+1{,}78i$ $\quad z_3=2_{189°}=-1{,}97-0{,}31i$

$z_4=2_{261°}\ -0{,}31-1{,}97i$ $\quad z_5=2_{333°}=1{,}78-0{,}91i$

Los otros tres vértices serán:

(–0,91; 1,78) (–1,97; –0,31) (–0,31; –1,97) (1,78; –0,91)



28. Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} \quad r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{array}\right.$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{array}\right.$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \;\rightarrow\; 16 = r^4 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} r = 2 \\ r' = 4 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \quad \alpha + 3\alpha = 180° \;\rightarrow\; 4\alpha = 180° \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{array}\right.$$

Por tanto: $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones en ℂ: $z^2 - 2z + 5 = 0$

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$