

UNIDAD 1. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Propósitos: Reforzar y extender el conocimiento de la derivada a través del estudio de la variación de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales para cubrir situaciones que se modelan con funciones trascendentes. Retomar las relaciones entre las gráficas de una función y su derivada.

Sección 1. Derivadas de funciones trigonométricas

Los aprendizajes que debes obtener al terminar de estudiar esta sección son:

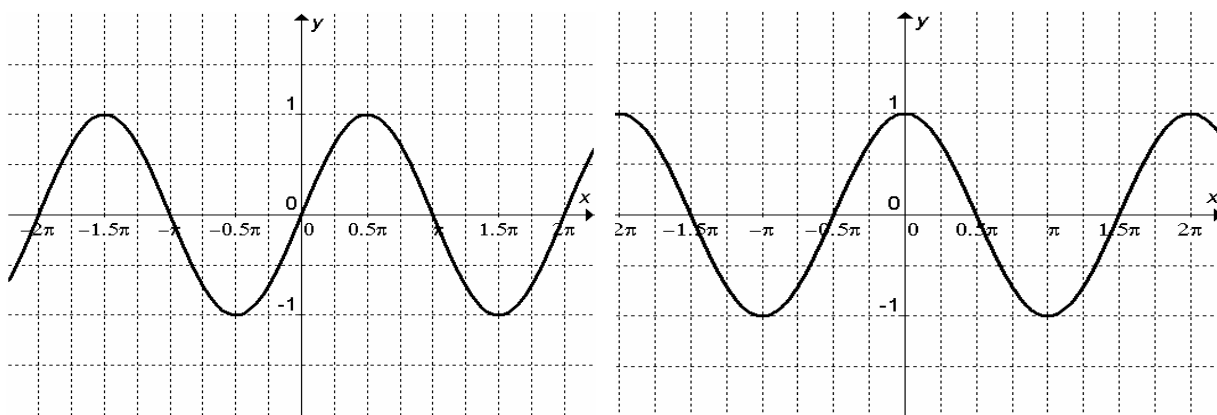
- Analizar las gráficas de las funciones seno y coseno y a partir de ellas, bosquejar la gráfica de su respectiva derivada.
- Identificar en cada caso la derivada respectiva de las funciones seno y coseno.
- Reconocer que las derivadas de las funciones trigonométricas también involucran variación periódica.
- Utilizar las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.
- Utilizar la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x .

Derivada de la función seno.

A continuación te mostramos las gráficas de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

Dibuja la derivada de cada una de ellas y gráficamente comprueba que:

- a) Si $f(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = \cos x$ b) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\sin x$



También para obtener la derivada de la función $f(x) = \sin x$, se puede utilizar la definición de derivada, como sigue:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para hacerlo, además de usar la identidad trigonométrica:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

se necesita que recuerdes los siguientes límites, para lo cual te solicitamos completes las tablas correspondientes y, con ello, compruebes los resultados indicados:

x	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$
0.1				
0.01				
0.001				
0.0001				
0.00001				
0.000001				
0.0000001				
↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	0	1

Teniendo lo anterior, a continuación encontraremos la derivada de la función $\sin(x)$. Sigue cada uno de los pasos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h}$$

factorizando $-\sin x$, del primero y tercer términos obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x(-\cosh + 1) + \sinh \cos x}{h}$$

luego,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x(1 - \cosh)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh \cos x}{h}$$

$$f'(x) = -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = \cos x$$

Resumiendo:

$$\boxed{\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x}$$

De lo anterior y por la regla de la cadena, podemos concluir que si u es una función diferenciable¹, entonces:

$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

¹ Una función es diferenciable en un intervalo dado abierto si $f'(x)$ existe para toda x en ese intervalo.

Ahora estamos en condiciones de derivar funciones que contengan a la función seno.

Ejemplo 1. Encuentra la derivada de $g(x) = -5\text{sen}(-2x)$.

Solución.
$$\frac{d(-5\text{sen}(-2x))}{dx} = -5 \frac{d\text{sen}(-2x)}{dx} = -5\cos(-2x) \frac{d(-2x)}{dx} = 10\cos(-2x).$$

Ejemplo 2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \text{sen } 2x$, cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución. Para determinar la ecuación de la recta tangente, necesitamos su pendiente y el punto de tangencia. Su pendiente la encontraremos al calcular: $f'(\frac{\pi}{2})$, lo cual haremos a continuación:

$$f'(x) = \frac{d\text{sen}(2x)}{dx} = \cos(2x) \frac{d(2x)}{dx} = 2\cos(2x) = 2\cos 2x$$

Habiendo encontrado la fórmula² ($f'(x) = 2\cos 2x$) podemos determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } 2x$ en cada punto de su gráfica, pasamos a encontrar en particular la pendiente de la recta tangente en el punto $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 2\cos(2\frac{\pi}{2}) = 2\cos\pi = 2(-1) = -2$$

La ordenada, $f(\frac{\pi}{2})$, del punto de tangencia es igual a:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(2\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\pi = 0.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } 2x$, en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ es: $y - 0 = -2(x - \frac{\pi}{2})$, o bien

$$2x + y - \pi = 0.$$

Ejemplo 3. Encuentra la derivada de la función $h(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

Solución. Recordando que: $\frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$, obtenemos:

$$h'(x) = \frac{d\sqrt{\text{sen } x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen } x}} \frac{d\text{sen } x}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}.$$

² Cuando no se presta a confusión se acostumbra escribir $\cos 2x$ en lugar de $\cos(2x)$.

Ejemplo 4. Encuentra la derivada de $f(x) = \frac{7}{3}\text{sen}(6x^2)$

Solución. $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{3} \text{sen}(6x^2) \right) = \frac{7}{3} \frac{d}{dx} \text{sen}(6x^2) = \frac{7}{3} \cos(6x^2) \frac{d}{dx} 6x^2 =$
 $f'(x) = \frac{7}{3} \cos(6x^2)(12x) = 28x \cos(6x^2).$

Ejemplo 5. Encuentra la derivada de $s(t) = \text{sen}^3 t$

Solución. $s'(t) = \frac{d}{dt} \text{sen}^3 t = 3\text{sen}^2 t \frac{d}{dt} \text{sen} t = 3\text{sen}^2 t \text{cost}.$

Ejemplo 6. Calcula la derivada de $m(t) = \text{sen} t^3$

Solución. $m'(t) = \frac{d}{dt} \text{sen} t^3 = \text{cost}^3 \frac{d}{dt} t^3 = 3t^2 \text{cost}^3.$

Ejemplo 7. Calcula la derivada de: $k(x) = x^2 \text{sen}(4x^3)$

Solución. $k'(x) = \frac{d}{dx} x^2 \text{sen}(4x^3) = x^2 \frac{d}{dx} \text{sen}(4x^3) + \text{sen}(4x^3) \frac{d}{dx} x^2 =$
 $k'(x) = x^2 \cos(4x^3)(12x^2) + 2x \text{sen}(4x^3) = 12x^4 \cos(4x^3) + 2x \text{sen}(4x^3)$

Resuelve los siguientes ejercicios. Al terminarlos, comprueba tus resultados al final de la guía.

Ejercicios 1

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $v(x) = \frac{\text{sen} x}{x}$

2. $y = \sqrt{2 - 4\text{sen} 3x^4}$

3. $t(x) = -7\text{sen} \frac{1}{x}$

4. $h(t) = \frac{1}{\text{sen}^2 t}$

5. $s(w) = (2w - 1)^3 \sqrt{\text{sen} w}$

6. $f(x) = \text{sen}^2 x^2$

Derivada de la función coseno.

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = \text{cos} x$, hacemos uso de la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

Derivándola de manera implícita obtenemos:

$$\frac{d\text{sen}^2 x}{dx} + \frac{d\text{cos}^2 x}{dx} = \frac{d1}{dx}$$
$$2\text{sen} x \frac{d\text{sen} x}{dx} + 2\text{cos} x \frac{d\text{cos} x}{dx} = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos x \frac{d \cos x}{dx} = 0$$

$$2 \cos x \frac{d \cos x}{dx} = -2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\boxed{\frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x}$$

De lo anterior y usando la regla de la cadena podemos concluir que:

$$\boxed{\frac{d \cos u}{dx} = \frac{d \cos u}{du} \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo 8. Encuentra $g'(x)$, si $g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

Solución. Como es un producto de funciones, entonces:

$$g'(x) = (\operatorname{sen} x) \frac{d(\cos x)}{dx} + \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} (\cos x)$$

$$= (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(\cos x)$$

$$g'(x) = -\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

Ejemplo 9. Calcula $\frac{dy}{dx}$, si $y = m \cos ax^2$, en donde a y $m \in \mathbb{R}$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} m \cos ax^2 = -m \operatorname{sen} ax^2 \frac{dax^2}{dx} = (-m \operatorname{sen} ax^2)(2ax) = -2amx \operatorname{sen} ax^2.$$

Ejemplo 10. Calcula la derivada de: $f(x) = \frac{-5x^2}{\cos 3x}$

Solución. $f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{-5x^2}{\cos 3x} = \frac{(\cos 3x)(-10x) - (-5x^2)(-\operatorname{sen} 3x)(3)}{(\cos 3x)^2} =$

$$f'(x) = \frac{-10x \cos 3x - 15x^2 \operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x}.$$

Ejemplo 11. Encuentra la pendiente de la recta normal a la gráfica de la función

$$f(x) = x \cos x, \text{ en el punto } P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

Solución. Para resolver este ejemplo debes recordar que la recta normal y la tangente tienen la propiedad de que el producto de sus pendientes es -1 . Hecho lo anterior, pasamos a determinar la fórmula de las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$, es decir su derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x \cos x = x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} x = -x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Ahora, determinaremos la pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, o lo

que es lo mismo $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \operatorname{sen} 60^\circ + \cos 60^\circ =$$

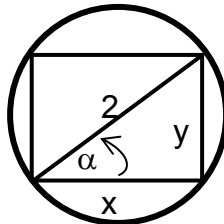
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi \sqrt{3}}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{3 - \pi \sqrt{3}}{6}$$

Una vez encontrada la pendiente de la recta tangente, determinaremos la pendiente de la recta normal (m_N) a partir del hecho de que su producto con la recta tangente es -1 :

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) m_N = -1$$

$$m_N = \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{3 - \pi \sqrt{3}}{6}} = -\frac{6}{3 - \pi \sqrt{3}}$$

Ejemplo 12. Encuentra las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en un círculo de radio 1.



Solución. Como se nos pide el rectángulo inscrito de mayor área, debemos encontrar una fórmula del área de ese rectángulo y aplicarle tus conocimientos de cálculo diferencial para determinar sus lados.

Sean x , y los lados del rectángulo inscrito en el círculo y α el ángulo comprendido entre una de sus diagonales y el lado x , como se muestra en la figura.

El área del rectángulo es $A = xy$. Así escrita la función A depende de dos variables, por lo que debemos encontrar una relación entre ellas que nos permita describir a la función A en términos de sólo una variable.

Del triángulo formado por los dos lados del triángulo y la diagonal, tenemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{2}, \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{2}, \quad \text{en donde } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto

$$y = 2 \operatorname{sen} \alpha, \quad x = 2 \operatorname{cos} \alpha,$$

Así pues,

$$A = xy = (2 \operatorname{sen} \alpha)(2 \operatorname{cos} \alpha) = 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha.$$

Con lo anterior hemos logrado que la función A dependa de una variable

$$A(\alpha) = 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

Al derivarla obtenemos:

$$A'(\alpha) = 4(\operatorname{sen} \alpha(-\operatorname{sen} \alpha) + \operatorname{cos} \alpha(\operatorname{cos} \alpha))$$

$$A'(\alpha) = 4(\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

Determinemos los números críticos igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación resultante:

$$A'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0,$$

de donde

$$\operatorname{cos}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Como α es un ángulo agudo, entonces $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{cos} \alpha$ son positivos, por lo que

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha,$$

lo cual ocurre cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $A'(\alpha)$ es igual a cero, para saber si con este valor, el área es máxima o mínima, calculemos la segunda derivada: y determinemos el signo de $A''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$A''(\alpha) = 4(-2 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)$$

$$A''(\alpha) = -16 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16 \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -8 < 0$$

Por lo anterior, el área tiene un máximo cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Los valores de los lados del rectángulo inscrito en un círculo de radio 1 son:

$$x = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

es decir, se trata de un cuadrado de área:

$$A = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.$$

Ejercicios 2

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $y = \cos 4x$

2. $h(t) = \frac{\text{sent}}{3 + 2\text{cost}}$

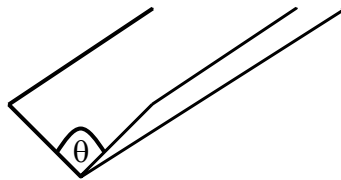
3. $j(x) = \frac{x}{\cos x}$

4. $k(w) = \sqrt[5]{-4 \cos 2w}$

5. $m(x) = \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\cos^3 x}$

6. $p(t) = -\frac{4\pi}{3} \text{cost} \sqrt{\text{sent}}$

7. La sección transversal de un canal de agua tiene forma de triángulo isósceles. Si los lados iguales miden 20 cm. Encuentra la medida del ángulo comprendido entre los lados iguales, que de la máxima capacidad de agua que puede contener la canal.



Derivada de otras funciones trigonométricas

La derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, las puedes obtener a partir de expresarlas en términos de seno o coseno, recuerda que:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Ejemplo 13. Encuentra $\frac{d \tan x}{dx}$

Solución.

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x (\cos x) - \text{sen } x (-\text{sen } x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Usando la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y que $\sec x = 1 / \cos x$, obtenemos

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

En resumen:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

De lo anterior y por la regla de la cadena, concluimos que si u es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{d \tan u}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 14. Calcula la derivada de la función $y = \tan \sqrt{1-x^3}$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan \sqrt{1-x^3} = \sec^2 \sqrt{1-x^3} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^3} = \sec^2 \sqrt{1-x^3} \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 \sec^2 \sqrt{1-x^3}}{2\sqrt{1-x^3}}$$

Ejercicios 3

1. Demuestra que: $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

2. Demuestra que: $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

3. Demuestra que: $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

4. Si u es una función diferenciable, usando la regla de la cadena y los resultados de los tres ejercicios anteriores, encuentra las fórmulas para:

a) $\frac{d}{dx}(\cot u)$

b) $\frac{d}{dx}(\sec u)$

c) $\frac{d}{dx}(\csc u)$

5. Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{\sec x}$

b) $g(x) = \cos(5x^2 + 2)^3$

c) $h(x) = \cos x^2 - \cos^2 x$

d) $m(t) = \tan 4t^2$

6. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva de la gráfica de la función

$$y = -3 \tan x \text{ cuando } x = \frac{\pi}{4}.$$

Sección 2. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.

Los aprendizajes que debes obtener al terminar de estudiar esta sección son:

- Analizar las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial y a partir de ellas bosqueja las gráficas de sus derivadas.
- Identificar en cada caso la derivada respectiva de las funciones logarítmica y exponencial.
- Utilizar la regla de la cadena para derivar funciones logarítmica y exponencial cuyo argumento es función de x .
- Aplicar las derivadas de funciones logarítmica y exponencial a problemas diversos.

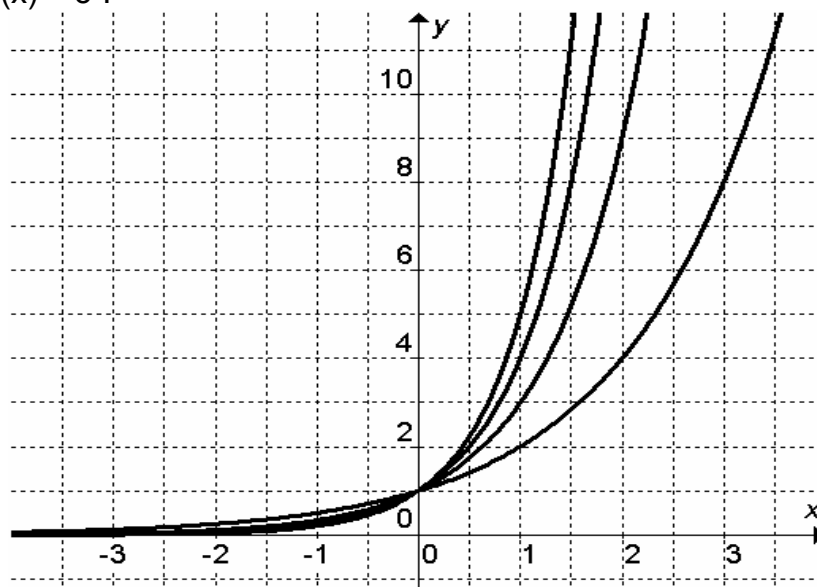
Definición. Una función exponencial es una función que tiene la forma:

$$f(x) = b^x,$$

en donde la base b es una constante positiva, $x \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es positiva.

A continuación trabajaremos con ejemplos de funciones exponenciales.

A continuación te presentamos las gráficas de las funciones: $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ y $f(x) = 5^x$.



¿Cuál es la gráfica de cada función? Para contestar la pregunta debemos de considerar el comportamiento que tiene cada una de las funciones con respecto de las otras. Es claro que todas las funciones exponenciales deben pasar por el punto (0,1), ¿por qué?

¿Cuál es la función que crece más rápidamente? La función $f(x) = 5^x$, debido a que conforme x va aumentando sus valores van siendo mayores que los de las otras tres funciones. Así pues, la gráfica de la función que para valores mayores que cero está por encima del resto es la de $f(x) = 5^x$. La gráfica que está más abajo es la de $f(x) = 4^x$, luego $f(x) = 3^x$ y finalmente la de $f(x) = 2^x$. Observa que no ocurre lo mismo cuando x es negativa, a la izquierda del cero, la situación es diferente. Lo anterior ocurre porque, por ejemplo, cuando $x = -2$, las funciones: $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ y $f(x) = 5^x$, tomarán los siguientes valores:

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25, \quad f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.\bar{1}^3, \quad f(-2) = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0.0625,$$

$$f(-2) = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0.04, \text{ respectivamente.}$$

Para valores menores que cero, conforme x va disminuyendo, las funciones exponenciales cuya base es de un valor mayor, disminuyen más rápidamente con respecto a las que tienen una base menor.

³ Debe recordarse que así como $0.\bar{3}$ significa 0.3333333... (infinidad de números tres), $0.\bar{1}$ se debe entender como 0.1111111... (infinidad de números unos)

Te aconsejamos que recuerdes las siguientes leyes de los exponentes:

■ $a^n a^m = a^{n+m}$	■ $(a^n)^m = a^{nm}$	■ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
■ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$	■ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$	■ $a^0 = 1, a \neq 0.$

La función $y = e^x$.

Bien lo dicen Kasner y Newman ⁴“Un universo donde faltaran π y e (...) no sería inconcebible. Difícilmente uno podría imaginarse que el Sol dejaría de salir o que las mareas cesaran por la falta de π y e . Pero sin estos artificios matemáticos, lo que sabemos del Sol y las mareas, e incluso nuestra capacidad para describir todos los fenómenos naturales, físicos, biológicos, químicos o estadísticos, quedarían reducidos a dimensiones primitivas.”

De las funciones exponenciales la más importante, sin duda, se da cuando $b = e$. El número e se ha encontrado como una constante que aparece en la naturaleza en diversos problemas de crecimiento exponencial. A dicho número se le asignó la letra e en honor al matemático Leonardo Euler, quien calculó el número con 23 decimales correctos (en una época en la que, obviamente, no existían las calculadoras) obteniendo el siguiente resultado:

$$e = 2.71828182845904523536028\dots$$

El número e se encuentra cuando se determina el siguiente límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Con el fin de que encuentres una aproximación del número e , realiza la siguiente tabulación.

n	$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
1	_____
10	_____
10^2	_____
10^3	_____
10^4	_____
10^5	_____
10^6	_____
10^7	_____
10^8	_____
10^9	_____

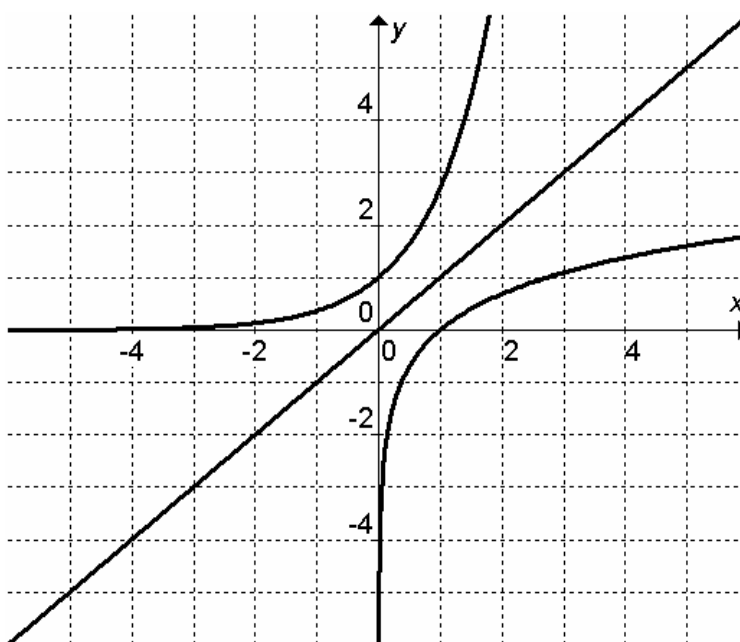
⁴ Kasner y Newman, Matemáticas e Imaginación. Ed. CECSA, México 1972.

La función logaritmo como inversa de la exponencial.

Ahora trazaremos una gráfica simétrica a la función $f(x) = e^x$ con respecto a la recta $y = x$. Para hacerlo utilizaremos las gráficas de $f(x) = x$, y de $f(x) = e^x$, así como la tabulación de esta última:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = e^x$	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^1}$	1	e	e^2	e^3

El punto simétrico al punto $(0,1)$ es el punto $(1,0)$; el de $(1,e)$ es $(e,1)$; el de $(-1,1/e)$ es $(1/e,-1)$; el de $(-2,1/e^2)$ es $(1/e^2,-2)$; y el de $(-3,1/e^3)$ es $(1/e^3,-3)$. ¿Cuál es el punto simétrico de $(3,e^3)$?



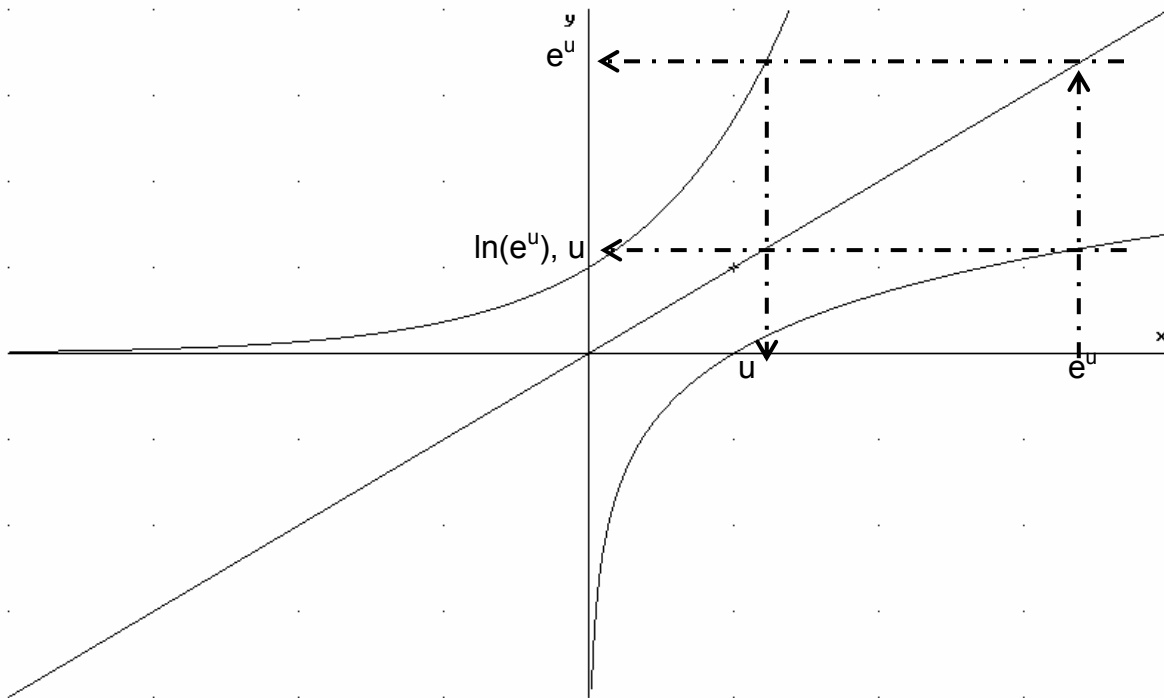
Basándonos en los puntos que hemos encontrado hemos trazado la gráfica. La función correspondiente a la gráfica encontrada es $f(x) = \ln(x)$.

De la gráfica de $\ln(x)$ podemos determinar lo siguiente:

- 1) $\ln(1) = 0$.
- 2) El dominio de $\ln(x)$ es \mathbb{R}^+ y su rango \mathbb{R} .
- 3) $\ln(e) = 1$.
- 4) $e^{\ln(1)} = 1$

En la gráfica que se presenta a continuación hemos colocado inicialmente el valor de e^u , luego se ha encontrado el valor de $\ln(e^u)$, utilizando la gráfica de logaritmo natural. También, utilizando la gráfica de $y = x$, hemos encontrado ese mismo valor sobre el eje Y. De la gráfica de e^x hemos proyectado el valor de u , porque dicho valor tomado a partir del eje X sobre la gráfica de e^x nos proporciona e^u sobre el eje Y. La propiedad mostrada en la gráfica se puede sintetizar como sigue:

5) $\ln e^u = u$



Otra propiedad, que te dejamos como ejercicio de tarea para mostrarla gráficamente, es:

6) $e^{\ln u} = u$.

Cuando trabajamos con una función f , denotamos por $f(2)$ al valor que la función le asigna al número 2. Si alguna persona escribe en lugar de $f(2)$ $f2$, consideramos incorrecta dicha escritura. Por lo anterior es importante aclarar en el caso de las funciones logarítmicas, al igual que en las trigonométricas, es válido escribir $\ln(2)$ o bien $\ln 2$. Nosotros a lo largo del texto las utilizaremos indistintamente. También es necesario recordar que $(\ln x)^p$ se puede escribir como $\ln^p x$, pero no como $\ln x^p$.

Es importante recordar que otra forma, muy práctica y que fue lo que motivo su uso, es que si

$$2^3 = 8,$$

entonces podemos afirmar que

$$\log_2 8 = 3.$$

En general, si

$$b^n = x,$$

entonces

$$\log_b x = n,$$

en donde $b > 0$ y $b \neq 1$. Claro que cuando $b = e$, $\log_e x = \ln x$.

Con base en lo anterior no es difícil comprender las siguientes propiedades de los logaritmos:

- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^n = n \log_b x$

Ejercicios 4

1. Dibuja las gráficas de e^x y de $\ln x$ y en ellas muestra que $e^{\ln u} = u$.
Con base en el comportamiento de sus gráficas contesta las siguientes preguntas:
2. ¿La función $\ln x$ es creciente o decreciente?
3. ¿Qué concavidad tiene la función $\ln x$?
4. ¿ $\ln x$ tiene puntos de inflexión?

La derivada de las funciones exponenciales $y = e^x$, $y = e^u$

Para determinar la derivada de las funciones exponenciales iniciamos encontrando la de la función $f(x) = e^x$, procederemos utilizando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Ahora bien, como $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, y e^x no varía conforme h tiende a cero, podemos escribir

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Sólo nos falta determinar el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$, para lo cual hacemos lo siguiente: Primero

al resultado de $e^h - 1$ le llamamos k , esto es: $e^h - 1 = k$, de donde $e^h = 1 + k$. De lo anterior $\ln(e^h) = \ln(1 + k)$, por lo que considerando las propiedades de los logaritmos obtenemos que $h = \ln(1 + k)$. Además, si $h \rightarrow 0$, $k = e^h - 1 \rightarrow 0$ (¿por qué). Considerando lo anterior y una propiedad de los logaritmos ($n \ln x = \ln x^n$), sustituimos en nuestro límite para obtener:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\ln(1+k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \ln(1+k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+k)^{\frac{1}{k}}}$$

Asignémosle el valor $1/k$ a n , esto es $n = 1/k$, por lo que $k = 1/n$. Observemos que cuando $k \rightarrow 0$, $n = 1/k \rightarrow \infty$, recordemos que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y utilicemos las propiedades de los límites para obtener lo siguiente:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+k)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow 0} \left[\ln(1+k)^{\frac{1}{k}} \right]} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Este resultado nos permite concluir que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

Este resultado es inesperado. Significa que la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = e^x$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es $m = e^{x_0}$. ¡Su primera derivada, segunda, ..., n-ésima sigue siendo la misma función!

Ejemplo 15. Determina de la función $f(x) = e^x$

- Su concavidad.
- Sus máximos y mínimos.
- Sus puntos de inflexión.
- Si es creciente o decreciente.

Solución.

- Como $f''(x) = e^x$ siempre es mayor que cero, es cóncava hacia arriba.
- Como $f'(x) > 0$, para toda x , y $f'(x)$ está definida para toda x real, $f(x)$ no tiene números críticos, en consecuencia no tiene valores extremos, es decir, no tiene máximos ni mínimos.
- Lo mismo pasa para $f''(x)$, como $f''(x) \neq 0$ para todo x , $f(x) = e^x$ no tiene puntos de inflexión.
- Finalmente, como $f'(x) = e^x$ es mayor que cero para toda x , f es estrictamente creciente.

Ahora, utilizando la regla de la cadena encontraremos la derivada de e^u :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}}$$

A continuación aplicaremos estas fórmulas en varios ejemplos. □

Ejemplo 16. Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones:

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = 4e^x$ | b) $f(x) = e^{5x}$ | c) $f(x) = e^{-2x}$ |
| d) $f(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$ | e) $f(x) = 3e^{\sqrt{x}}$ | f) $f(x) = \sqrt{5}e^{3x^2-5x+2}$ |
| g) $f(x) = e^{\sqrt{2x+4}}$ | h) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$ | i) $f(x) = e^{x^2\sqrt{3x-1}}$ |

Solución. Para resolver las derivadas es necesario que recuerdes las siguientes fórmulas de derivación:

$$\bullet \frac{d}{dx} ax^n = a \frac{d}{dx} x^n = anx^{n-1}.$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}.$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$\bullet \frac{d}{dx} uv = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u.$$

$$\text{a) } \frac{d}{dx} 4e^x = 4 \frac{d}{dx} e^x = 4e^x.$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} e^{5x} = e^{5x} \frac{d}{dx} 5x = e^{5x} 5 = 5e^{5x}.$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} e^{-2x} = e^{-2x} \frac{d}{dx} (-2x) = e^{-2x} (-2) = -2e^{-2x}.$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} 2e^{\frac{1}{x}} = 2 \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} = 2e^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = 2e^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx} x^{-1} = 2e^{\frac{1}{x}} (-1x^{-2}) = -\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

$$\text{e) } \frac{d}{dx} 3e^{\sqrt{x}} = 3 \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}} = 3e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \sqrt{x} = 3e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{f) } \frac{d}{dx} \sqrt{5} e^{-3x^2-5x+2} = \sqrt{5} \frac{d}{dx} e^{-3x^2-5x+2} = \sqrt{5} e^{-3x^2-5x+2} \frac{d}{dx} (-3x^2-5x+2) = \\ = \sqrt{5} e^{-3x^2-5x+2} (-6x-5) = -(6x+5)\sqrt{5} e^{-3x^2-5x+2}.$$

$$\text{g) } \frac{d}{dx} e^{\sqrt{2x+4}} = e^{\sqrt{2x+4}} \frac{d}{dx} \sqrt{2x+4} = e^{\sqrt{2x+4}} \frac{d}{dx} (2x+4) = e^{\sqrt{2x+4}} \frac{2}{2\sqrt{2x+4}} = e^{\sqrt{2x+4}} \frac{1}{\sqrt{2x+4}}.$$

$$\text{h) } \frac{d}{dx} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{(1-x) \frac{d}{dx} (1+x) - (1+x) \frac{d}{dx} (1-x)}{(1-x)^2} = \\ = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{(1-x) - (-1-x)}{(1-x)^2} = \\ = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2}.$$

$$\text{i) } \frac{d}{dx} e^{x^2\sqrt{3x-1}} = e^{x^2\sqrt{3x-1}} \frac{d}{dx} x^2\sqrt{3x-1} = e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(x^2 \frac{d}{dx} \sqrt{3x-1} + \sqrt{3x-1} \frac{d}{dx} x^2 \right) = \\ = e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(x^2 \frac{\frac{d}{dx} (3x-1)}{2\sqrt{3x-1}} + \sqrt{3x-1} (2x) \right) = e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{3x-1}} + 2x\sqrt{3x-1} \right) =$$

$$= e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{3x-1}} + \frac{2x\sqrt{3x-1}(2\sqrt{3x-1})}{2\sqrt{3x-1}} \right) = e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(\frac{3x^2 + 4x(3x-1)}{2\sqrt{3x-1}} \right) =$$

$$= e^{x^2\sqrt{3x-1}} \left(\frac{3x^2 + 12x^2 - 4x}{2\sqrt{3x-1}} \right) = \frac{(15x^2 - 4x)e^{x^2\sqrt{3x-1}}}{2\sqrt{3x-1}} \quad \square$$

Ejercicios 5

Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3e^{3x}$.

2. $f(x) = e^{-5x}$.

3. $f(x) = e^{-3/x}$

4. $f(x) = 2e^{\frac{\sqrt{3}}{x}}$

5. $f(x) = 3e^{\sqrt{3-x^2}}$

6. $f(x) = e^{4x^2-3x+5}$

7. $f(x) = e^{\sqrt{3x-4}}$

8. $f(x) = e^{2-x}$

9. $f(x) = e^{x^2\sqrt{3x-1}}$

Las derivadas de $y = \ln x$, $y = \ln u$, $y = \log_b u$,

Determinemos la derivada de $f(x) = e^{\ln x}$:

$$\frac{d}{dx} e^{\ln x} = e^{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x$$

Ahora, como $x = e^{\ln x}$, tenemos que

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^{\ln x} = e^{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x$$

$$1 = e^{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x = x \frac{d}{dx} \ln x$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

Si utilizamos la regla de la cadena podemos encontrar la derivada de $\ln u$ como sigue:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{du} \ln u \frac{d}{dx} u = \frac{1}{u} \frac{d}{dx} u}$$

Ejemplo 17. Determina las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $f(x) = \ln^2 x^3$

c) $f(x) = \ln(4x^2 - 3x + 5)$

d) $f(x) = x^2 \ln x$

e) $f(x) = 3e^{4x} \ln x$

f) $f(x) = \frac{3 \ln 4x}{e^x}$

g) $f(x) = (\ln x^3)^5$

h) $f(x) = \ln \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$

i) $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 - 5x + 4}$

Soluciones.

a) $\frac{d}{dx} \ln x^2 = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^2 = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$,

o bien utilizando propiedades de la función logaritmo;

$$\frac{d}{dx} \ln x^2 = \frac{d}{dx} 2 \ln x = 2 \frac{d}{dx} \ln x = 2 \frac{1}{x} = \frac{2}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{d}{dx} \ln^2 x^3 &= 2 \ln x^3 \frac{d}{dx} \ln x^3 = 2 \ln x^3 \frac{1}{x^3} \frac{d}{dx} x^3 = (2 \ln x^3) \frac{1}{x^3} (3x^2) = \\ &= \frac{6x^2 \ln x^3}{x^3} = \frac{6 \ln x^3}{x} = \frac{18 \ln x}{x}. \end{aligned}$$

O bien,

$$\frac{d}{dx} \ln^2 x^3 = 2 \ln x^3 \frac{d}{dx} \ln x^3 = 6 \ln x \frac{d}{dx} 3 \ln x = 6 \ln x (3 \frac{d}{dx} \ln x) = (18 \ln x) \frac{1}{x} = \frac{18 \ln x}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{d}{dx} \ln(4x^2 - 3x + 5) &= \frac{1}{4x^2 - 3x + 5} \frac{d}{dx} (4x^2 - 3x + 5) = \\ &= \frac{1}{4x^2 - 3x + 5} (8x - 3) = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x + 5}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} x^2 \ln x = x^2 \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} x^2 = x^2 \frac{1}{x} + \ln x (2x) = x + 2x \ln x = x(1 + 2 \ln x).$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{d}{dx} 3e^{4x} \ln x &= 3e^{4x} \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} 3e^{4x} = 3e^{4x} \frac{1}{x} + \ln x (3e^{4x} \frac{d}{dx} 4x) = \\ &= \frac{3e^{4x}}{x} + \ln x (12e^{4x}) = \frac{3e^{4x}}{x} + 12e^{4x} \ln x = 3e^{4x} \left(\frac{1}{x} + 4 \ln x \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{d}{dx} \frac{3 \ln 4x}{e^x} &= 3 \frac{d}{dx} \frac{\ln 4x}{e^x} = 3 \frac{e^x \frac{d}{dx} \ln 4x - \ln 4x \frac{d}{dx} e^x}{(e^x)^2} = 3 \frac{e^x \frac{4}{x} - (\ln 4x) e^x}{e^{2x}} = \\ &= 3 \frac{4e^x - e^x \ln 4x}{e^{2x}} = 3 \frac{4e^x - xe^x \ln 4x}{e^{2x}} = 3 \frac{4e^x - xe^x \ln 4x}{e^{2x}} = \\ &= 3 \frac{4e^x - xe^x \ln 4x}{xe^{2x}} = 3 \frac{e^x (4 - x \ln 4x)}{xe^{2x}} = \frac{3(4 - x \ln 4x)}{xe^x}. \end{aligned}$$

$$\text{g) } \frac{d}{dx} (\ln x^3)^5 = 5(\ln x^3)^4 \frac{d}{dx} \ln x^3 = 5(\ln x^3)^4 \frac{d}{dx} 3 \ln x = 5(3 \ln x)^4 \frac{3}{x} = \frac{405}{x} \ln^4 x.$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right) &= \frac{d}{dx} (\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)) = \frac{d}{dx} \ln(1+x^2) - \frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \\ &= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \\ &= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4x}{1-x^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{d}{dx} \ln \sqrt{3x^2 - 5x + 4} &= \frac{d}{dx} \ln (3x^2 - 5x + 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln (3x^2 - 5x + 4) = \\ &= \frac{1}{2(3x^2 - 5x + 4)} \frac{d}{dx} (3x^2 - 5x + 4) = \frac{6x - 5}{2(3x^2 - 5x + 4)} \quad \square \end{aligned}$$

A continuación vamos a encontrar la derivada de la función $f(x) = b^x$, y luego la de b^u . Para hacerlo, utilizaremos la derivada de la función $\ln b^x$:

$$\frac{d}{dx} \ln b^x = \frac{1}{b^x} \frac{d}{dx} b^x.$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dx} \ln b^x = \frac{d}{dx} x \ln b = \ln b \frac{d}{dx} x = \ln b,$$

y como b es una constante, también lo es $\ln b$.

Así pues,

$$\frac{d}{dx} \ln b^x = \frac{1}{b^x} \frac{d}{dx} b^x = \ln b,$$

de donde

$$\boxed{\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b}$$

Podemos generalizar la fórmula anterior, derivando la función b^u , utilizando la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{d}{dx} b^u = \frac{d}{du} b^u \frac{d}{dx} u = b^u \ln b \frac{d}{dx} u.}$$

Para determinar la derivada de $f(x) = \log_b x$, hacemos uso de la derivada de b^x y de que $b^{\log_b x} = x$ como sigue. Tomando en cuenta que

$$\frac{d}{dx} b^{\log_b x} = \frac{d}{dx} x = 1,$$

y que

$$\frac{d}{dx} b^{\log_b x} = b^{\log_b x} \ln b \frac{d}{dx} \log_b x = x \ln b \frac{d}{dx} \log_b x,$$

llegamos a

$$1 = x \ln b \frac{d}{dx} \log_b x,$$

de donde

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x \ln b}.}$$

Utilizando la regla de la cadena, se puede llegar a la siguiente derivada:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_b u = \frac{1}{u \ln b} \frac{d}{dx} u}$$

Uno de los ejercicios que te dejamos es encontrar la fórmula anterior.

Ejemplo 18. Determina las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 4^{2x-3}$

c) $f(x) = 7^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \log_2 x$

e) $f(x) = \log_3(2x^3 - 3)$

f) $f(x) = \log_5 \sqrt{x}$

Solución.

a) $\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \ln 2.$

b) $\frac{d}{dx} 4^{2x-3} = 4^{2x-3} \ln 4 \frac{d}{dx} (2x-3) = (2 \ln 4) 4^{2x-3} = (\ln 16) 4^{2x-3}.$

c) $\frac{d}{dx} 7^{\sqrt{x}} = 7^{\sqrt{x}} \ln 7 \frac{d}{dx} \sqrt{x} = 7^{\sqrt{x}} \ln 7 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{7^{\sqrt{x}} \ln 7}{2\sqrt{x}}.$

d) $\frac{d}{dx} \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}.$

e) $\frac{d}{dx} \log_3(2x^3 - 3) = \frac{1}{(2x^3 - 3) \ln 3} \frac{d}{dx} (2x^3 - 3) = \frac{6x}{(2x^3 - 3) \ln 3}.$

f) $\frac{d}{dx} \log_5 \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x} \ln 5} \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x} \ln 5} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x \ln 5},$ o bien

$\frac{d}{dx} \log_5 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log_5 x = \frac{1}{2} \frac{1}{x \ln 5} = \frac{1}{2x \ln 5} \square$

Ejercicios 6

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x^3$

b) $f(x) = \ln^3 x^2$

c) $f(x) = \ln(3x^2 - 2x - 4)$

d) $f(x) = 4x^3 \ln x$

e) $f(x) = 2e^{-4x} \ln x$

f) $f(x) = \frac{2 \ln 3x}{e^x}$

g) $f(x) = (\ln x^2)^4$

h) $f(x) = \ln \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$

i) $f(x) = \ln \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}$

j) $f(x) = 5^x$

k) $f(x) = 6^{3x-4}$

l) $f(x) = 9^{\sqrt{5x}}$

m) $f(x) = \log_{10} x$

n) $f(x) = \log_4(2x^3 - 3x)$

o) $f(x) = \log_5 \sqrt{x^3}$

2. Utilizando la regla de la cadena demuestra que si $\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x \ln b}$, entonces

$$\frac{d}{dx} \log_b u = \frac{1}{u \ln b} \frac{d}{dx} u$$

3. Encuentra la derivada de la función $f(x) = x^x$, en donde $x > 0$.

4. Encuentra la derivada de u^x .

Derivación logarítmica y sus aplicaciones.

Existen funciones en las que para derivarlas podemos apoyarnos en las propiedades de las funciones logarítmicas. A continuación te presentamos ejemplos de esto.

Ejemplo 19. Determina la derivada de la función $f(x) = x^{4x}$, con $x > 0$.

Solución.

Para determinar la derivada de $y = x^{4x}$, le aplicamos la función logaritmo a ambos lados de la igualdad

$$\ln y = \ln x^{4x},$$

luego aplicamos una de las propiedades de los logaritmos (¿cuál?) y a continuación derivamos

$$\ln y = 4x \ln x,$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = 4 \frac{d}{dx} x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dx} y = 4 \left(x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \right)$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dx} y = 4 \left(x \left(\frac{1}{x} \right) \frac{d}{dx} x + \ln x \right)$$

$$\frac{d}{dx} y = 4y(1 + \ln x)$$

$$\frac{d}{dx} y = 4x^{4x}(1 + \ln x) \square$$

Ejemplo 20. Encuentra la derivada de la función $y = (x+4)^{\ln x}$.

Solución.

Aplicamos la función logaritmo, sus propiedades y derivamos.

$$\ln y = \ln(x+4)^{\ln x}$$

$$\ln y = (\ln x) \ln(x+4)$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (\ln x) \ln(x+4)$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dx} y = \ln x \frac{d}{dx} \ln(x+4) + \ln(x+4) \frac{d}{dx} \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dx} y = (\ln x) \frac{1}{x+4} \frac{d}{dx} (x+4) + \ln(x+4) \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dx} y = (\ln x) \frac{1}{x+4} + \ln(x+4) \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} y = y \left(\frac{1}{x+4} \ln x + \frac{1}{x} \ln(x+4) \right)$$

$$\frac{d}{dx} y = \ln(x+4)^{\ln x} \left(\frac{1}{x+4} \ln x + \frac{1}{x} \ln(x+4) \right) \square$$

Ejercicios 7

Utilizando la derivación logarítmica y suponiendo que $x > 0$, encuentra la derivada de:

1. $y = x^{e^x}$

2. $y = x^{\sqrt{x}}$.
3. $y = x^{1/x}$.
4. $y = x^{1/\ln x}$.
5. $y = x^u$.

Bibliografía

1. Allan B. Cruse y Millianne Lehman. "Lecciones de Cálculo 1". Fondo de Cultura Educativo Iberoamericano, México 1987. Lección 16.
2. James Stewart. "Cálculo. Conceptos y Contextos". Thomson, México, 1999. Secciones 1.5, 1.6, 3.1, 3.4 y 3.7.
3. Larry Goldstein, *et al.* "Cálculo y sus aplicaciones". Prentice Hall Hispanoamericana. México 1990. Capítulos 4 y 8.
4. Larson Hostetler Edwards. "Cálculo". McGraw – Hill, México, 1999. Secciones 3.4, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1 y 6.2.