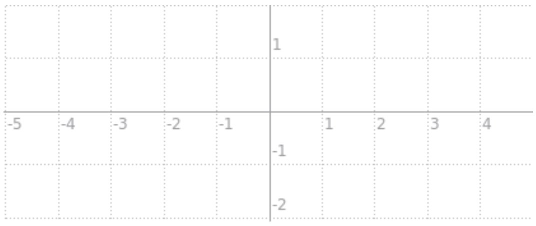
LA RECTA REAL

TEORÍA

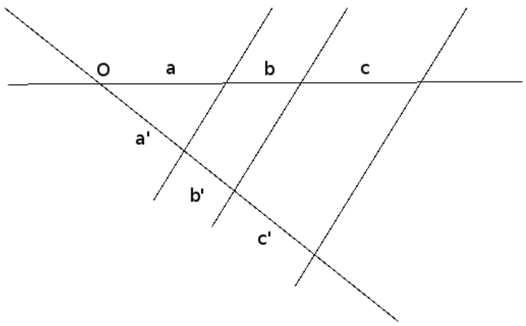
La recta real es una representación de los números reales



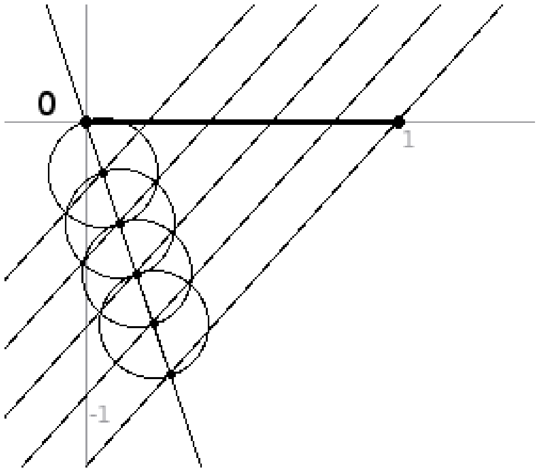
En ella vamos a poder representar todos los números racionales y todas las raíces cuadradas.

Teorema de Tales: Si dos rectas r y r' que se cortan en un punto O, son atravesadas por rectas paralelas s, s' y s'' entonces se cumple que:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

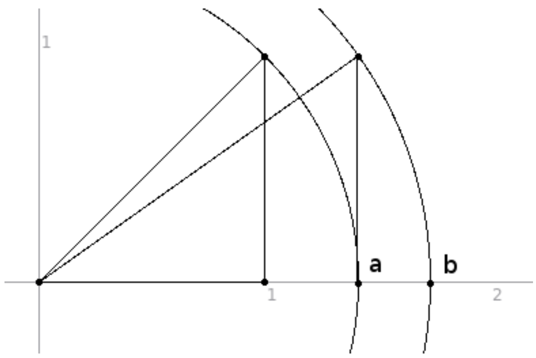


División de un segmento en n partes iguales: Para ello usaremos el teorema de Tales de la siguiente manera: Trazamos una recta auxiliar que corte a la recta real en 0 y hacemos n marcas (por ejemplo con un compás) iguales. A continuación trazamos una recta de la última marca al otro extremo del intervalo, y paralelas a dicha recta por todas las divisiones anteriores. Cada uno de los segmentos que se determinan sobre el primero es una n-ésima parte del anterior. En la siguiente imagen se resume todo. Cada una de las divisiones del segmento $[0, 1]$ es $1/5$.



Representación de $\sqrt{n}$: Usaremos el teorema de Pitágoras. Sabemos que un triángulo de catetos b y b tiene hipotenusa de longitug $\sqrt{b^2 + c^2}$. Si elegimos convenientemente b y c podremos representar cualquier número de la forma $\sqrt{n}$

Así, en la siguiente imagen el punto a representa $\sqrt{2}$ y el punto b, $\sqrt{3}$ (fíjate en cuánto miden los catetos en cada caso)



Por último comentar un teorema que nos servirá para saber cuándo podemos construir una raíz usando números enteros (como en el caso de $\sqrt{2}$) y cuándo alguno de los catetos tiene que ser una raíz (como en el caso de $\sqrt{3}$)

Teorema: Un número a, primo, se puede poner como suma de dos cuadrados de enteros sólo si $a = 2$ o deja resto 1 al ser dividido entre 4.

Ejercicio 1 *Construye los siguientes números reales:*

a) $\frac{3}{7}$ *b)* $-\frac{4}{5}$ *c)* $\sqrt{5}$ *d)* $-\sqrt{11}$ *e)* $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

VALOR ABSOLUTO, DISTANCIAS, INTERVALOS Y ENTORNOS

TEORÍA

Valor absoluto: La definición es muy simple:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{Si } a \geq 0 \\ -a & \text{Si } a < 0 \end{cases}$$

Distancias: La distancia entre dos números reales a y b es $dist(a,b) = |a-b|$

Intervalos: Un intervalo de extremos a y b ($a < b$) es el conjunto de todos los números reales que estén entre a y b. Dependiendo de si consideramos que a y/o b pertenecen al intervalo, este será abierto o cerrado. Podemos poner las siguientes definiciones:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x < b\} \text{ (intervalo abierto)}$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a \leq x \leq b\} \text{ (intervalo cerrado)}$$

Por supuesto existen mixtos también:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a \leq x < b\}$$

Intervalos impropios: Denotan intervalos que no están limitados por algún extremo:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x\}$$

También ahora se pueden dar todas las posibilidades.

Operaciones con intervalos: Podemos considerar las siguientes operaciones:

Unión: En general la unión de dos conjuntos es un conjunto que contiene todos los elementos que estuvieran en alguno de los dos.

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección: En general la intersección de dos conjuntos es un conjunto que contiene todos los elementos que estuvieran los dos.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

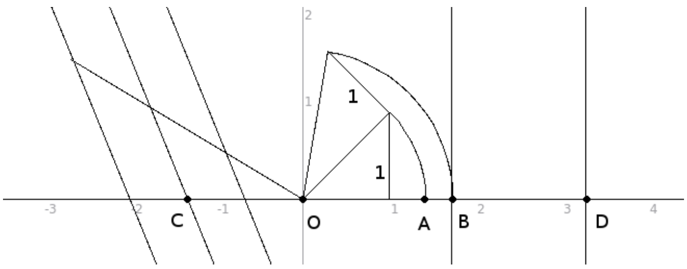
Resta: En general la resta de dos conjuntos es un conjunto que contiene todos los elementos que estuvieran en el primero pero que no están en el segundo.

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

Entornos: Definimos el entorno del punto a de radio r de la siguiente forma:

$$E_r(a) = (a-r, a+r)$$

Ejercicio 2 *Halla los números que representan las abcisas de A, B, C y D en la siguiente figura, sabiendo que $\overline{OA} = \overline{BD}$*



Ejercicio 3 *Escribe los siguientes intervalos en forma de conjunto:*

a) $[-2, 3)$ *c)* $(4/3, +\infty)$

b) $(-\infty, -1]$ *d)* $(\pi, 3\sqrt{2}]$

Ejercicio 4 *Escribe los siguientes conjuntos como intervalos o unión de intervalos :*

a) $(-3,4) \setminus \{-1\}$ *e)* $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 7\}$

b) $(-\infty, \pi] \setminus (-4,-2)$ *f)* $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 5\}$

c) $[1, +\infty) \cap (-5, 6]$ *g)* $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 6\}$

d) $(-5, 10] \cup [3, 11)$ *h)* $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| \geq 1\}$

Ejercicio 5 *Escribe mediente intervalos los x para los cuáles podemos calcular las siguientes raíces:*

a) $\sqrt{x-4}$ *c)* $\sqrt[3]{2x+1}$ *e)* $\sqrt{-x}$

b) $\sqrt[4]{3-2x}$ *d)* $\sqrt{-x-1}$ *f)* $\sqrt{a + \dfrac{x}{2}}$

Ejercicio 6 *Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:*

a) $E_2(-1)$ *b)* $E_{2,01}(2,5)$ *c)* $E_{1/3}(2)$