NÚMEROS COMPLEJOS

1. ¿Qué es un número complejo? Definiciones.

- La ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución en el campo real, puesto que si intentamos resolverla tendremos que $x=\pm\sqrt{-1}$ y sabemos que no podemos calcular raíces de números negativos en **R**. Para resolver este problema introduciremos el valor $i=\sqrt{-1}$, que llamaremos unidad imaginaria.

- Las expresiones del tipo $a+bi$, siendo a y b números reales, reciben el nombre de números complejos. (Por ejemplo, $2i$, $3+4i$, $\frac{2}{3}-i$,...).

- Todo número complejo es de la forma $a+bi$. Se dice que el número complejo está escrito en forma binómica.

  – El número a se llama parte real del número complejo $z=a+bi$.

  – El número b se llama parte imaginaria del número complejo $z=a+bi$.

- Un número real es aquel que no tiene parte imaginaria, es decir, $b=0$.

- Un número imaginario puro es aquel que no tiene parte real, es decir, $a=0$.

- Dos números complejos son iguales si tienen iguales su parte real y su parte imaginaria, es decir, $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ y } b=d$.

Ejemplos:

Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt{-36}=\sqrt{36\cdot(-1)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}=6i$

b) $\sqrt{-100}=\sqrt{100\cdot(-1)}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{-1}=10i$

Ejercicios:

Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt{-25}$

b) $\sqrt{-16}$

Solución:

a) $5i$

b) $4i$

Ejemplo:

Expresa en forma binómica el número complejo $5+\sqrt{-81}$

$$5+\sqrt{-81}=5+\sqrt{81\cdot(-1)}=5+\sqrt{81}\cdot\sqrt{-1}=5+9i$$

Ejercicio:

Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $3-\sqrt{-100}$

b) $2+\sqrt{-7}$

Solución:

a) $3-10i$

b) $2+\sqrt{7}i$

2. Operaciones con números complejos.

– *Suma y diferencia de números complejos.*

Ejemplos:

Calcula las siguientes sumas:

a) $(2+5i)+(3+4i)=2+5i+3+4i=5+9i$

b) $(1+i)+(1-i)=1+i+1-i=2$

Ejercicios:

Calcula las siguientes sumas:

a) $(1+3i)+(1+i)$

b) $i+(2-5i)$

Solución:

a) $2+4i$

b) $2-4i$

- El opuesto del número complejo $a+bi$ es $-a-bi$.

Ejemplos:

Escribe los opuestos de los siguientes números complejos:

a) $3+4i$ Opuesto: $-3-4i$

b) $1-i$ Opuesto: $-1+i$

Ejercicios:

Escribe los opuestos de los siguientes números complejos:

a) $-3+i$

b) $-2-5i$

Solución:

a) $3-i$

b) $2+5i$

Ejemplos:

Calcula las siguientes diferencias:

$(2+5i)-(3+4i)=2+5i-3-4i=-1+i$

Ejercicios:

Calcula las siguientes diferencias:

a) $(1+i)-(1-i)$

b) $(1+3i)-(1+i)$

c) $i-(2-5i)$

Solución:

a) $2i$

b) $2i$

c) $-2+6i$

– *Producto de números complejos.*

- Tendremos en cuenta que $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

Ejemplo:

Calcula los siguientes productos:

$$(2+5i)\cdot(3+4i) = 6+8i+15i+20i^2 = 6+8i+15i+20(-1) = 6+8i+15i-20 = -14+23i$$

Ejercicios:

Calcular los siguientes productos:

a) $(1+i)\cdot(-1-i)$

b) $(1+3i)\cdot(1+i)$

c) $i\cdot(2-5i)$

Solución:

a) $-2i$

b) $-2+4i$

c) $5+2i$

Ejemplo:

Calcula los siguientes productos:

$$(2+5i)\cdot(2-5i) = 2^2-(5i)^2 = 4-25i^2 = 4-25(-1) = 4+25 = 29$$

Ejercicios:

Calcula los siguientes productos:

a) $(1+i)\cdot(1-i)$

b) $(1+3i)\cdot(1-3i)$

c) $(-2-5i)\cdot(-2+5i)$

Solución:

a) 2

b) 10

c) 29

Ejercicio:

Determinar el número x sabiendo que $(1+xi)\cdot(2-3i)$ es un número real.

Solución:

$$x=-\frac{3}{2}$$

Ejemplo:

Siendo $z_1=2+mi$ y $z_2=n+3i$, hallar m y n de modo que la suma de z_1 y z_2 sea $2-i$.

$$z_1+z_2=2-i\rightarrow 2+mi+n+3i=2-i\rightarrow(2+n)+(m+3)i=2-i$$

Luego:

$$\begin{array}{l}2+n=2\rightarrow n=2-2=0\\ m+3=-1\rightarrow m=-1-3=-4\end{array}$$

Ejercicio:

Calcular:

a) $(2+3i)+(1-i)-(3-i)$

b) $i+(3-2i)-(2+i)$

c) $(1+i)\cdot(1-3i)$

d) $(2+i)\cdot(1-3i)-(4+i)$

<u>Solución:</u>

a) $3i$

b) $1-2i$

c) $4-2i$

d) $1-6i$

– ***División de números complejos.***

- Dado un número complejo $z = a + bi$ se llama complejo <u>conjugado</u> de z al complejo $\overline{z} = a - bi$.

<u>Ejemplo:</u>

Escribe los conjugados de los siguientes números complejos:

a) $3+4i$ Conjugado: $3-4i$

b) $1-i$ Conjugado: $1+i$

<u>Ejercicio:</u>

Escribe los conjugados de los siguientes números complejos:

a) $-3+i$

b) $-2-5i$

<u>Solución:</u>

a) $-3-i$

b) $-2+5i$

- La división de números complejos se hace multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador.

<u>Ejemplo:</u>

Calcula las siguientes divisiones:

$$(2+5i):(3+4i)=\frac{2+5i}{3+4i}=\frac{(2+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i+15i-20i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{6-8i+15i-20(-1)}{9-16(-1)}=$$

$$=\frac{6-8i+15i-20(-1)}{9-16(-1)}=\frac{6-8i+15i+20}{9+16}=\frac{26+7i}{25}=\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$$

$$(2-5i):i=\frac{2-5i}{i}=\frac{(2-5i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-2i+5i^2}{-i^2}=\frac{-2i+5(-1)}{-(-1)}=\frac{-2i-5}{1}=-5-2i$$

Ejercicios:

Calcula las siguientes divisiones:

a) $(1+i):(1-i)$

b) $(1+3i):(1+i)$

c) $(2-3i):2i$

Solución:

a) i

b) $2+i$

c) $-\frac{3}{2}-i$

- El inverso del número complejo $z=a+bi$ es $z^{-1}=\frac{1}{a+bi}$

Ejemplo:

Calcular el inverso del número complejo $1+i$

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{1-i}{1^2-i^2}=\frac{1-i}{1-(-1)}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Ejercicio:

Calcula el inverso de los siguientes números complejos:

a) $1-i$

b) $2+3i$

c) $-2+i$

Solución:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

b) $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}\mathrm{i}$

c) $-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$

– ***Cálculo de las potencias de la unidad imaginaria:***

$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

$\mathrm{i}^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$

$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=(-1)\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$

$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^3\cdot\mathrm{i}=(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}^2=-(-1)=1$

Ejemplo: Calcula i^{2355}

Si dividimos 2355 entre 4 obtenemos cociente 588 y resto 3, luego $\mathrm{i}^{2355}=\mathrm{i}^{588\cdot 4+3}=\left(\mathrm{i}^4\right)^{588}\cdot\mathrm{i}^3=1^{588}\cdot\mathrm{i}^3=1\cdot(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}$.
Utilizando este razonamiento, podemos escribir simplemente que $\mathrm{i}^{2355}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$.

Ejercicio:

Calcula las siguientes potencias:

a) i^{125}

b) i^{723}

c) i^{2344}

d) i^{27}

Solución:

a) i

b) $-\mathrm{i}$

c) 1

d) $-i$

– ***Potencia de números complejos dados en forma binómica.***

Ejemplos:

Calcula la siguiente potencia:

Utilizando el binomio de Newton, tenemos que:

$$(2+3i)^4 = \binom{4}{0}\cdot 2^0 \cdot (3i)^4 + \binom{4}{1}\cdot 2^1 \cdot (3i)^3 + \binom{4}{2}\cdot 2^2 \cdot (3i)^2 + \binom{4}{3}\cdot 2^3 \cdot (3i)^1 + \binom{4}{4}\cdot 2^4 \cdot (3i)^0 =$$
$$= \binom{4}{0}\cdot 1\cdot 3^4 i^4 + \binom{4}{1}\cdot 2\cdot 3^3 i^3 + \binom{4}{2}\cdot 2^2 \cdot 3^2 i^2 + \binom{4}{3}\cdot 2^3\cdot 3i + \binom{4}{4}\cdot 2^4 \cdot 1 =$$
$$= \binom{4}{0}\cdot 1\cdot 81\cdot 1 + \binom{4}{1}\cdot 2\cdot 27\cdot(-i) + \binom{4}{2}\cdot 4\cdot 9\cdot(-1) + \binom{4}{3}\cdot 8\cdot 3i + \binom{4}{4}\cdot 16\cdot 1 =$$
$$= \binom{4}{0}\cdot 81 - \binom{4}{1}\cdot 54i - \binom{4}{2}\cdot 36 + \binom{4}{3}\cdot 24i + \binom{4}{4}\cdot 16$$

Triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Luego:

$$(2+3i)^4 = 1\cdot 81 - 4\cdot 54i - 6\cdot 36 + 4\cdot 24i + 1\cdot 16 = 81 - 216i - 216 + 96i + 16 = -119 - 120i$$

Ejercicios:

Calcular las siguientes potencias:

a) $(1-2i)^5$

b) $(3+i)^3$

c) $(-1-i)^7$

d) $(3-2i)^4$

Solución:

a) $41+38i$

b) $18+26i$

c) $-8+8i$

d) $-119-120i$

Identidades notables:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Ejercicio:

Calcula las siguientes operaciones con números complejos:

a) $(1+i)^2 : (4+i)$

b) $(2+i) : (1+i)^2$

Solución:

a) $\frac{2}{17}+\frac{8}{17}i$

b) $\frac{1}{2}-i$

3. Módulo y argumento de un número complejo.

– *Representación en el plano de los números complejos.*

Se dibuja un sistema de coordenadas cartesianas. En el eje de abscisas se representa la componente real, y se llama eje real, y el eje de ordenadas la componente imaginaria, y se llama eje imaginario.

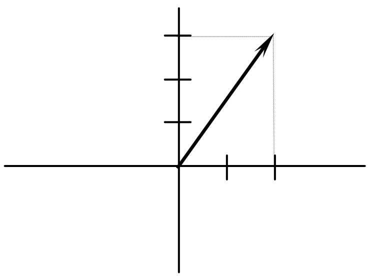
En este sistema de coordenadas los números complejos se representan haciendo corresponder al número complejo $a+bi$ el punto de coordenadas $A(a\ ,b)$, que se llama afijo del número complejo $a+bi$. De esta forma, a cada número complejo le hacemos corresponder un punto del plano y recíprocamente.

Si unimos el origen O con el punto A obtenemos un segmento orientado que llamamos vector y representamos por $\overrightarrow{OA}$. Así pues, a cada número complejo le hacemos corresponder un vector.

Ejemplo:

Representar el número complejo $2+3i$.

El afijo del número complejo $2+3i$ es $(2\ ,3)$.



Ejercicios:

Representa los siguientes números complejos:

a) $3-2i$
b) $-4+i$

Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $3+4i$
b) $1-i$
c) $-3+i$
d) $2-5i$

– *Módulo de un número complejo.*

Definición:

Se llama módulo del número complejo $z=a+bi$ a $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ejemplo:

1. Calcula el módulo de los siguientes números complejos:

   a) $z = 4 + 3i$
   $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

   b) $z = -2 - i$
   $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

<u>Ejercicios</u>:

a) $z = 3 - 4i$
b) $z = 4 + 6i$
c) $z = -1 - i$

<u>Solución</u>:

a) $|z| = 5$

b) $|z| = 2\sqrt{13}$

c) $|z| = \sqrt{2}$

– *Argumento de un número complejo.*

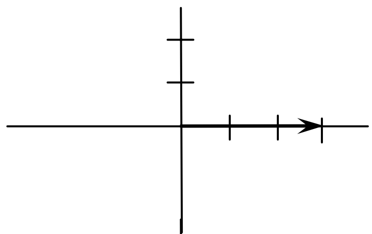
Se llama <u>argumento</u> del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas. Se le representa por $\arg(z) = \alpha$.

+ Cálculo del argumento de los números complejos más sencillos.

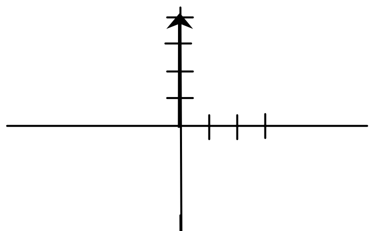
<u>Ejemplos:</u>

Calcular el argumento de los números complejos siguientes:

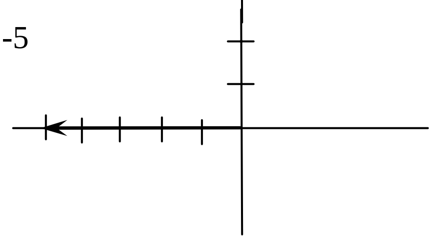
z = 3



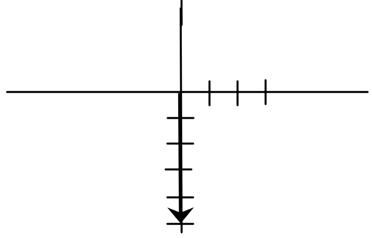
z = 4i



z = -5



z = -5i



Ejercicio:

Calcular el argumento de los siguientes números complejos:

a) $z = 4i$
b) $z = -2$
c) $z = 4$
d) $z = -6i$

Solución:

a) $\alpha = 90º$
b) $\alpha = 180º$
c) $\alpha = 0º$
d) $\alpha = 270º$

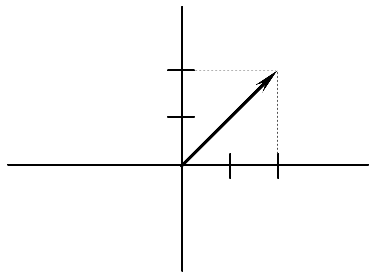
+ Cálculo del argumento de cualquier número complejo.

Si $z = a + bi$ entonces $\alpha = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplos:

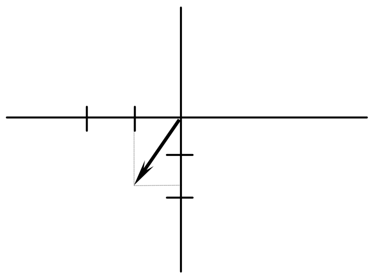
Calcular el argumento de los siguientes números complejos:

a) $z = 2 + 2i$



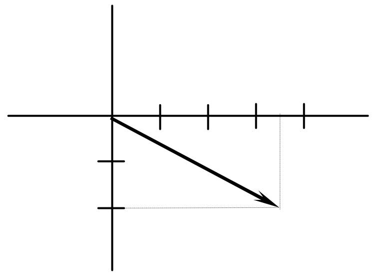
$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \operatorname{arctg}1$, y como α está en el primer cuadrante, $\alpha = 45º$

b) $z = -1 - \sqrt{3}i$



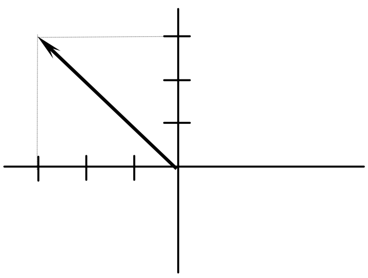
$\alpha = \text{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \text{arctg}\sqrt{3}$, y como α está en el tercer cuadrante, $\alpha = 240º$

c) $z = 2\sqrt{3} - 2i$



$\alpha = \text{arctg}\dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = \text{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, y como α está en el cuarto cuadrante, $\alpha = 330º$

d) $z = -3 + 3i$



$\alpha = \text{arctg}\dfrac{3}{-3} = \text{arctg}(-1)$, y como α está en el segundo cuadrante, $\alpha = 135º$

Ejercicios:

Calcular el argumento de los números complejos:

a) $z = -3\sqrt{3} - 3i$

b) $z = 4\sqrt{3} + 4i$

c) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = -1 - i$

e) $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

f) $z = 1 - i$

g) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

h) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

i) $z = -3 - 3\sqrt{3}i$

j) $z = -1 + i$

k) $z = 4 - 4\sqrt{3}i$

l) $z = 6\sqrt{3} - 6i$

Solución:

a) $\alpha = 210^{\circ}$

b) $\alpha = 30^{\circ}$

c) $\alpha = 120^{\circ}$

d) $\alpha = 225^{\circ}$

e) $\alpha = 60^{\circ}$

f) $\alpha = 315^{\circ}$

g) $\alpha = 150^{\circ}$

h) $\alpha = 45^{\circ}$

i) $\alpha = 225^{\circ}$

j) $\alpha = 135^{\circ}$

k) $\alpha = 300^{\circ}$

l) $\alpha = 330^{\circ}$

4. Forma trigonométrica y polar de un número complejo.

Forma binómica	Forma trigonométrica	Forma polar
$a+bi$	$r\left(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha\right)$	r_α

donde r es el módulo del número complejo $a+bi$ y α es el argumento.

Ejemplo:

Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:

a) $4+4\sqrt{3}i$

Módulo: $r=\sqrt{4^2+2^2\cdot 3}=8$

Argumento: $\alpha = 60^o$

Por tanto, $4+4\sqrt{3}\,i = 8\left(\cos 60^o + i\,\mathrm{sen}60^o\right) = 8_{60^o}$

b) i.

Módulo: $r=1$.

Argumento: $\alpha = 90^o$.

Por tanto, i = 1 (cos90º + i sen90º) = 1_{90^o} $i = 1\left(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen}90^o\right) = 1_{90^o}$

c) 6_{225^o}

$$6_{225^o} = 6\left(\cos 225^o + i\,\mathrm{sen}225^o\right) = 6\left(.\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$$

Ejercicio:

Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:

a) $-3\sqrt{3}-3i$

b) 3_{30^o}

c) $4\sqrt{3}+4i$

d) $2\left(\cos 30^o + i\,\mathrm{sen}30^o\right)$

e) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

f) $4_{330^{\circ}}$

g) $-1-\mathrm{i}$

h) $5_{300^{\circ}}$

i) $4+4\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

j) $1-\mathrm{i}$

k) $6\left(\cos 120^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}120^{o}\right)$

l) $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

m) $6_{135^{\circ}}$

n) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

o) $9_{240^{\circ}}$

p) $-3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

q) $-1+\mathrm{i}$

r) $4\left(\cos 150^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}150^{o}\right)$

s) $4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

t) $6\sqrt{3}-6\mathrm{i}$

<u>Solución:</u>

a) $-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}=6_{210^{\circ}}=6(\cos 210^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}210^{o})$

b) $3_{30^{\circ}}=3(\cos 30^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}30^{o})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

c) $4\sqrt{3}+4\mathrm{i}=8_{30^{\circ}}=8(\cos 30^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}30^{o})$

d) $2(\cos 30^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}30^{o})=2_{30^{\circ}}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$

e) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1_{120^{\circ}}=\cos 120^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}120^{o}$

f) $4_{330^{\circ}}=4(\cos 330^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}330^{o})=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

g) $-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}_{225^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 225^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}225^{o})$

h) $5_{300^{\circ}}=5(\cos 300^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}300^{o})=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

i) $4+4\sqrt{3}\mathrm{i}=8_{60^{\circ}}=8(\cos 60^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}60^{o})$

j) $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}_{315}{}^{o}=\sqrt{2}(\cos 315^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}315^{o})$

k) $6\left(\cos 120^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}120^{o}\right)=6_{120^{\circ}}=-3+3\sqrt{3}\mathrm{i}$

l) $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}=4_{150^{\circ}}=4(\cos 150^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}150^{o})$

m) $6_{135^{\circ}}=6(\cos 135^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}135^{o})=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}$

n) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}=2_{45^{\circ}}=2(\cos 45^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}45^{o})$

o) $9_{240^{\circ}}=9(\cos 240^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}240^{o})=-\dfrac{9}{2}-\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

p) $-3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}=6_{225^{\circ}}=6(\cos 225^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}225^{o})$

q) $-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}_{135^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 135^{o}+\mathrm{i}\operatorname{sen}135^{o})$

r) $4\left(\cos 150^\circ + i\,\text{sen}\,150^\circ\right) = 4_{150^\circ} = -2\sqrt{3} + 2i$

s) $4 - 4\sqrt{3}\,i = 8_{300^\circ} = 8\left(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ\right)$

t) $6\sqrt{3} - 6i = 12_{330^\circ} = 12\left(\cos 330^\circ + i\,\text{sen}\,330^\circ\right)$

5. Producto y cociente de números complejos en forma polar.

El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

$r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = r \cdot r'_{\alpha+\alpha'}$

Ejemplo:

$$2_{100^\circ} \cdot 6_{80^\circ} = \left(2 \cdot 6\right)_{100^\circ+80^\circ} = 12_{180^\circ}$$

Ejercicio:

Calcular los siguientes productos:

a) $4_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ}$ **b)** $5_{30^\circ} \cdot 6_{270^\circ}$ **c)** $5_{15^\circ} \cdot 6_{35^\circ} \cdot 2_{200^\circ}$

Solución:

a) 12_{180° **b)** 30_{300° **c)** 60_{250°

El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

$r_\alpha : r'_{\alpha'} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$

Ejemplo:

$$2_{100^\circ} : 6_{80^\circ} = \left(\frac{2}{6}\right)_{100^\circ-80^\circ} = \left(\frac{1}{3}\right)_{20^\circ}$$

Ejercicio:

Calcular los siguientes cocientes:

a) $4_{120^\circ} : 2_{60^\circ}$ **b)** $6_{300^\circ} : 3_{270^\circ}$ **c)** $7_{60^\circ} : 7_{45^\circ}$

Solución:

Calcular los siguientes cocientes:

a) 2_{60° **b)** 2_{30° **c)** 1_{15°

6. Potenciación y radicación de números complejos en forma polar.

La potencia n-ésima de un número complejo es otro número complejo, que tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento n veces el argumento del complejo dado:

$\left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\alpha}$

Ejemplo:

$$\left(2+2\sqrt{3}i\right)^4 = \left(4_{60^\circ}\right)^4 = \left(4^4\right)_{4\cdot 60^\circ} = 256_{240^\circ} = 256\left(\cos 240^\circ + i\operatorname{sen} 240^\circ\right) = 256\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -128-128\sqrt{3}\,i$$

Ejercicio:

Calcular:

a) $\left(-3\sqrt{3}-3i\right)^5$

b) $\left(3_{30^\circ}\right)^6$

c) $\left(4\sqrt{3}+4i\right)^3$

d) $\left(4_{330^\circ}\right)^{78}$

e) $\left(-1-i\right)^{46}$

f) $\left(5_{300^\circ}\right)^9$

g) $\left(4+4\sqrt{3}i\right)^7$

h) $\left(1-i\right)^{65}$

i) $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$

j) $\left(6_{135^\circ}\right)^4$

k) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^{10}$

l) $\left(1_{240^{\circ}}\right)^{78}$

m) $\left(-3-3\sqrt{3}i\right)^{7}$

n) $\left(-1+i\right)^{5}$

o) $\left(6\sqrt{3}-6i\right)^{8}$

<u>Solución:</u>

a) $7776_{330^{\circ}}$

b) $729_{180^{\circ}}$

c) $512_{90^{\circ}}$

d) $\left(4^{78}\right)_{180^{\circ}}$

e) $\left(2^{23}\right)_{270^{\circ}}$

f) $\left(5^{9}\right)_{180^{\circ}}$

g) $\left(8^{7}\right)_{60^{\circ}}$

h) $\left(\sqrt{2^{65}}\right)_{315^{\circ}}$

i) $64_{90^{\circ}}$

j) $1296_{180^{\circ}}$

k) $1024_{90^{\circ}}$

l) $1_{0^{\circ}}$

m) $\left(6^{7}\right)_{135^{\circ}}$

n) $4\sqrt{2}_{\,315^{\circ}}$

o) $\left(12^{8}\right)_{120^{\circ}}$

Las <u>raíces n-ésimas</u> de un número complejo son n números complejos que tienen de módulo la raíz n - ésima del módulo y por argumento $\dfrac{\alpha + k \cdot 360^{\circ}}{n}$ con $0 \leq k < n$.

Ejemplo:

Halla las raíces cúbicas del complejo $z = 8i$.

$|z| = 8$, $\alpha = \arg z = 90^{o}$.

Las raíces cúbicas son tres números complejos z_n con $n \in \{0, 1, 2\}$ con $|z_n| = \sqrt[3]{8} = 2$ y $\arg z_0 = \dfrac{90^{o}+0 \cdot 360^{o}}{3} = 30^{o}$, $\arg z_1 = \dfrac{90^{o}+1 \cdot 360^{o}}{3} = 150^{o}$ y $\arg z_3 = \dfrac{90^{o}+2 \cdot 360^{o}}{3} = 270^{o}$, luego:

$$z_0 = 2_{30^{o}} = 2\left(\cos 30^{o}+i\operatorname{sen}30^{o}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i,$$

$$z_1 = 2_{150^{o}} = 2\left(\cos 150^{o}+i\operatorname{sen}150^{o}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i,$$

$$z_0 = 2_{270^{o}} = 2\left(\cos 270^{o}+i\operatorname{sen}270^{o}\right) = 2\left(0+(-1)i\right) = -2i.$$

Ejercicios:

Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{-1}$ **b)** $\sqrt[4]{1+i}$ **c)** $\sqrt{-36}$ **d)** $\sqrt[3]{-27}$ **e)** $\sqrt[6]{729i}$

Solución:

a) $z_0 = 1_{60^{o}}$, $z_1 = 1_{180^{o}}$, $z_2 = 1_{300^{o}}$

b) $z_0 = \sqrt[8]{2}_{\pi/16}$, $z_1 = \sqrt[8]{2}_{9\pi/16}$, $z_2 = \sqrt[8]{2}_{17\pi/16}$, $z_3 = \sqrt[8]{2}_{25\pi/16}$

c) $z_0 = 6_{90^{o}}$, $z_1 = 6_{270^{o}}$

d) $z_0 = 3_{60^\circ}$, $z_1 = 3_{180^\circ}$, $z_2 = 3_{300^\circ}$

e) $z_0 = 3_{\pi/12}$, $z_1 = 3_{5\pi/12}$, $z_2 = 3_{3\pi/4}$, $z_3 = 3_{13\pi/12}$, $z_4 = 3_{17\pi/12}$, $z_5 = 3_{7\pi/4}$,

Ejercicios de números complejos.

1. Efectúa las siguientes operaciones con números complejos, dando la parte real y la parte imaginaria del resultado:

a) $\dfrac{i}{3+i}$

b) $\dfrac{1+i^7}{1-i^{21}}$

c) $\dfrac{1+3i-i\cdot(2-i)}{1+3i}$

d) $(1+i)\cdot(2+i)\cdot(3+i)$

e) $\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

f) $i^{14}-\dfrac{i^{21}+i^{62}}{i^{30}-i^{23}}+i^5$

g) $\dfrac{2-i}{3+i}:\dfrac{3-i}{2+i}$

Solución:

a) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}i$

b) 1

c) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$

d) 10i

e) $\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

f) $-2+i$

g) $\frac{1}{2}$

2. Calcula (en forma binómica) las siguientes potencias:

a) $(1+2i)^3$

b) $(2+i^5)^3$

Solución:

a) $-11-2i$

b) $2+11i$

3. Determinar el valor de m para que el número complejo $z=(3-6i)\cdot(2-mi)$ sea:

a) Un número real.
b) Un número imaginario puro.

Solución:

a) $m=-4$
b) $m=-1$

4. Determinar el valor de x para que $\frac{(3 + 2i) \cdot (1 - i)}{3 + xi}$ sea igual a $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$

Solución: $x=1$