1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **NATURALES:** surgen de la necesidad de contar o de ordenar. Se denotan con la letra **N.**
  N={1,2,3,4,…}

  La suma de dos números naturales es siempre otro número natural. Pero con la resta no pasa lo mismo. Ejem.: 6-8

- **ENTEROS:** para que la resta de números naturales siempre tenga sentido, hemos de ampliar **N.** De esta manera nace el conjunto de números enteros, que denotamos por **Z.**
  Z={…, -2,-1,0,1,2,…}

  - ✓ Es claro que **N⊂Z.**

  En Z podemos sumar y restar (sumar el opuesto). Pero, no en todos los casos podemos hacer divisiones. Ejem.: 8:5

- **RACIONALES:** Para que la división de números enteros siempre tenga sentido, hemos de ampliar **Z.** De esta manera nace el conjunto de números racionales, que denotamos por **Q.**

$$Q = \left\{ \left[\frac{a}{b} \right]; a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

  - ✓ **N⊂Z⊂Q,** ya que los números racionales de denominador 1 se identifican con los enteros.
  - ✓ **Recordar:**

  Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se dicen equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$

  Una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si el numerador y el denominador son primos entre sí

  Cada número racional está formado por una fracción y todas sus equivalentes. Cada una de estas fracciones es un representante del número racional. La fracción irreducible de denominador positivo se llama **representante canónico** de este número.

  - ❖ ***Caracterización de los números racionales***
    Todo número racional se puede escribir en forma decimal periódica. Recíprocamente, todo número decimal periódico se puede escribir en forma de fracción.

- **IRRACIONALES:** existen números decimales ilimitados no periódicos, a estos los llamamos **números irracionales.** El conjunto de los números irracionales se denota con la letra **I**.
  Podemos construír, por ejemplo: 1, 1 01 0001 00001 000001…

  - ➢ **Nota:** es obvio que **I⊄Q** y que **Q⊄I**, es decir **Q∩I**=Ø

  Hace muchos años que se sabe de su existencia. Fueron los griegos de la escuela pitagórica quienes encontraron segmentos cuya longitud no podían expresar como cociente de dos números enteros (por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1, que vale √2), lo cual no podían entender, y por ello les llamaron números irracionales.

  El número que tenemos en el ejemplo lo hemos construído siguiendo un patrón y por eso sabemos que es decimal ilimitado no periódico. Pero qué pasa con √2, que hemos dicho que es irracional. ¿Cómo podemos saberlo?

  - ❖ **Proposición:** *√2 es un número irracional*

    Dem
    Supongamos que √2 no es irracional., por tanto será racional, y por ello podemos expresarlo como cociente de dos números enteros.

    Sea $\frac{a}{b}$ su representante canónico, podemos escribir la siguiente igualdad $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son primos entre sí.

    Si elevamos los dos miembros al cuadrado, obtenemos $2 = \frac{a^2}{b^2}$

    Esto significa que la fracción $\frac{a^2}{b^2}$ es reducible ya que al simplificarla obtenemos como resultado 2.

    Pero si $\frac{a}{b}$ es irreducible también debe serlo $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$.

    Llegamos a una contradicción con el origen de la suposición inicial, $\therefore \sqrt{2}$ es irracional.

❖ **Más ejemplos**

- Son irracionales las raíces de números naturales cuyo resultado no es un número entero.
- Son irracionales las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones donde se combinan números racionales e irracionales. (Excepción: a∈**I**, 0 a∈**Q**).
- El número π. Aunque los griegos ya sospechaban que π era irracional no se consiguió demostrar hasta el siglo XII
- El número **e**

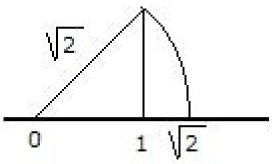
❖ **Representación gráfica de números irracionales**

Sabemos que a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero ¿a cada punto de la recta le corresponde un número racional? Si esto fuera cierto, la recta estaría completa y no podríamos representar allí los números irracionales.
Lo cierto es que los números racionales no completan la recta, en principio podríamos pensar que en los 'espacios' libres, se encuentran los números irracionales. Si conseguimos representar un número irracional en la recta tendremos prueba evidente de que lo que estamos intuyendo es cierto.

➢ **Representación geométrica**

Ejemplo: representación de √2

Sabemos que $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, es decir $1<\sqrt{2}<2$



En un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, la hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Representamos este triángulo de manera que uno de los catetos quede sobre la recta real y transportamos la hipotenusa, por medio de un compás, sobre la recta que hace de base. Queda así representado $\sqrt{2}$, sobre la recta real.

➢ **Representación aproximada**

La representación geométrica sólo nos permite representar números irracionales que sean radicales cuadráticos.
La representación aproximada es un método general que nos permite representar sobre la recta cualquier número irracional.

Ejemplo: representación de √2

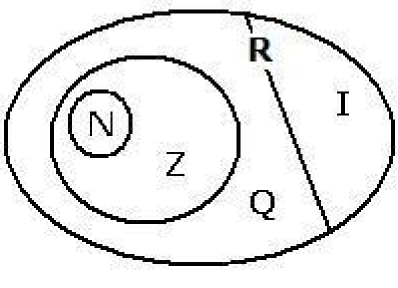
- $\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots$está comprendido entre 1 y 2. Su representación sobre la recta será un punto del segmento determinado por 1 y 2
- Dividimos el segmento anterior en 10 partes iguales. Como $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$ su representación será un punto del segmento determinado por 1,4 y 1,5.

  Este proceso se puede repetir las veces que queramos y permite obtener una representación con tanta precisión como queramos.

❑ **REALES:** el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales recibe el nombre de **conjunto de los números reales** y se representa mediante la letra **R.**
Una vez representados los números racionales e irracionales sobre la recta ya no quedan espacios vacíos. Los números reales llenan totalmente la recta. Por eso esta recta se denomina **recta real**. Por lo mismo, decimos que **R** es **completo**.
Fijado un origen y definida la unidad, a cada número real le corresponde un único punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un único número real.

✓ Es obvio que **R**=**Q**∪**I**

➢ Gráficamente:



2. *NÚMEROS REALES*

- **ESQUEMA**

$$\text{Reales}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\begin{cases}\text{Naturales}\\ \text{Enteros negativos y 0}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\begin{cases}\text{Decimales exactos}\\ \text{Decimales periódicos}\begin{cases}\text{Puros}\\ \text{Mixtos}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$

- **ORDEN EN R**

El hecho de que podamos representar los números reales en la recta nos permite establecer un orden el el conjunto **R**.

- **Definición**

Dados a, b$\in$**R,** decimos que **a es menor que b** y escribimos **a<b**, si al representarlos sobre la recta real a queda situado a la izquierda de b.

Esto es equivalente a lo siguiente

$\forall$ a, b$\in$**R,** $a \le b \Leftrightarrow b-a \ge 0$ **(relación de orden en R)**

El conjunto de los números reales es un **conjunto ordenado**

- **Propiedades de la relación de orden**

  - **Reflexiva:** $\forall$ a$\in$**R** $\Rightarrow a \le a$
  - **Antisimétrica:** $\forall$ a, b$\in$**R,** $a \le b$ y $b \le a \Leftrightarrow a = b$
  - **Transitiva:** $\forall$ a, b $\in$ **R,** si $a \le b$ y $b \le c \Rightarrow a \le c$
  - **Relación de orden total:** $\forall$ a, b$\in$ **R,** a<b o bien, a>b, o bien a=b

- **Operaciones y orden**

  - **Monotonía de la suma:** $\forall$ a, b, c $\in$ **R,** si $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$
  - **Propiedad de inversión:** $\forall$ a, b $\in$ **R, si** $a \le b \Rightarrow 1/a \ge 1/b$
  - **Monotonía del producto:** $\forall$ a, b, c $\in$ **R**:
    a) Caso c>0: si $a \le b \Rightarrow a\cdot c \le b\cdot c$
    b) Caso c<0: si $a \le b \Rightarrow a\cdot c \ge b\cdot c$

- **OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. PROPIEDADES**

- **Suma:** dados a,b,c $\in$**R**
  - a+b$\in$**R**
  - **Asociativa:** (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c
  - **Conmutativa:** a·b = b·a
  - **Existencia de elemento neutro (0):** a+0=a
  - **Existencia de elemento opuesto:**
    -a opuesto de a, se cumple a+(-a)=0

- **Producto:** dados a,b,c $\in$**R**
  - a·b$\in$**R**
  - **Asociativa:** (a·b)·c = a·(b·c)
  - **Conmutativa:** a·b = b·a
  - **Existencia de elemento neutro (1):** a·1=a
  - **Existencia de elemento inverso:**

    si $a \neq 0$, $\exists \dfrac{1}{a}$ inverso de a, que cumple $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$

- **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma**

Sean a,b,c $\in$**R,** a·(b+c)=a·b+a·c

❑ INTERVALOS Y ENTORNOS

❖ Intervalo

Como **R** es un conjunto ordenado, podemos hablar de los números comprendidos entre dos reales determinados.

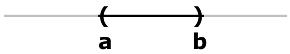
Definición:
Dados dos puntos de la recta real llamamos **intervalo** al segmento determinado por estos, considerado este segmento como un conjunto de números.

➢ **Tipos de intervalos:**

Sean a y b$\in$**R** t.q. a<b, se denomina:

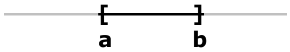
- **intervalo abierto de extremos a y b** y se denota **(a,b)**, al conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, sin incluir los extremos.

  $(a,b)=\{x\in\mathbf{R};\ a<x<b\}$

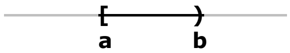
- **intervalo cerrado de extremos a y b** y se denota **[a,b],** al conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluídos los extremos.

  $[a,b]=\{x\in\mathbf{R};\ a\le x\le b\}$

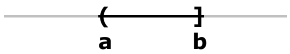
- i**ntervalo semiabierto o intervalo semicerrado de extremos a y b** al conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, incluido el extremo cerrado y excluido el extremo abierto.

  $[a,b)=\{x\in\mathbf{R};\ a\le x<b\}$

  (intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha)

  $(b,a]=\{x\in\mathbf{R};\ a<x\le b\}$

  (intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha)

- **intervalos infinitos o semirrectas** (formados por una semirrecta real)

  $[a,+\infty)=\ \{x\in\mathbf{R};\ x\ge a\}$

  $(a,+\infty)=\ \{x\in\mathbf{R};\ x>a\}$

  $(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R};\ x\le a\}$

  $(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R};\ x<a\}$

  ✓ En particular $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$

❖ Entorno

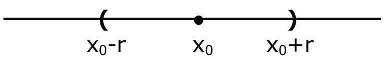
es un caso particular de intervalo

Definición:
Sea $x_0\in\mathbf{R}$, llamamos **entorno de x_0** a cualquier intervalo abierto que contiene a x_0.

Casos particulares:

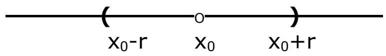
- Se denomina **entorno de centro x_0 y radio r** y se representa por **$E_r(x_0)$,** al intervalo abierto de extremos x_0-r y x_0+r, es decir

  $$E_r(x_0)=(x_0-r,\ x_0+r)$$

- Se denomina e**ntorno reducido de centro x_0 y radio r:** se denota por $\mathbf{E_r^*(x_0)}$**,** y se define como el siguiente conjunto:

$$\mathbf{E_r^*(x_0)=(x_0-r,x_0+r)\backslash\{x_0\}}$$



- **Operaciones con intervalos**

  Los intervalos son conjuntos de números, por tanto podemos operar con ellos.

  - **Unión:** sean I_1 e I_2 dos intervalos se define la unión de I_1 e I_2 y se denota $I_1 \cup I_2$ como el conjunto $I_1 \cup I_2=\{x;\ x\in I_1 \vee x\in I_2\}$

  - **Intersección:** sean I_1 e I_2 dos intervalos se define la intersección de I_1 e I_2 y se denota $I_1 \cap I_2$ como el conjunto $I_1 \cap I_2 =\{x;\ x\in I_1 \wedge x\in I_2\}$

  - **Complementario:** dado I_1 intervalo, decimos que el intervalo I_2 es su complementario si $I_1 \cup I_2=\mathbf{R} \ \wedge \ I_1 \cap I_2=\emptyset$

  - **Diferencia:** sean I_1 e I_2 dos intervalos se define la diferencia de I_1 e I_2, y se denota por $I_1\backslash I_2$, como el conjunto $I_1\backslash I_2=\{x;\ x\in I_1 \wedge x\notin I_2\}$

VALOR ABSOLUTO

- **Definición de valor absoluto |·|**

  $x \in \mathbf{R}$

  $$|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Propiedades**
  - $\forall\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \Rightarrow |x|>0$
  - $\forall\ x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |x\cdot y| = |x|\cdot|y|$
  - **Desigualdad triangular**

    $\forall\ x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS REALES

Muchas veces se trabaja con **aproximaciones** de números reales.
Las aproximaciones que son menores que el valor exacto se denominan **aproximaciones por defecto,** y las que son mayores, **aproximaciones por exceso.**

En caso de números decimales se llama **orden de aproximación** al número de cifras decimales de la aproximación.
En caso de números enteros el **orden de aproximación** es el del lugar de la primera cifra no nula que encontramos empezando por la derecha.

- **MÉTODOS DE APROXIMACIÓN**
  - **Aproximación de orden n por redondeo:** substituimos por ceros todas las cifras siguientes a la de orden n. Si la primera cifra substituida es mayor o igual que 5 la aumentamos en una unidad la última cifra no nula.
  - **Aproximación de orden n por truncamiento:**
    a) Si es un número entero, substituimos por ceros todas las cifras siguientes a la del orden deseado.
    b) Si es un número decimal, eliminamos las cifras siguientes a las del orden deseado.

  - **Ejemplos**
    1. $\pi=3,141592...$

       Aproximación de orden 2 (o hasta la centésimas) por exceso: 3,12 ($<\pi$)
       Aproximación de orden 3 (o hasta las milésimas) por defecto: 3,141 ($>\pi$)

       Aproximación de orden 3 por redondeo: 3,142
       Aproximación de orden 3 por truncamiento: 3,141

    2. Aproximación (hasta las centenas) o de orden 3 por redondeo del número 71360:
       71400

       Aproximación hasta las centenas por truncamiento de 71360:
       71300

- **ERRORES**

Cuando trabajamos con aproximaciones de números reales estamos cometiendo un error. Es importante conocer qué error estamos cometido.

- **Error absoluto E_a:** es la diferencia en valor absoluto entre el número y su aproximación.
  E_a=|A-a|, donde A es el número, y a es su aproximación

- **Error relativo E_r:** es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto del número en valor absoluto.

$$E_r = \frac{E_a}{|A|}$$

- **Cota del error**

Muchas veces, no podemos saber cuánto vale el error, por ejemplo cuando aproximamos números irracionales. Pero nos puede interesar saber si el error es mayor o menor que un número determinado.
Acotar el error es dar un número mayor que el error obtenido.

- **Cotas del error absoluto**

Si tenemos el número π=3,1415926..., y tomamos 3,141 como una aproximación, no podemos calcular el error cometido, ya que el valor exacto de π es desconocido. Pero sí podemos acotarlo:
|3,1415926...-3,141|=0,0005926...<0,001

En general podemos afirmar:
El error absoluto cometido al tomar una aproximación decimal será siempre menor que una unidad del orden de aproximación

- ✓ **Observación:** en caso de aproximación por redondeo, podemos dar una cta mejor del error. En e ejemplo anterior:
Tomamos 3,142, como aproximación por redondeo. El error absoluto es:
|3,1415926...-3,142|=0,0004074...<0,0005

En general podemos afirmar:
El error absoluto cometido al tomar una aproximación decimal por redondeo será siempre menor o igual que media unidad del orden de aproximación.

- **Cotas del error relativo**

En el caso del error relativo no hay más que calcular el cociente entre una cota del error absoluto y una aproximación por defecto del valor exacto.

$$\frac{0,001}{3,141} = 0,000318... < 0,0004$$

- **Propagación del error**

Al operar con aproximaciones el error se propaga:
- En una suma (o diferencia), las cortas de error absoluto se suman.
- En un producto (o cociente), las cotas de error relativo se suman.

- **NOTACIÓN CIENTÍFICA**

- **Definición**

Decimos que un número $x \in \mathbf{R}$, está expresado en notación científica, cuando está escrito en la forma $x=a\cdot 10^n$ donde $n \in \mathbf{Z}$ y $1 \leq a < 10$

- ✓ La notación científica es de gran utilidad para expresar números muy grandes o muy pequeños. Además, efectuar productos y cocientes en notación científica es inmediato.

- **Ejemplos**

$0,000056=5,6\cdot 10^{-5}$
$6\ 250\ 000\ 000\ 000=6,25\cdot 10^{12}$

$4,2\cdot 10^{-5} \cdot 2\cdot 10^{-6}=8,4\cdot 10^{-11}$
$(4,2\cdot 10^{-5}) : (2\cdot 10^{-6})= 2,1\cdot 10$

3. POTENCIAS

1. Potencias de exponente natural

Sea $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, se tiene: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)

2. Potencias de exponente entero

Sea $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, se tiene:

- Si $n<0 \Rightarrow a^n=1/a^{-n}$
- Si $n=0 \Rightarrow a^n=0$
- Si $n>0$, estamos en el caso de exponente natural

❖ **Propiedades de las potencias**

Sean a, $b \in \mathbf{R}$, $n,m \in \mathbf{Z}$, se cumplen las siguientes propiedades para las potencias:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a:b)^n = a^n : b^n$, $a \neq 0$

4. RADICALES

❑ **DEFINICIONES**

Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$

Se lee **raíz enésima de a**.

n es el **índice** de la raíz, a es el **radicando**

❖ **Definición**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n \quad \forall\, n \neq 0 \wedge n \in \mathbf{N}}$$

La operación que consiste en calcular el valor de la raíz enésima de un número se denomina **radicación.** La radicación es la operación inversa de la potenciación.

➢ **Observaciones**

La radicación no siempre se puede efectuar. En caso de poder efectuarse según el caso podemos obtener más de un resultado:

- **n** par $\wedge$ $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ tiene dos soluciones reales opuestas} \\ a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ no tiene solución real} \end{cases}$

- **n** impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a}$ tiene una única solución real y es del mismo signo que a

❖ **Equivalencia entre radicales y potencias de exponente fraccionario**

La raíz enésima de un número real, a, se puede expresar de la manera siguiente:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

ya que $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a^1 = a$

En general tenemos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

❑ **EQUIVALENCIA DE RADICALES**

❖ **Definición**

Dos radicales se dicen **equivalentes** si representan el mismo número, pero sus índices son distintos.

Si se multiplica el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número no nulo obtenemos un radical equivalente al dado.

Veamos que, efectivamente $\sqrt[n]{a^m}$ y $\sqrt[np]{a^{mp}}$ $(p \neq 0)$ son equivalentes :

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad \text{con } p \neq 0$$

- Lo anterior nos permite simplificar radicales y reducirlos a índice común:
  - Para **simplificar** radicales, dividimos el índice i el exponente del radicando por el mismo número.
  - Para **reducir a índice común** dos o más radicales, calculamos el mínimo común múltiplo de los índices.

EXTRACCIÓN E INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN RADICALES

- Para la **extracción** de factores de un radical, expresamos, si es posible, los factores en forma de potencia de exponente igual al índice. El factor que tenga exponente igual al índice puede extraerse del radical.

- Para la **introducción** de factores en un radical, se elevan los factores a la portencia que indica el índice.

OPERACIONES CON RADICALES

1. **Radical de un producto**

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

2. **Radical de un cociente**

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

3. **Potencia de un radical**

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

4. **Radicación de un radical**

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

5. **Suma de radicales**

Definición: dos radicales se dicen **semejantes**, si tienen el mismo índice y el mismo radicando.
Para sumar radicales es necesario que sean semejantes.

$$\boxed{p \cdot \sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q) \cdot \sqrt[n]{a}}$$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Racionalizar una fracción con radicales en el denominador consiste encontrar otra equivalente a la primera sin radicales en el denominador.

Casos más frecuentes:

- **Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$**

multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{b}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

- **Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $m < n$**

multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

- **Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$**

multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador :

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

5. *LOGARITMOS*

- **DEFINICIÓN Y TIPOS**

Dados a, b$\in$**R,** a, b>0 $\wedge$ a$\neq$1, se denomina **logaritmo en base a de b** ($\log_a b$), al número x al que hay que elevar la base (a) para obtener b:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

- **Ejemplos**
  - $\log_2 8=3$ (ya que $2^3=8$)
  - $\log_3 81=4$ (ya que $3^4=81$)
  - $\log_{1/2} 32=-5$ (ya que $(1/2)^{-5}=32$)

- Se denomina **logaritmo decimal** a aquel cuya base es **10**.
  Se denota log b.
- Se denomina **logaritmo neperiano** a aquel cuya base es el número **e**.
  Se denota ln b.

- **PROPIEDADES**

Son consecuencia de la definición:

1. $\mathbf{\log_a a=1}$
   (Dem: $\log_a a=x \Leftrightarrow a^x=a \Leftrightarrow x=1$)

2. $\mathbf{\log_a 1=0}$
   (Dem: $\log_a 1=x \Leftrightarrow a^x=1 \Leftrightarrow x=0$)

3. $\mathbf{\log_a a^x=x}$
   (Dem: $\log_a a^x=y \Leftrightarrow a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$)

4. **Logaritmo de un producto: $\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$**, donde b,c$\in$$\mathbf{R^+}$

5. **Logaritmo de un cociente: $\log_a (b/c)= \log_a b - \log_a c$**, donde b,c$\in$$\mathbf{R^+}$

6. **Logaritmo de una potencia: $\log_a b^r = r\cdot\log_a b$**, donde b$\in$$\mathbf{R^+}$ y r$\in$**R**

7. **Cambio de base:**

$$\mathbf{\log_a x} = \frac{\mathbf{\log_b x}}{\mathbf{\log_b a}}, \ \forall a,b \in \mathbf{R}$$

6. *NÚMEROS COMPLEJOS*

- **NECESIDAD DE AMPLIAR R**

Con los números reales podemos efectuar siempre las sumas y los productos, y el resultado es siempre otro número real.
Sin embargo, no sucede lo mismo con la radicación. Por ejemplo no sabemos resolver la ecuación $x^2+1=0$, ya que sus soluciones son $x=\pm\sqrt{-1}$.
No existe ningún número real que elevado al cuadrado de –1.
Por tanto, estamos ante la necesidad de definir un nuevo conjunto de números donde podamos resolver estas ecuaciones.
Para ello introducimos una letra **i**, que definimos como el valor de $\sqrt{-1}$, y que denominamos **unidad imaginaria**.

$$\boxed{\mathbf{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}}$$

- **Definiciones**

Se define el **conjunto de los números complejos,** y se denota por **C,** como el conjunto de pares ordenados de números reales (a, b), donde a se dice **parte real**, y b **parte imaginaria** del número complejo.

C={(a,b); a, b$\in$**R**}

Dado z$\in$**C**, podemos expresarlo de dos formas diferentes:
- z = (a, b) (z expresado en forma de **par ordenado**)
- z = a+bi (z expresado en **forma binómica**)
  (por supuesto z=(a,b)=a+bi)

✓ Obviamente: **C** = {(a,b); a, b$\in$**R**}= {a+bi; a, b$\in$**R**}

NÚMEROS REALES Y NÚMEROS COMPLEJOS

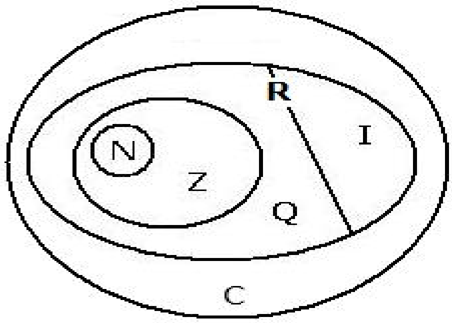
Definiciones

- Dado $z \in \mathbf{C}$, $z=a+bi$, se dice **imaginario puro** si $a=0$.
  Ejemplo: $0+5i=5i$

- Dado $z \in \mathbf{C}$, $z=a+bi$, si $b=0$, entonces z es real.
  Ejemplo: $3+0i=3$

Observación

Notar que, todo número real se puede escribir como un número complejo (último punto), esto significa que los números complejos contienen a los números reales:
$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$



IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=a'+b'i$ dos números complejos, se tiene:
$\mathbf{z_1= z_2 \Leftrightarrow a=a' \wedge b=b'}$

OPUESTO Y CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

- Sea $z \in \mathbf{C}$, $z=a+bi$, denominamos **opuesto de z**, y lo denotamos por **–z** al número complejo $-z=-a-bi$
- Sea $z \in \mathbf{C}$, $z=a+bi$, denominamos **conjugado de z** y lo denotamos por | al número complejo |=a-bi

Representación gráfica de los números complejos

A cada número complejo $z=a+bi$ le hemos hecho corresponder un par ordenado de reales, (a,b), de manera que la primera componente es la parte real y la segunda la parte imaginaria.

Por otra parte, dado un sistema de referencia cartesiano, todo par ordenado (a,b) de números reales representa un punto del plano de manera unívoca. Podemos establecer que cada punto del plano es la representación gráfica de un número complejo. Este punto recibe el nombre de **afijo** del número complejo.

Observaciones:

- Si $z=a+0i$ (z es un número real), su afijo se encuentra en el eje de abscisas. A este eje se le llama **eje real**.
- Si $z=0+bi$ (z es imaginario puro), su afijo se encuentra en el eje de ordenadas. A este eje se le llama **eje imaginario.**

- Los **afijos** de dos números complejos **opuestos, z y –z**, son **simétrico**s respecto del **origen de coordenadas**.
- Los **afijos** de dos números complejos **conjugados, z y** |, son simétricos respecto del **eje real.**

- La representación gráfica de los números complejos nos permite afirmar que **C no está ordenado,** ya que entre dos puntos del plano no se puede establecer una jerarquía de orden.

- **OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS**
  - **SUMA**

Sean $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, dos números complejos se define la suma z_1+z_2 como el número complejo que se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i}$$

Propiedades de la suma

Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{R}$

- $z_1+z_2 \in \mathbf{C}$
- **Asociativa:** $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)=z_1+z_2+z_3$
- **Conmutativa:** $z_1+z_2=z_2+z_1$
- $\exists$ **elemento neutro (0):** 0 es el elemento neutro ya que $z+0=z$
- $\exists$ **elemento opuesto:** $-z$ es el opuesto de z, ya que $-z+z=0$

  - **PRODUCTO**

Sean $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, dos números complejos se define el producto $z_1\cdot z_2$ como el número complejo que se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

✓ *Comprobación*

$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd\cdot i^2=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd(-1)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$

- **Propiedades del producto**
  - $z_1\cdot z_2 \in \mathbf{C}$
  - **Asociativa:** $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=z_1\cdot z_2\cdot z_3$
  - **Conmutativa:** $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$
  - $\exists$ **elemento neutro (1):** 1 es el elemento neutro ya que $z\cdot 1=z$
  - $\exists$ **elemento inverso:** vamos a hallarlo

Sea $z \neq 0$ llamar z^{-1} al inverso de $z \Rightarrow z\cdot z_s = 1$

$$\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ z^{-1}=c+di \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot z^{-1}=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i=1+0i$$

De la última igualdad obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} ac-bd=1 \\ bc+ad=0 \end{array}\right\} \text{resolviéndolo queda } c=\frac{a}{a^2+b^2},\ d=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Por tanto $z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$

- **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$z_1\cdot(z_2+z_3)= z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

  - **DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS**

Para dividir dos números complejos multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y operamos el resultado:

Dados los números complejos $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, con $z_2\neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=\frac{(a+b\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}{(c+d\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}=\frac{ac-ad\cdot i+bc\cdot i-bd\cdot(i)^2}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bd-ad}{c^2+d^2}\cdot i$$

  - **POTENCIACIÓN**

Para calcular expresiones del tipo $(a+bi)^n$ hemos de conocer primero las potencias de la unidad imaginaria.

Potencias de la unidad imaginaria:

$\mathbf{i^0 = 1}$
$\mathbf{i^1 = i}$
$\mathbf{i^2 = -1}$
$\mathbf{i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i}$
$\mathbf{i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1}$
$\mathbf{i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i}$
$\mathbf{i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1}$
$\mathbf{i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i}$
...

- En general, para calcular i^n, $n \in \mathbf{N}$, expresamos $n=4\cdot c+r$ donde c es el cociente y r el resto de dividir n entre 4. Tenemos:
  $i^n = i^{4\cdot c+r} = i^{4\cdot c}\cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = i^r$, donde i^r es conocido por ser $0\leq r<4$