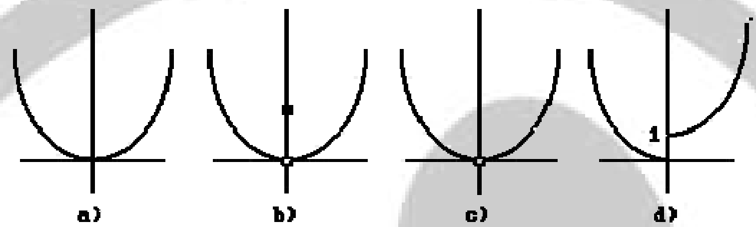
4. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

4.1. Noción intuitiva de continuidad de una función en un punto.

La mayor parte de las funciones que manejamos a nivel elemental, presentan en sus gráficas una propiedad característica que es la continuidad. Esto significa que pequeñas variaciones en el valor original de la variable independiente, ocasionan pequeñas variaciones también en la imagen, pero no un salto brusco en su valor. Intuitivamente esto se traduce en que la gráfica de la función no se rompe. Observemos los siguientes ejemplos:



Aunque son muy parecidas, de inmediato se observa que en $x=\boldsymbol{0}$ las gráficas presentan un comportamiento muy distinto.

Mientras que la *(a)* puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, no ocurre así en las demás, puesto que al llegar a $x=\boldsymbol{0}$ la gráfica se interrumpe. Analicemos la causa:

b) $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{1}$ pero $\lim\limits_{x\to \boldsymbol{0}} f(x)=\boldsymbol{0}$

c) $\nexists\, f(\boldsymbol{0})$ pero $\lim\limits_{x\to \boldsymbol{0}} f(x)=\boldsymbol{0}$

d) $\lim\limits_{x\to \boldsymbol{0}^-} f(x)=\boldsymbol{0}$ pero $\lim\limits_{x\to \boldsymbol{0}^+} f(x)=\boldsymbol{1}$

Por tanto, si queremos establecer un concepto de continuidad que responda a la idea de trazado sin levantar el lápiz del papel, debemos evitar en la definición los tres casos anteriores.

4.2. Continuidad de una función en un punto.

(A) Una función f es *continua en un punto* $x=a$, cuando se cumplen las siguientes condiciones:

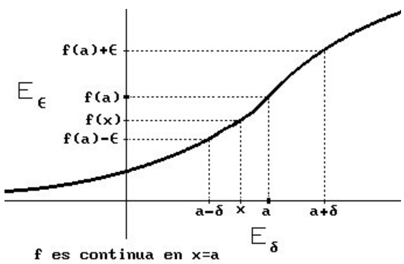
1ª) $\exists\, f(a)$, o lo que es lo mismo, $a\in \text{Dom } f$

2ª) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)\in \mathbb{R}$, es decir, $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y son iguales

3ª) $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)= f(a)}$

La última condición lo resume todo, suponiendo la existencia de todos los elementos que aparecen en ella. También podemos escribir esa definición en términos de la de límite:

$$\forall \varepsilon >\boldsymbol{0} \quad \exists \delta >\boldsymbol{0} \quad / \quad \boldsymbol{0}<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$



Si nos restringimos a los valores que la función toma a la derecha o izquierda del punto, se habla de continuidad lateral y podemos hacer las siguientes dos definiciones:

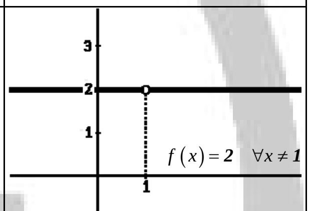
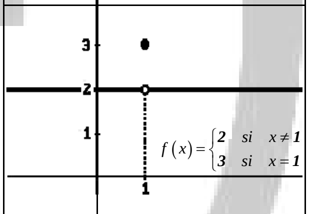
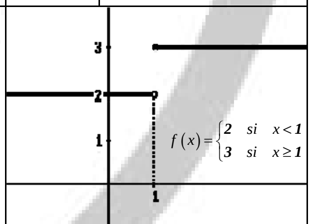
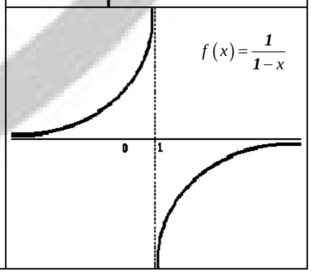
(B) f es *continua a la derecha en* $x=a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

f es *continua a la izquierda en* $x=a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Es evidente que si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es continua en dicho punto.

4.3. Tipos de discontinuidades.

Si alguna de las condiciones que se deben dar para que exista continuidad en un punto falla, diremos que la función es discontinua en dicho punto. En función de cual sea la condición que no se cumple, tendremos distintos tipos de discontinuidad pero, en todos ellos, la clave para reconocerlos estará siempre en el cálculo del límite. Analicemos las distintas posibilidades:

CONDICIONES		***DISCONTINUIDAD***		EJEMPLO
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\nexists\ f(a)$	***EVITABLE***		
	$\exists f(a)$ pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$			
$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1\in\mathbb{R}\\ \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$ pero $L_1\neq L_2$	***SALTO FINITO*** $\lvert L_1-L_2\rvert$	***INEVITABLE***	
	$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \text{ y } \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\in\mathbb{R}\\ \text{o}\\ \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in\mathbb{R} \text{ y } \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty\\ \text{o}\\ \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \text{ y } \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty\end{array}\right\}$	***ASINTÓTICA (DE SALTO INFINITO*** ***salvo cuando ambos límites laterales son iguales e infinitos)***		

Cuando una función tiene una discontinuidad evitable (se puede evitar), el valor que deberíamos de darle en dicho punto para que fuera continua (que es el resultado del límite) se llama *verdadero valor* de la función en ese punto.

4.4. Continuidad de las funciones principales.

TIPO	***CONTINUIDAD*** (Toda función definida por una única fórmula, es continua en su dominio de definición)	Ejemplos
Polinomios	Continuidad en todo $\mathbb{R}$	
Racionales	Continuidad en $\mathbb{R}-\{polos\}$ * En los polos: -Discontinuidad evitable (si existe el límite). -Discontinuidad asintótica (si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$).	$f(x)=\dfrac{-3x}{2x+1} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \mathbb{R}-\left\{\frac{-1}{2}\right\} \\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\frac{-1}{2} \end{cases}$ $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$ $h(x)=\dfrac{-x^2+2x}{x^2-x-6} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \mathbb{R}-\{-3;2\} \\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=3 \\ \text{Discontinua evitable en } x=2 \end{cases}$
Irracionales – Índice par	Continuidad en $\{x\in\mathbb{R} / radicando>0\}$ (dominio menos ceros) * En los puntos problemáticos aislados: -Discontinuidad evitable (si existe límite). -Discontinuidad asintótica (si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$). * En los intervalos: -Continuidad por la derecha (origen) o por la izquierda (extremo), si están cerrados.	$f(x)=\sqrt{-3x-6} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en }]-\infty,2[\\ \text{Continua por la izquierda en } x=2 \end{cases}$ $g(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en }]-2,1[\cup]2,\infty[\\ \text{Continua por la izquierda en } x=1 \end{cases}$ $h(x)=\sqrt[6]{x^4+1} \Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$ $j(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \mathbb{R}-\{1\} \\ \text{Discontinua evitable en } x=1 \end{cases}$
Irracionales – Índice impar	Continuidad en $\mathbb{R}-\{ptos\ problemáticos\ radicando\}$ * En los puntos problemáticos aislados: -Discontinuidad evitable (si existe límite). -Discontinuidad asintótica (si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$). * En los intervalos: -Continuidad por la derecha (origen) o por la izquierda (extremo), si están cerrados.	$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \mathbb{R}-\{-1,1\} \\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=-1 \\ \text{Discontinua evitable en } x=1 \end{cases}$ $g(x)=\sqrt[7]{x^4+1} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$ $h(x)=\sqrt[5]{Lx} \Rightarrow$ Continua en $]0,\infty[$
Exponenciales	Continuidad en $\mathbb{R}-\{ptos\ problemáticos\ exponente\}$ * En los puntos problemáticos aislados: -Discontinuidad evitable (si existe límite). -Discontinuidad asintótica (si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$). * En los intervalos: -Continuidad por la derecha (origen) o por la izquierda (extremo), si están cerrados.	$f(x)=e^{-2x+3} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$ $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \mathbb{R}-\{0\} \\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=0 \end{cases}$ $h(x)=7^{\sqrt{-5x+2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Continua en } \left]-\infty,\frac{2}{5}\right[\\ \text{Continua por la izquierda en } x=\frac{2}{5} \end{cases}$

TIPO	***CONTINUIDAD***	Ejemplos
Logarítmicas	Continuidad en $\{x\in\mathbb{R} / argumento>\boldsymbol{0}\}$ * En los puntos problemáticos aislados: -Discontinuidad evitable (si existe límite). -Discontinuidad asintótica (si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$).	$f(x)=L\left(x^2-\boldsymbol{2}x+\boldsymbol{1}\right) \Rightarrow \begin{cases}\text{Continua en } \mathbb{R}-\{\boldsymbol{1}\}\\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\boldsymbol{1}\end{cases}$ $g(x)=\log\left(\dfrac{x}{x^2-\boldsymbol{3}x}\right) \Rightarrow \text{Continua en }]\boldsymbol{3},\infty[$ $h(x)=\log_{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{5}^x\right) \Rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}$ $j(x)=\log_{\boldsymbol{0.5}}\left(\sqrt[3]{-x}\right) \Rightarrow \text{Continua en }]-\infty,\boldsymbol{0}[$ $k(x)=L\left(\dfrac{x^3+x}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases}\text{Continua en } \mathbb{R}-\{\boldsymbol{0}\}\\ \text{Discontinua evitable en } x=\boldsymbol{0}\end{cases}$
Trigonométricas	Dado que la composición de una función trigonométrica y otra cualquiera, da lugar a una expresión compleja, recordemos al menos la continuidad de dichas funciones "puras"	$f(x)=\text{sen}\,x \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbb{R}$ $g(x)=\cos x \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbb{R}$ $h(x)=\text{tg}\,x \Rightarrow \begin{cases} h \text{ continua en } \mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{\boldsymbol{2}}+k\cdot\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\\ h \text{ discontinua asintótica de salto infinito en } x=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{2}}+k\cdot\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $i(x)=\text{cosec}\,x \Rightarrow \begin{cases} i \text{ continua en } \mathbb{R}-\{k\cdot\pi / k\in\mathbb{Z}\}\\ i \text{ discontinua asintótica de salto infinito en } x=k\cdot\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $j(x)=\sec x \Rightarrow \begin{cases} j \text{ continua en } \mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{\boldsymbol{2}}+k\cdot\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\\ j \text{ discontinua asintótica de salto infinito en } x=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{2}}+k\cdot\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $k(x)=\text{cotg}\,x \Rightarrow \begin{cases} k \text{ continua en } \mathbb{R}-\{k\cdot\pi / k\in\mathbb{Z}\}\\ k \text{ discontinua asintótica de salto infinito en } x=k\cdot\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
Definidas a trozos	Continuidad en $\mathbb{R}-\left\{\begin{array}{l}\textit{valores que no toma la variable}\\ \textit{y puntos problemáticos de cada}\\ \textit{fórmula incluidos en su rango}\end{array}\right\}$ * En los puntos problemáticos aislados: -Discontinuidad evitable (si existe límite). -Discontinuidad de salto finito (si los dos límites laterales son números distintos). El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales. -Discontinuidad asintótica (si alguno o ambos límites laterales es $\pm\infty$). Será de salto infinito salvo cuando ambos límites laterales sean iguales e infinitos. * En los intervalos: -Continuidad por la derecha (origen) o por la izquierda (extremo), si están cerrados.	$f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\le\boldsymbol{0}\\ Lx & x>\boldsymbol{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dom\, f=\mathbb{R}\\ \text{Continua en } \mathbb{R}-\{\boldsymbol{0}\}\\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\boldsymbol{0}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+\boldsymbol{1} & x<-\boldsymbol{1}\\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{x} & x>-\boldsymbol{1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dom\, g=\mathbb{R}-\{-\boldsymbol{1};\boldsymbol{0}\}\\ \text{Continua en } \mathbb{R}-\{-\boldsymbol{1};\boldsymbol{0}\}\\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\boldsymbol{0}\\ \text{Discontinua de salto finito } \boldsymbol{1} \text{ en } x=-\boldsymbol{1}\end{cases}$ $h(x)=\begin{cases}x+\boldsymbol{1} & x\le-\boldsymbol{1}\\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{x} & x>-\boldsymbol{1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dom\, h=\mathbb{R}-\{\boldsymbol{0}\}\\ \text{Continua en } \mathbb{R}-\{-\boldsymbol{1};\boldsymbol{0}\}\\ \text{Discontinua de salto finito } \boldsymbol{1} \text{ en } x=-\boldsymbol{1}\\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\boldsymbol{0}\end{cases}$ $j(x)=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{1}}{x} & x\le-\boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{2}x+\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{2}<x\le-\boldsymbol{1}\\ \sqrt{x} & -\boldsymbol{1}<x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dom\, j=]-\infty,-\boldsymbol{1}]\cup[\boldsymbol{0},\infty[\\ \text{Continua en }]-\infty,-\boldsymbol{1}[\cup]\boldsymbol{0},\infty[-\{-\boldsymbol{2}\}\\ \text{Continua por la izquierda en } x=-\boldsymbol{1}\\ \text{Continua por la derecha en } x=\boldsymbol{0}\\ \text{Discontinua asintótica de salto finito } \dfrac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}} \text{ en } x=-\boldsymbol{2}\end{cases}$ $k(x)=\begin{cases}x & si \quad x\le\boldsymbol{0}, x\ne-\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{1} & si \quad x=-\boldsymbol{1}\\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{x} & si \quad \boldsymbol{0}<x<\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & si \quad x\ge\boldsymbol{1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dom\, k=\mathbb{R}\\ \text{Continua en } \mathbb{R}-\{-\boldsymbol{1};\boldsymbol{0};\boldsymbol{1}\}\\ \text{Discontinua evitable en } x=-\boldsymbol{1}\\ \text{Discontinua asintótica de salto infinito en } x=\boldsymbol{0}\\ \text{Discontinua de salto finito } \boldsymbol{1} \text{ en } x=\boldsymbol{1}\end{cases}$

Ejercicio 1. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN		CONTINUIDAD	FUNCIÓN		CONTINUIDAD
1	$p(x)$	$\mathbb{R}$	2	$q(x)$	$\mathbb{R}$
3	$r(x)$	$\left]-\infty,-1\right[$ Continuidad por la izquierda $x=-1$	4	$s(x)$	$\mathbb{R}$
5	$f(x)$	$\mathbb{R}-\{-3\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=-3$	6	$g(x)$	$\mathbb{R}-\{0\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=0$
7	$h(x)$	$\mathbb{R}-\{1\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=1$	8	$j(x)$	$\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Discontinuidad evitable $x=2$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=-2$
9	$k(x)$	$\mathbb{R}$	10	$l(x)$	$\mathbb{R}-\{0\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=0$
11	$m(x)$	$\mathbb{R}$	12	$n(x)$	$\mathbb{R}-\{-1;1\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=-1$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=1$
13	$a(x)$	$\left]-2,\infty\right[$	14	$b(x)$	$\mathbb{R}-\{0\}$ Discontinuidad asintótica salto infinito $x=0$
15	$c(x)$	$\left]-2,\infty\right[$	16	$d(x)$	$\left]\sqrt[3]{5},\infty\right[$

Ejercicio 2. Estudiar analíticamente la continuidad de las siguientes funciones, representándolas gráficamente con posterioridad.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2-x^2 & si \quad x\leq 2 \\ 2x-6 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x<3 \\ x^2 & si \quad 3\leq x<4 \\ 0 & si \quad 4\leq x \end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\leq 1 \\ x^2-1 & si \quad 1<x\leq 2 \\ x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x\leq -1 \\ 0 & si \quad -1<x \end{cases} \qquad t(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x<0 \\ \sqrt{x+1} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcula el verdadero valor de las funciones en los puntos que se indican:

	FUNCIÓN	PUNTO	VERDADERO VALOR		FUNCIÓN	PUNTO	VERDADERO VALOR
1	$f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$	$x=3$		2	$a(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}$	$x=0$	
3	$g(x)=\dfrac{5-\sqrt{24+x}}{x-1}$	$x=1$		4	$b(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$	$x=0$	
5	$h(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$	$x=2$		6	$c(x)=\dfrac{2x^2-2}{3x+3}$	$x=-1$	
7	$i(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$	$x=3$		8	$d(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$	$x=0$	
9	$j(x)=\dfrac{x^3+27}{x+3}$	$x=-3$		10	$p(x)=\dfrac{-3+\sqrt{5+x}}{x-4}$	$x=4$	
11	$k(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$	$x=0$		12	$q(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$	$x=0$	

Ejercicio 4. Estudiar los puntos y los tipos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & si \quad x<1\\ 0 & si \quad x\geq 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}1 & si \quad x=0\\ x & si \quad x\neq 0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}x+1 & si \quad x\leq 0\\ 0 & si \quad 0<x\leq 2\\ x & si \quad 2<x\end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<1\\ 3x & si \quad x>1\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}x+2 & si \quad -1<x\leq 0\\ 2 & si \quad x>0\end{cases} \qquad t(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si \quad x<0\\ \sqrt{x+1} & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

Ejercicio 5. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si \quad x\leq 1\\ 3-kx^2 & si \quad x>1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}x^2+kx & si \quad x\leq 2\\ k-x^2 & si \quad 2<x\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{kx^4-3x^3}{7x^5+3x^3} & si \quad x\neq 0\\ \dfrac{2}{5} & si \quad x=0\end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x} & si \quad x<-1\\ L(x+2) & si \quad x\geq -1\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}e^{kx} & si \quad x\leq 0\\ x+2k & si \quad x>0\end{cases} \qquad t(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2+x+k}{x-1} & si \quad x\neq 1\\ 6 & si \quad x=1\end{cases}$$

4.5. Principales teoremas de continuidad en intervalos cerrados y acotados.

Teorema de los ceros de BOLZANO

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado que toma valores de signo opuesto en los extremos, tiene al menos un cero en dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<\boldsymbol{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in \,]a,b[\; / \; f(c)=\boldsymbol{0}$$

Teorema del valor intermedio

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, toma cualquier valor comprendido entre las imágenes de los extremos de dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ k \text{ comprendido entre } f(a) \text{ y } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in \,]a,b[\; / \; f(c)=k$$

Demostración

Aplicar el T^{ma} de Bolzano a la función $g(x)=f(x)-k$.

Teorema

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza en éste un máximo y un mínimo absolutos.

$$f \text{ continua en } [a,b] \;\Rightarrow\; \exists c,d\in[a,b]\,/\,m=f(c)\le f(x)\le f(d)=M \quad \forall x\in[a,b]$$

4.6. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada).

2º Como ayuda para desarrollar y completar algunos apartados:

-Apuntes del profesor Jesús Escudero Martín del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca).
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/