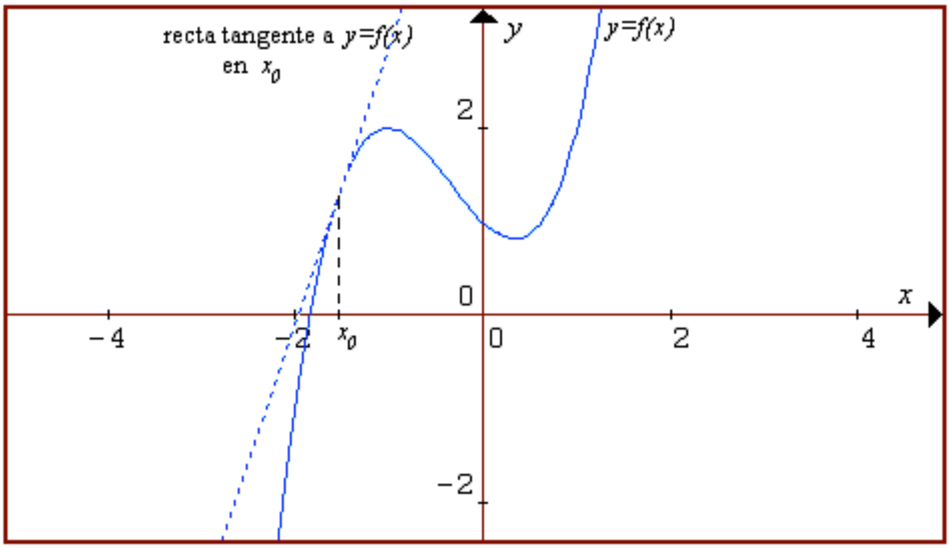
# Conceptos más importantes de derivación

**Definición formal de derivada:**

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Significado geométrico de la derivada:**

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$

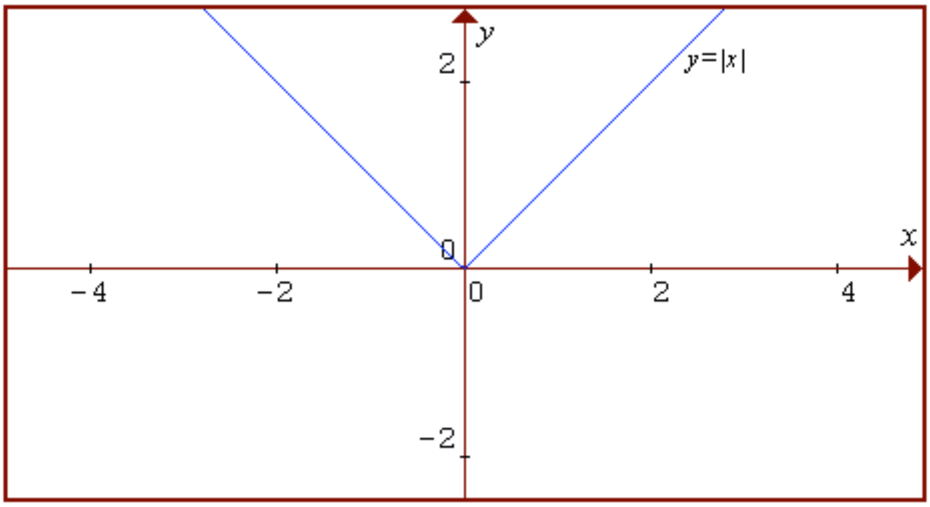



**Un resultado importante**:

$$\boxed{f \text{ derivable en } x_0} \Rightarrow \boxed{f \text{ continua en } x_0}$$

pero, ***OJO*** $\boxed{f \text{ continua en } x_0}$ NO $\Leftarrow$ $\boxed{f \text{ derivable en } x_0}$

Ejemplo de función continua no derivable:

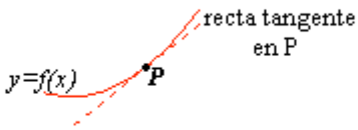


| |
|---|
| **Una función es derivable si:**<br>1. La función es continua.<br>2. Las derivadas laterales coinciden. |
| **Nuevas formas de derivación:**<br>- <u>Derivación implícita</u> (recordar que siempre hay que derivar $y$, obteniendo $y'$ en la expresión de la derivada)<br>- <u>Derivación logarítmica</u> (recordar las propiedades de los logaritmos) |

## Características de una función a partir del comportamiento de sus derivadas

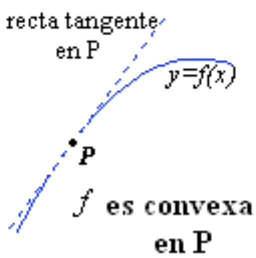
**Unas definiciones:**

- $$\left( \begin{array}{c} f \text{ tiene un } \textbf{máximo relativo} \\ \text{en } \left(x_0, f(x_0)\right) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} \text{Existe un número } a \text{ tal que} \\ \text{si } x \in \left(x_0 - a,\ x_0 + a\right) \\ \text{entonces } f(x) < f(x_0) \end{array} \right)$$
  es decir, $f(x_0)$ es el mayor valor en los alrededores de $x_0$.
- Análogamente se define **mínimo relativo** ( $f(x_0)$ es el menor valor en los alrededores de $x_0$ ).
- Al máximo y mínimo relativo se les denomina **extremos relativos**
- ***OJO*** el máximo absoluto es el mayor valor de la función en el intervalo de definición (análogamente se define mínimo absoluto).
- Se dice que $\left(x_0, f(x_0)\right)$ es un **punto crítico** de $y = f(x)$ si $f'(x_0) = 0$, es decir los puntos críticos son los de tangente horizontal. Puede ser un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión (def más adelante).
- La curva $y = f(x)$ es **cóncava** en el punto P si la recta tangente en P queda por debajo de la curva.




*f* **es cóncava en P**

- La curva $y = f(x)$ es **convexa** en el punto P si la recta tangente en P queda por encima de la curva.




*f* **es convexa en P**

- Si la tangente atraviesa la curva en P, entonces P es **punto de inflexión**.


***P*** **es un punto de inflexión**

**Resultados más importantes:**

Monotonía:

1. Si $f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow f$ crece en $x_0$
2. Si $f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow f$ decrece en $x_0$

Extremos relativos:

3. Los CANDIDATOS a extremos relativos son los puntos tales que $f'(x_0) = 0$
4. Si $f'(x_0) = 0$ y $\begin{cases} \text{si } f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \big(x_0, f(x_0)\big) \text{ es mínimo relativo} \\ \text{si } f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \big(x_0, f(x_0)\big) \text{ es máximo relativo} \end{cases}$

Curvatura:

5. Si $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow f$ es cóncava en $x_0$
6. Si $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow f$ es convexa en $x_0$

Puntos de inflexión:

7. Los CANDIDATOS a puntos de inflexión son los puntos tales que $f''(x_0) = 0$
8. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x_0$

Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión:

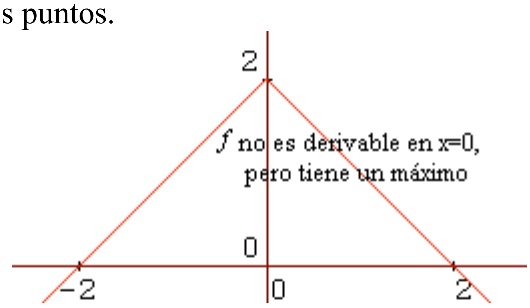
9. Si $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{n)}(x_0) \neq 0$

entonces si $\begin{cases} n \text{ es par, } \big(x_0, f(x_0)\big) \text{ es extremo y } \begin{cases} \text{si } f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \big(x_0, f(x_0)\big) \\ \qquad \text{es mínimo relativo} \\ \text{si } f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \big(x_0, f(x_0)\big) \\ \qquad \text{es máximo relativo} \end{cases} \\ n \text{ es impar, } \big(x_0, f(x_0)\big) \text{ es punto de inflexión} \end{cases}$

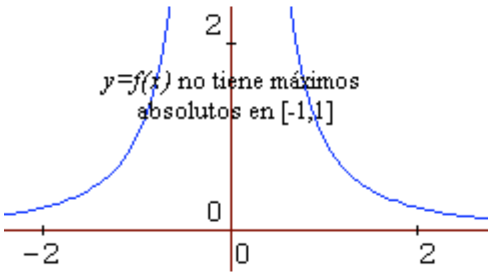
**Cálculo de los extremos absolutos de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$**

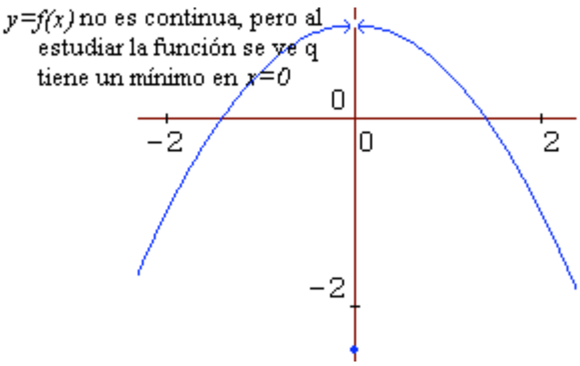
1. Si $f(x)$ es derivable en $[a,b]$, los extremos absolutos se encuentran entre los puntos críticos y los correspondientes a los extremos de los intervalos.
   - Se resuelve $f'(x)=0$
   - Se escogen las raíces $x_0, x_{1,\dots,} x_n$ que están en $[a,b]$
   - Se calcula $f(a), f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ y $f(b)$
   - Entre estos valores se busca el máximo y el mínimo

2. Si hay puntos en los que $f$ no es derivable pero sí continua, se calculará también los valores en esos puntos.




3. Si $f$ no es continua en algún punto se estudia el comportamiento de la función en las cercanías del punto de discontinuidad.




**Optimización:**

**Recuerda** que los puntos que anulan la primera derivada son los candidatos a máximos y mínimos relativos a la hora de hacer los ejercicios de optimización, **compruébalo siempre**.

**Regla de L'Hôpital**

Los límites que dan lugar a indeterminaciones del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ó $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$, pueden calcularse derivando el numerador y el denominador y calculando el límete del cociente de sus derivadas.

## Dos teoremas importantes:

**Teorema de Rolle:**

Sea $f$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Si $f(a)=f(b)$, existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

**Teorema del valor medio:**

Si $f$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$