5. DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN.

5.1. Derivada de una función en un punto.

La *tasa de variación* de una función $f(x)$ es la variación que experimentan las imágenes cuando se produce una variación en la variable x, y el valor h en que se incrementa la variable, recibe el nombre de *incremento.* Expresado en términos algebraicos: $\Delta f(a,h)=f(a+h)-f(a)$

Podemos calcular la tasa de variación en un punto concreto, con un incremento concreto o en general.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x+1 \\ a=2 \\ h=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta f(2,1)=f(2+1)-f(2)=f(3)-f(2)=7-5=2 \\ \Delta f(x,1)=f(x+1)-f(x)=\left[2(x+1)+1\right]-\left[2x+1\right]=2x+2+1-2x-1=2 \\ \Delta f(x,h)=f(x+h)-f(x)=\left[2(x+h)+1\right]-\left[2x+1\right]=2x+2h+1-2x-1=2h \end{array}\right.$$

Esta tasa nos da una idea de la rapidez con que crece o decrece una función en un intervalo, pero no es lo suficientemente precisa. Para tener una idea más exacta, necesitaríamos conocer cuánto crece la función por cada unidad que crece la variable. Por eso se define la *tasa de variación media (TVM)* o *cociente incremental* como la razón entre la tasa de variación y el incremento:

$$TVM(f)=\frac{\Delta f(a,h)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ a=1 \\ h=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} TVM\left[f(1,2)\right]=\dfrac{\Delta f(1,2)}{2}=\dfrac{f(1+2)-f(1)}{2}=\dfrac{9-1}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ TVM\left[f(x,1)\right]=\dfrac{\Delta f(x,2)}{2}=\dfrac{f(x+2)-f(x)}{2}=\dfrac{x^2+4x+4-x^2}{2}=\dfrac{4x+4}{2}=2x+2 \\ TVM(f)=\dfrac{\Delta f(x,h)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\dfrac{h(2x+h)}{h}=2x+h \end{array}\right.$$

La *derivada* de una función $f(x)$ en un punto $x=a$, y la representaremos $f'(a)$, se define como el límite, si existe y es finito, de la tasa de variación media cuando el incremento tiende a 0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Si dicho límite existe, también se dice que la función $f(x)$ es derivable en $x=a$.

Ejemplos: Para cada una de las funciones siguientes, calcula $f'(7)$.

$$f(x)=2x+5 \Rightarrow f'(7)=\lim_{h\to 0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{14+2h+5-19}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(7)=\lim_{h\to 0}\frac{343+147h+21h^2+h^3-343}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(h^2+21h+147)}{\cancel{h}}=147$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(7)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{7+h}-\sqrt{7}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{7+h}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})}{h\cdot(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{7}+h-\cancel{7}}{h\cdot(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Por tanto, para que la derivada exista, los dos límites laterales puntuales deben existir y ser iguales. Dichos límites reciben el nombre de *derivada por la derecha* y *derivada por la izquierda*:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a^-) \text{ y } \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a^+)$$

Si ambos existen pero son distintos, diremos que la función tiene un *punto anguloso* o *pico*.

La *función derivada* es aquella que asigna a cada punto, el valor de la derivada en dicho punto, es decir, $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (donde el límite exista). Por tanto, toda función será derivable en $Dom\, f \cap Dom\, f'$.

Análogamente, la función que asigna a cada punto el valor de la derivada de la función derivada en dicho punto, recibe el nombre de *derivada segunda* de la función: $f''(x)=[f']'(x)$. Y así, sucesivamente, podemos definir la *derivada tercero*, *derivada cuarta*,…

Ejemplos:

$*f(x)=4 \Rightarrow f(x+h)=4$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$*I(x)=x \Rightarrow I(x+h)=x+h$

$$I'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$*f(x)=x^2 \Rightarrow f(x+h)=(x+h)^2=x^2+h^2+2\cdot x\cdot h$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2+2\cdot x\cdot h-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+2x)}{h}\overset{\text{Indet}}{=}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(h+2x)}{\cancel{h}}=2x$$

$*f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f(x+h)=\sqrt{x+h}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicios:

1. Calcula la tasa de variación media de la función $y = x^2 + x - 3$ en los intervalos:
   a) [-1,0]; b) [0,2]; c) [2,3]. *Sol: a) 0; b) 3; c) 6*

2. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [0,2] para las funciones:
   a) $y = x^3 - x^2 + 3$ b) $y = x^4 + 2x^2 - x$ c) $y = x^2 + 2$
   d) $y = 4x^2 + \sqrt{2x}$ e) $y = x^2 + x + 1$ f) $y = \dfrac{1}{x-1}$
   Sol: a) 2; b) 11; c) 2; d) 9; e) 3; f) 1

3. Calcula la tasa de variación media de $f(x) = 3x^2 - 1$ en los intervalos:
   a) [0,2]; b) [1,3]; c) [-2,4]. *Sol: a) 6; b) 12; c) 6*

4. Calcula, aplicando la definición, la derivada de las funciones siguientes en el punto de abscisa $x=1$.
   a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = x^2 + x + 3$ c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$ d) $f(x) = 3x - 1$
   Sol: a) 2; b) 3; c) -2; d) 3

5. Calcula, aplicando la definición de derivada, la derivada de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x=2$:
   a) $f(x) = x^3 + x^2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$
   Sol: a) 16; b) 2; c) 0; d) 5

6. Calcula la tasa de variación media de la función $y=x^3-3x$ en los intervalos:
   a) [-2,0] b) [0,2] c) [2,4] *Sol: a) 1; b) 1; c) 26*

7. Dada la función $f(x) = x^2-2$, halla la tasa de variación media en el intervalo [2,3]. *Sol: 5*

8. Compara la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2+2x$ y $g(x)=x^3$ en los intervalos a) [0,1] y b) [1,2] y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.
   Sol: a) 3, 1; b) 5, 7

9. Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(-1)$, siendo $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.
   Sol: f'(0)=5/4; f'(1)=5/9; f'(-1)=5

10. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x=1$, utilizando la definición de derivada:
    a) $f(x)=x^2+1$ b) $f(x)=(3x-2)^2$ c) $f(x)=2/x$ d) $f(x)=1/(x+1)$
    Sol: a) 2; b) 6; c) -2; d) -1/4

5.2. Reglas de derivación.

Son las reglas que nos permiten estudiar el comportamiento de la derivada con respecto a las operaciones con funciones. Se obtienen desarrollando en la definición de derivada que hemos dado anteriormente. Las podemos resumir en el siguiente cuadro:

Reglas de derivación	Ejemplos
<u>Derivada de la función suma (resta):</u> $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ La derivada de una suma (resta) se realiza derivando cada función y después sumando (restando)	$\left(x^2-x+4\right)'=\left(x^2\right)'-\left(x\right)'+\left(4\right)'=2x-1$ $\left(\sqrt{x}-x+5\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$
<u>Derivada de un producto:</u> $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ Caso particular: $(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$ La derivada de un producto se realiza derivando el primer factor por el otro sin derivar, más el primero sin derivar por la derivada del segundo factor.	$\left(x\cdot\sqrt{x}\right)'=1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $\left(x^3\right)'=\left(x\cdot x^2\right)'=1\cdot x^2+x\cdot 2x=x^2+2x^2=3x^2$ $\left(4\cdot x^2\right)'=4'\cdot x^2+4\cdot\left(x^2\right)'=0\cdot x^2+4\cdot 2x=8x$ $\left(x\cdot x^2\cdot x^3\right)'=x'\cdot x^2\cdot x^3+x\cdot\left(x^2\right)'\cdot x^3+x\cdot x^2\cdot\left(x^3\right)'=$ $=x^2\cdot x^3+x\cdot 2x\cdot x^3+x\cdot x^2\cdot 3x^2=6x^5$
<u>Derivada de una potencia (de exponente racional):</u> $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}\quad\forall n\in\mathbb{Q}$ La derivada de una potencia de exponente racional se realiza multiplicando el exponente por la potencia elevada a un exponente menos.	$\left(x^4\right)'=4x^3$ $\left(\dfrac{2}{x^2}\right)'=\left(2x^{-2}\right)'=2\cdot(-2)\cdot x^{-3}=\dfrac{-4}{x^3}$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\dfrac{3}{5}\cdot x^{\frac{-2}{5}}=\dfrac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}$
<u>Derivada de un cociente:</u> $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Caso particular: $\left(\dfrac{k}{f}\right)'(x)=\dfrac{-k\cdot f'(x)}{f^2(x)}$ La derivada de un cociente se realiza derivando el n^dor^ por el d^dor^ sin derivar, menos el n^dor^ sin derivar por el d^dor^ derivado, y todo ello dividido por el cuadrado del d^dor^.	$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+1}\right)'=\dfrac{(4x-3)\cdot(x+1)-\left(2x^2-3x\right)\cdot 1}{(x+1)^2}$ $\left(\dfrac{4}{x}\right)'=\dfrac{(4)'\cdot x-4\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{0\cdot x-4\cdot 1}{x^2}=\dfrac{-4}{x^2}$
<u>Regla de la cadena:</u> $(f\circ g)'(x)=\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ La derivada de una composición de funciones se realiza derivando cada una de las funciones que aparecen y multiplicando los resultados.	$\left(\sqrt{4x^3}\right)'=\underbrace{\boxed{\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{4x^3}}}}_{\text{derivada de la raíz}}\cdot\underbrace{\boxed{12x^2}}_{\text{derivada del radicando}}$ $\left[\left(3x^2+2x\right)^3\right]'=\underbrace{\boxed{3\cdot\left(3x^2+2x\right)^2}}_{\text{derivada de la potencia}}\cdot\underbrace{\boxed{(6x+2)}}_{\text{derivada de la base}}$
<u>Potencial-exponencial:</u> $\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\}'=g(x)\cdot[f(x)]^{g(x)-1}\cdot f'(x)+g'(x)\cdot[f(x)]^{g(x)}\cdot\mathrm{L}[f(x)]$	$\left[(2x)^{Lx}\right]'=Lx\cdot x^{-1+Lx}\cdot 2+(2x)^{Lx}\cdot L(2x)\cdot\dfrac{1}{x}$

Demostraciones

$$(f+g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

$$(f-g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-g(x+h)-\left[f(x)-g(x)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)-g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)\boxed{-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x+h)}-f(x)\cdot g(x+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)\boxed{-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x)}-f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot\left[g(x+h)-g(x)\right]}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}=$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}-\frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f\circ g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$y=[f(x)]^{g(x)}\quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\cdot\ln[f(x)]\quad\Rightarrow\quad\frac{y'}{y}=g'(x)\cdot\ln[f(x)]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\quad\Rightarrow$$

$$y'=\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\}'=[f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln[f(x)]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]=$$

$$=g(x)\cdot[f(x)]^{g(x)-1}\cdot f'(x)+g'(x)\cdot[f(x)]^{g(x)}\cdot\ln[f(x)]$$

5.3. Derivada de las funciones elementales.

FUNCIÓN	DERIVADA	COMPOSICIÓN	Ejemplos
Constante: $f(x)=k \quad k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$		$f(x)=3 \Rightarrow f'(x)=0$ $f(x)=-7 \Rightarrow f'(x)=0$ $f(x)=2/5 \Rightarrow f'(x)=0$ $f(x)=\pi \Rightarrow f'(x)=0$
Identidad: $I(x)=x$	$I'(x)=1$		
Potencia: $f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{Q}$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$\left[(g(x))^n\right]'=n\cdot\left[g(x)\right]^{n-1}\cdot g'(x)$	$f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$ $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-1\cdot x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$ $f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{-2}{5}}=\frac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}$ $f(x)=(3x-1)^2 \Rightarrow f'(x)=2\cdot(3x-1)\cdot 3$
Raíz cuadrada: $f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\left[\sqrt{g(x)}\right]'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$	$f(x)=\sqrt{3x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3$ $f(x)=\sqrt{5x^3-2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x^3}}\cdot\left(15x^2-2\right)$
Raíz: $f(x)=\sqrt[n]{x} \quad n\in\mathbb{N}$	$f'(x)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left[\sqrt[n]{g(x)}\right]'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}\cdot g'(x)$	$f(x)=\sqrt[7]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{7\cdot\sqrt[7]{x^6}}$ $f(x)=\sqrt[5]{x^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^3\right)^4}}\cdot 3x^2=\frac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}$ $f(x)=\sqrt[4]{-x^2+4x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{\left(-x^2+4x\right)^3}}\cdot(-2x+4)$
Exponencial: $f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot La$	$\left[a^{g(x)}\right]'=a^{g(x)}\cdot La\cdot g'(x)$	$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$ $f(x)=7^x \Rightarrow f'(x)=7^x\cdot L7$ $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}-2x^2} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}-2x^2}\cdot L\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x\right)$
Logaritmo: $f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{La}$	$\left[\log_a g(x)\right]'=\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{La}\cdot g'(x)$	$f(x)=Lx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $f(x)=\log_2 x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{L2}$ $f(x)=\log_{0,5}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1/x}\cdot\frac{1}{L0'5}\cdot\frac{-1}{x^2}$
Seno: $f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$	$\left[\operatorname{sen} g(x)\right]'=\cos g(x)\cdot g'(x)$	$f(x)=\operatorname{sen}\left(2x^2-x\right) \Rightarrow f'(x)=(4x-1)\cdot\cos\left(2x^2-x\right)$
Coseno: $f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$	$\left[\cos g(x)\right]'=-\operatorname{sen} g(x)\cdot g'(x)$	$f(x)=\cos\left(\sqrt{3x^3}\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{-9x^2}{\sqrt{3x^3}}\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{3x^3}\right)$
Tangente: $f(x)=\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left[\operatorname{tg} g(x)\right]'=\frac{1}{\cos^2 g(x)}\cdot g'(x)$	$f(x)=\operatorname{tg}(\log x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2(\log x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{L10}$

Demostraciones

$$\boxed{y=\ln x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x}}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln\left\{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}=\frac{1}{x}\cdot\ln e=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{y=\log_a x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}}$$

$$y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{y=a^x \quad\Rightarrow\quad y=a^x\cdot\ln a}$$

$$y=a^x \quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln a^x=x\cdot\ln a \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=1\cdot\ln a=\ln a \quad\Rightarrow\quad y'=y\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

$$\boxed{y=x^n \quad\Rightarrow\quad y'=n\cdot x^{n-1}}$$

$$y=x^n \quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln x^n=n\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=n\cdot\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad y'=n\cdot x^n\cdot\frac{1}{x}=n\cdot x^{n-1}$$

$$\boxed{y=\sqrt[n]{x^m} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{m}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-m}}}}$$

$$y=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}} \quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln x^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-n}{n}}=\frac{m}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$\boxed{y=\operatorname{sen} x \quad\Rightarrow\quad y'=\cos x}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos h+\cos x\cdot\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cdot[-1+\cos h]+\cos x\cdot\operatorname{sen} h}{h}=$$

$$=\operatorname{sen} x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[-1+\cos h]}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=\operatorname{sen} x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\operatorname{sen} x}$$

$$y=\cos x=\operatorname{sen}(90^\circ-x) \quad\Rightarrow\quad y'=\cos(90^\circ-x)\cdot(-1)=-\operatorname{sen} x$$

$$\boxed{y=\operatorname{tg} x \quad\Rightarrow\quad y'=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x}$$

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\operatorname{sen} x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$$

Ejercicios:

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado):

	FUNCIÓN	DERIVADA
a)	$y = 5x^6 - 3x^5 + 3x^3 - 2$	$y' = 30x^5 - 15x^4 + 9x^2$
b)	$y = x^{-4} + 2x^{-3} + x - 4$	$y' = -4x^{-5} - 6x^{-4} + 1$
c)	$y = 3x^{10} + 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$	$y' = 30x^9 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$
d)	$y = \sqrt{3} \cdot x^3 - \pi \cdot x + \sqrt{3}$	$y' = 3\sqrt{3} \cdot x^2 - \pi$
e)	$y = 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} + x^5$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2} + 5x^4$
f)	$y = 4x^3 + 2x^3 - x^3 + 4$	$y' = 15x^2$
g)	$y = \sqrt{x^2 - 3x}$	$y' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$
h)	$y = \sqrt[3]{(x^2 - 3x)^2}$	$y' = \dfrac{2\,(x^2 - 3x)(2x - 3)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x)^4}} = \dfrac{2(2x - 3)}{3\sqrt[3]{x^2 - 3x}}$
i)	$y = \left(2\sqrt{x} - 3x\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(2\sqrt{x} - 3x\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)$
j)	$y = \left(3x^2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(3x^2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2 \cdot \left(6x - \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\right)$
k)	$y = \dfrac{x}{5}$	$y' = \dfrac{1}{5}$
l)	$y = \dfrac{5}{x}$	$y = \dfrac{-5}{x^2}$
m)	$y = \dfrac{x^4 - 3x}{4}$	$y' = \dfrac{4x^3 - 3}{4}$
n)	$y = \dfrac{x^3 - 3}{x}$	$y' = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2} = 2x + \dfrac{3}{x^2}$
ñ)	$y' = x^2 - \dfrac{3}{x}$	$y' = 2x + \dfrac{3}{x^2}$
o)	$y = \dfrac{(x^4 - 3x)^2}{3}$	$y' = \dfrac{2\,(x^4 - 3x) \cdot (4x^3 - 3)}{3}$
p)	$y = \dfrac{(x - 1)^3}{3\,x}$	$y' = \dfrac{3(x - 1)^2 \cdot 3x - 3(x - 1)^3}{(3x)^2}$
q)	$y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$	$y' = \dfrac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$
r)	$y = \dfrac{\sqrt{3x}}{x}$	$y' = \dfrac{\dfrac{3}{2\sqrt{3x}} \cdot x - \sqrt{3x}}{x^2}$

FUNCIÓN		DERIVADA
s)	$y=\sqrt{\dfrac{3}{x}}$	$y'=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{-3}{x^2}$
t)	$y=\dfrac{x}{\sqrt{3x}}$	$y'=\dfrac{\sqrt{3x}-x\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}}{3x}$
u)	$y=ln(3x-1)$	$y'=\dfrac{3}{3x-1}$
v)	$y=L(x^2-3x)$	$y'=\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$
w)	$y=ln\sqrt{x-2}$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{2(x-2)}$
x)	$y=\log_2(3x^2)$	$y'=\dfrac{6x}{3x^2\cdot ln2}$
y)	$y=e^{x^2}$	$y'=e^{x^2}\cdot 2x$
z)	$y=e^{x^2-2x}$	$y'=e^{x^2-2x}\cdot(2x-2)$
aa)	$y=2^x$	$y'=2^x\cdot\ln 2$
ab)	$y=3e^{x^2-3x}$	$y'=3e^{x^2-3x}\cdot(2x-3)$
ac)	$y=(x^2-1)\cdot(x-1)$	$y'=2x(x-1)+(x^2-1)$
ad)	$y=x^2\cdot ln\,x$	$y'=2x\cdot ln\,x+\dfrac{x^2}{x}=2x\cdot ln\,x+x$
ae)	$y=x^4\cdot e^{3x}$	$y'=4x^3\cdot e^{3x}+x^4\cdot e^{3x}\cdot 3=e^{3x}\cdot\left(4x^3+3x^4\right)$
af)	$y=\dfrac{1}{L\sqrt{x}}$	$y'=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(L\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{-1}{2x\left(L\sqrt{x}\right)^2}$
ag)	$y=\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+1}\right)^3$	$y'=3\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+1}\right)^2\cdot\dfrac{2x\,(x^2+1)-(x^2-3)\,2x}{(x^2+1)^2}$
ah)	$y=\left(\dfrac{Lx^2}{x^3-2}\right)^2$	$y'=2\left(\dfrac{Lx^2}{x^3-2}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{2x}{x^2}(x^3-2)-Lx^2\cdot 3x^2}{(x^3-2)^2}$
ai)	$y=\dfrac{Lx}{3^x}$	$y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot 3^x-Lx\cdot 3^x\cdot L3}{(3^x)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-Lx\cdot L3}{3^x}$
aj)	$y=\dfrac{3x^4-2x^2+3x-2}{2x-1}$	$y'=\dfrac{(12x^3-4x+3)(2x-1)-(3x^4-2x^2+3x-2)\cdot 2}{(2x-1)^2}$
ak)	$y=L\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)^3$	$y'=\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^3\cdot 3\cdot\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-2x\,(x+2)}{x^4}$

FUNCIÓN		DERIVADA
al)	$y=\operatorname{sen} x^3$	$y=\cos x^3\cdot 3x^2$
am)	$y=\cos 7^x$	$y'=-\operatorname{sen}7^x\cdot 7^x\cdot\ln 7$
an)	$y=\cos^2(5x^2-3x)$	$y'=-2\cdot\cos\left(5x^2-3x\right)\cdot\operatorname{sen}\left(5x^2-3x\right)\cdot\left(10x-3\right)$
añ)	$y=\operatorname{cosec}\left(\ln x\right)$	$y'=-\operatorname{cotg}\left(\ln x\right)\cdot\operatorname{cosec}\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x}$
ao)	$y=\operatorname{tg}^3\left(2\sqrt{x}\right)$	$y'=3\cdot\operatorname{tg}^2\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\sec^2\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
ap)	$y=2^{\ln(\cos x)}$	$y'=2^{\ln(\cos x)}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\left(-\operatorname{sen}x\right)=-2^{\ln(\cos x)}\cdot\ln 2\cdot\operatorname{tg}x$
aq)	$y=\sqrt{\operatorname{sen}x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\cdot\cos x=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}x}}{2}\cdot\operatorname{cotg}x$
ar)	$y=\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$	$y'=\cos\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}$
as)	$y=\operatorname{arctg}x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
at)	$y=\operatorname{arcsen}x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
au)	$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
av)	$y=\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}$	$y'=\sec^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
aw)	$y=\ln\left(\sec x^2\right)$	$y'=\dfrac{1}{\sec x^2}\cdot\sec x^2\cdot\operatorname{tg}x^2\cdot 2x=2x\cdot\operatorname{tg}x^2$
ax)	$y=\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen}x\right)$	$y'=2x$
ay)	$y=e^{\operatorname{cosec}x}$	$y'=-e^{\operatorname{cosec}x}\cdot\operatorname{cosec}x\cdot\operatorname{cotg}x$
az)	$y=\ln\left(\operatorname{tg}^2 3x\right)$	$y'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 3x}\cdot 2\cdot\operatorname{tg}3x\cdot\sec^2 3x\cdot 3=\dfrac{6}{\operatorname{sen}3x\cdot\cos 3x}$
bb)	$y=\dfrac{\ln x}{\operatorname{sen}x}$	$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x-\ln x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$
bc)	$y=x^x$	$y'=x\cdot x^{x-1}+x^x\cdot\ln x=x^x\cdot\left(1+\ln x\right)$
bd	$y=x^{\operatorname{tg}x}$	$y'=\operatorname{tg}x\cdot x^{-1+\operatorname{tg}x}+x^{\operatorname{tg}x}\cdot\ln\left(\operatorname{tg}x\right)\cdot\sec^2 x$

2. Encuentra la función derivada de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ b) $y = 0,2x^2 + 0,35x - 0,16$

c) $y = 4x^2 - x + 2$ d) $y = x^{10} + 3x^9 - 2x^5 + 3x^3 - 2$

Sol: a) $12x^3$-$6x^2$+2x-3; b) 0,4x+0,35; c) 8x-1; d) $10x^9$+$27x^8$-$10x^4$+$9x^2$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^4$ b) $y = (x-1)^4$ c) $y = x^3$ d) $y = (x-1)^3$

Sol: a) $4x^3$; b) $4(x-1)^3$; c) $3x^2$; d) $3(x-1)^2$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^5 - 3x^4 - 3x$ b) $y = 2x - 3$ c) $y = \frac{2}{3}x^3 - \sqrt{x} + \frac{3}{x}$

d) $y = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 3\sqrt{x}$ e) $y = (x+3)^2$ f) $y = (x+2)\cdot(x+1)$

Sol: a) $20x^4$-$12x^3$-3; b) 2; c) $2x^2$-1/(2$\sqrt{x}$)-3/x^2; d) 5x+2-3/(2$\sqrt{x}$); e) 2(x+3); f) 2x+3

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = L\,(3x^4 - 3x^3)$ b) $y = \sqrt{3x+2}$ c) $y = \frac{x^2+3}{x^3+3}$

d) $y = (2x^3 + 3x^2)\cdot(3x^2 - 2x)$ e) $y = \sqrt{x^2+2}$ f) $y = \frac{-2}{x}$

g) $y = \frac{4x^3+2}{x^2+x}$ h) $y = \ln\sqrt{x+1}$ i) $y = \frac{x^2-3}{2x+5}$

j) $y = \frac{3x-2}{5}$ k) $y = \frac{2x-1}{x^2-x}$

Sol: a) $y = \frac{12x^3 - 9x^2}{3x^4 - 3x^3}$; b) $y = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$; c) $y = \frac{2x(x^3+3) - 3x^2(x^2+3)}{(x^3+3)^2}$;

d) $y = (6x^2+6x)\ .\ (3x^2-2x) + (2x^3+3x^2)\ .\ (6x-2)$;

e) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$; f) $y = \frac{2}{x^2}$; g) $y = \frac{12x^2.(x^2+x) - (4x^3+2).(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; i) $y = \frac{2x\ (2x+5) - (x^2-3)\ .\ 2}{(2x+5)^2}$; j) $y = \frac{3}{5}$;

k) $y = \frac{2(x^2-x) - (2x-1)^2}{(x^2-x)^2}$

6. Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

a) $y = 3x^2 + 2x - 1 \quad en \quad x = 1$ b) $y = \dfrac{1}{2x+1} \quad en \quad x = 0$

c) $y = (x^2 - 1)^3 \quad en \quad x = \dfrac{1}{2}$ d) $y = \dfrac{x^2}{3} - \sqrt{x-1} \quad en \quad x = 2$

e) $y = \dfrac{2}{(x-1)^2} \quad en \quad x = -1$ f) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} \quad en \quad x = 2$

Sol: a) 8; b) -2; c) 27/16; d) π+1; e) 5/6; f) 0; g) 1/2; h) 2; i) 3/16

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones en $x=3$:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *Sol: a) 1/4; b) -1*

8. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^2-2}$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{x-2}}$

Sol: a) $y = e^{x^2-2} \cdot 2x$ *; b)* $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$ *; c)* $y = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2}{x-2}}} \cdot \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2}$

9. Deduce las derivadas de las funciones arcosecante, arcocosecante y arcocotangente.

10. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

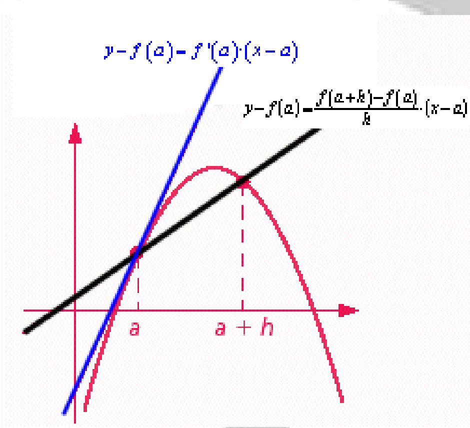
11. Calcular los valores de m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

12. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = |\cos x| \quad \text{en} \quad [0, \pi]$ b) $f(x) = (1 - |x|)^2 \quad \text{en} \quad [-1, 1]$

5.4. Interpretación geométrica de la derivada.

Gráficamente, la tasa de variación media es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ y, por tanto, la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$, es la pendiente de la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x=a$, es decir, en el punto $(a, f(a))$. Así pues, podemos escribir la ecuación de dicha recta tangente (en su forma punto-pendiente): $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$



Ejercicios:

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ *en* $x = a$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que $f'(a) = 3$. *Sol: y=3x*

2. Dada la función definida mediante $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$. Halla la ecuación de las rectas tangentes en a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = -1$.
   Sol: a) y=2x-1; b) y=7x-4; c) y=3x

3. Un móvil lleva un movimiento rectilíneo cuya relación entre la distancia recorrida x (en metros) y el tiempo empleado t (en segundos) es $x = 3t^2 + 2$.
   a) Calcula su velocidad media entre t=2 y t=4 seg.
   b) Calcula la velocidad instantánea para t=5 seg.
   Sol: a) 18 m/s; b) 30 m/s

4. La recta tangente a una cierta función $f(x)$ en x=1 es y=3x+2. ¿Cuánto vale $f'(1)$?. Si en x=2 la recta tangente es y=-x+5, ¿cuánto vale $f'(2)$?
   Sol: f'(1)=3; f'(2)=-1

5. Encuentra la recta tangente a $y=x^2$ en el punto (0,0) y dibuja su gráfica. Sol: y=0

6. El espacio x (en metros) recorrido por un coche en un tiempo t (en segundos) viene dado por $x=t^2+3t$.
   a) Calcula lo que indica el velocímetro cuando $t=3$ segundos.
   b) Calcula la velocidad cuando ha recorrido 10 metros.
   Sol: a) 9m/s; b) 7m/s

7. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a $y=x^2/3$ en los puntos de abscisas $x=0$, $x=1$ y $x=2$. *Sol: y=0; y=2x/3 - 1/3; y=4x/3 - 4/3*

8. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a $y=x$ en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=9$.
   Sol: x=0, y=-x/6 - 9/6

9. Halla un punto de la función $y=x^3+x^2+x$ en el que la tangente sea paralela a la recta $y=2x+5$. *Sol: x=-1; x=1/3*

10. ¿Para que valores de x la tangente a las curvas de las siguientes funciones, será paralela al eje OX?: a) $f(x)=x^2-8x$ b) $f(x)=x^3-12$ c) $f(x)=3x+1$
    Sol: a) x=4; b) x=0; c) Nunca

11. Calcula el valor de a para que $f'(2)=2$, siendo $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x}$. *Sol: a=-4*

12. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $y=\mathrm{L}x$ en el punto de abscisa $x=1$.
    Sol: y=x

13. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x+3$ la tangente es paralela al eje de abscisas? *Sol: x=2*

14. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^3+x$ en el punto P(1,0). *Sol: y=4x-4*

15. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-x+2$ en el punto $x=1$. Escribe la ecuación de la recta tangente. *Sol: m=1; y=x+2*

16. Escribe las ecuaciones de las tangentes a $y=x^2-4x+3$ en los puntos en que esta parábola corta al eje de abscisas. *Sol: y=-2x+2; y=2x-6*

17. Calcula la pendiente de la tangente a la curva $y=x^2-3x+2$ en el punto de abscisa $x=2$.
    Sol: m=1

18. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=5x^2-8x+1$ en el punto de abscisas $x=2$.
Sol: y=12x-19

19. Halla la tangente a la curva $y=1/x$ en el punto de abscisas $x=2$. *Sol: y=-x/4+1*

20. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=x^3-3x^2+2x+1$ en el punto de abscisa $x=-1$.
Sol: y=11x+6

21. Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $y=x^2+2x-2$ en los puntos donde su ordenada es igual a su abscisa. *Sol: y=4x-3; y=-2x-6*

22. Halla la tangente a la curva $y=x/(1+x)$ en el origen de coordenadas. *Sol: y=x*

23. Halla los puntos de la gráfica de la función $y=x^3-3x^2-9x+2$ en los cuales la tangente es paralela al eje *OX*. *Sol: x=-1, x=3*

24. Calcular los puntos en que las tangentes a la curva $y=x^2+7x+7$ son paralelas a la recta $y=3x$.
Sol: x=-2

25. Determina a para que valga 2 la pendiente de la tangente a la curva $y=\dfrac{x-a}{x+a}$ en el punto de abscisa $x=0$. *Sol: a=1*

26. Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y=x^3+2x-1$ en el punto de abscisa $x=1$. *Sol: a) y=5x-3; y=x/5 + 9/5*

27. Halla k para que la tangente a la curva $y=\dfrac{x+1}{x^2}$ en el punto de abscisa $x=1$ sea perpendicular a la recta $y=kx$. *Sol: k=1/3*

28. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\mathrm{L}(x+1)$ en $x=0$. *Sol: y=x*

29. Dada la función $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, hallar la tangente que es paralela a la recta $x-2y+1=0$.
Sol: x-2y-1=0, x-3y+7=0

30. Halla la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y=e^x$ paralela a $y=x+3$. *Sol: y=x+1*

31. Halla los puntos de la curva $y=\mathrm{L}x$ donde la tangente es paralela a la recta $4x-2y+1=0$.
Sol: x=1/2

32. Las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x-2}$ e $y=3x-4$ se cortan en dos puntos P y P'. Halla sus coordenadas y la pendiente de las tangentes en P y P'.
Sol: P(1,-1) $m_1=3$, $m_2=3$; *P'(2,2)*, $m_1=3/2$, $m_2=3$

33. Halla la pendiente de la tangente a la curva $y=x^2+3x-1$ en el punto de abscisa $x=-1$. *Sol: 1*

34. Halla la pendiente de la tangente a la curva $y=x^2-3x+1$ en el punto de abscisa $x=3$. *Sol: 3*

35. Comprueba que la función $y=x^2-3x+1$ tiene un punto de tangente horizontal en $x=3/2$.

36. La derivada de la función $f(x)=x^3+2x^2+5$ es $f'(x)=3x^2+4x$. Utilizando la derivada, responde:
    a) ¿Cuál es la ecuación de la tangente a f en el punto de abscisa $x=1$?
    b) ¿En qué puntos tiene f tangente horizontal?
    c) ¿Es creciente o decreciente en $x=-2$?
Sol: a) y=7x+1; b) x=0; x=-4/3; c) Creciente

37. Sabiendo que la derivada de la función $f(x)=1/x$ es $f'(x)=-1/x^2$, halla el punto de f en el que su derivada vale -1/4. ¿Cuál es la ecuación de la tangente en ese punto?
Sol: x=2, y = -x/4 – 1; x=-2, y = -x/4 + 1

38. Halla los puntos singulares de la función $y=x^3-3x^2+2$. *Sol: x=0; x=2*

39. Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:
a) $y=x^2+x+1$ b) $y=x^3-3x^2$ *Sol: a) x=-1/2; b) x=0, x=2*

40. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-x+4$ en el punto de abscisa $x=2$.
Sol: y-6=3(x-2)

41. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=-x^2+3x+2$ en el punto de abscisa $x=0$.
Sol: y=3x+2

42. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=x^3-2x+3$, cuya pendiente sea igual a 1.
Sol: y=x+1

43. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=L(x+1)$ en $x=0$. *Sol: y=x*

44. Escribe las ecuaciones de las tangentes a $y=x^3-3x^2$ que sean paralelas a la recta $9x-y+3=0$.
Sol: y=9x; y=9x+5

45. Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y=x^2+x-2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas. *Sol: y=3x-3; y=-3x-6*

46. Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y=x^3-3x^2+5$. *Sol: x=2, x=0*

47. ¿En qué puntos de $y=\text{L}x$ la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? ¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función? *Sol: x=1; No*

48. a) ¿Cuál es la derivada de $y=3x+2$ en cualquier punto?
    b) ¿Cuánto ha de valer x para que la derivada de $y=x^2-x+2$ sea igual a 3?
    c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^2-2x+1$ es paralela a la recta $y=2x+3$? *Sol: a) 3; b) x=2; c) x=2*

49. ¿En qué puntos la recta tangente a $y=x^4-3x^2$ tiene la pendiente igual a 2?
    Sol: $x=-1$; $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

50. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=\dfrac{x}{x+1}$ que son paralelas a la recta $y=4x-2$. *Sol: y=4x+1; y=4x+9*

51. La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ es $3x-2y+2=0$. ¿Cuál es el valor de $f'(1)$? ¿Y el de $f(1)$? *Sol: f'(1)=3/2; f(1)=5/2*

52. Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (1,-1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (0,-3) vale 0. *Sol:* $y=2x^2-3$

53. Halla la abscisa del vértice de la parábola $y=x^2+4x+3$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal. *Sol: x=-2*

54. Determina la parábola $y=ax^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=4x+1$ en el punto A(1,2) y que pasa por el punto B(0,1). *Sol:* $y=3x^2-2x+1$

55. Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y=x^2-x+3$ e $y=x^3-x^2$ son paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.
    Sol: x=1, y=x+2, y=x; x=1/3, y=-x/3+26/9, y=-x/3+1/27

56. Halla a, b y c en $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x=-2$ y en $x=2$ y que pase por (0,3). *Sol:* $y=x^3-12x+3$

57. ¿Existe algún punto de la función $y=x^3-x^2$ en que la tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0,0) y (1,1)? En caso afirmativo, hállalo. *Sol: x=1, x=-1/3*

58. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=\text{L}x$ que es paralela a la recta $y=2x-1$.
Sol: y=2x-1-ln2

5.5. Aplicaciones de la derivada al estudio local de una función.

Lo primero que vamos a considerar es una propiedad muy importante que nos indica que la derivabilidad de una función es una característica más restrictiva que la continuidad. Intuitivamente, si la continuidad se visualiza en la no ruptura de la gráfica de la función, la derivabilidad se traduce en que, además, dicha gráfica no debe tener picos o debe ser suave.

Teorema

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Demostración

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}h=f'(a)\cdot \boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

Por tanto, $\lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right]=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a) \quad\Rightarrow\quad f$ continua en $x=a$.

Sin embargo, el recíproco de este teorema no es cierto, ya que una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en dicho punto:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<\boldsymbol{0}\\ x & \text{si } x\ge \boldsymbol{0}\end{cases}. \quad \text{Entonces } f'(x)=\begin{cases}\boldsymbol{-1} & \text{si } x<\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \text{si } x>\boldsymbol{0}\end{cases} \quad \text{y:}$$

-) f es continua en $x=\boldsymbol{0}$: $\boldsymbol{0}=f(\boldsymbol{0})=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$

-) f NO es derivable en $x=\boldsymbol{0}$: $f'(\boldsymbol{0}^-)=\boldsymbol{-1}\ne\boldsymbol{1}=f'(\boldsymbol{0}^+)$

En segundo lugar debemos hacer una serie de definiciones de algunas características que poseen las funciones, que tienen una gran importancia para su representación gráfica y en las que, en muchas ocasiones, la derivada va a ser una herramienta muy útil para su estudio.

(A) Una función *f* está *acotada superiormente* sii $\exists K\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\le K \quad \forall x\in Dom(f)$.

El número real *K* recibe el nombre de una *cota superior* de la función *f*.

NOTA: Si *K* es una cota superior de la función *f*, cualquier otro número real *K'* mayor que *K* también es cota superior de *f*.

Una función *f* está *acotada inferiormente* sii $\exists k\in\mathbb{R}\ /\ k\le f(x) \quad \forall x\in Dom(f)$.

El número real *k* recibe el nombre de una *cota inferior* de la función *f*.

NOTA: Si *k* es una cota inferior de la función *f*, cualquier otro número real *k'* menor que *k* también es cota inferior de *f*.

Una función está *acotada* si lo está inferior y superiormente.

Ejemplo:

$f(x)=\cos x$ es una función acotada ya que $\boldsymbol{-1}\le\cos x\le\boldsymbol{1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(B) Se llama *extremo superior* de una función *f* a la menor de las cotas superiores de dicha función:

$$Sup(f) = Min\{K \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le K \quad \forall x \in Dom(f)\}$$

Si dicho valor es alcanzado por la función, diremos que es un *máximo absoluto*:

f alcanza un máximo absoluto en $x = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le f(a) \quad \forall x \in Dom(f)$

Diremos que *f* alcanza un *máximo relativo* en un punto si el valor de la función en él es el mayor de todos los de un entorno suyo:

f alcanza un máximo relativo en $x = a \quad \Leftrightarrow \quad \exists h > \boldsymbol{0} \,/\, f(x) \le f(a) \quad \forall x \in \,]a-h, a+h[$

Se llama *extremo inferior* de una función *f* a la mayor de las cotas inferiores de dicha función:

$$Inf(f) = Max\{k \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \ge k \quad \forall x \in Dom(f)\}$$

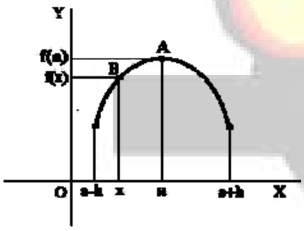
Si dicho valor es alcanzado por la función, diremos que es un *mínimo absoluto*:

f alcanza un mínimo absoluto en $x = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \ge f(a) \quad \forall x \in Dom(f)$

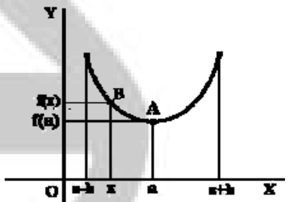
Diremos que *f* alcanza un *mínimo relativo* en un punto si el valor de la función en él es el menor de todos los de un entorno suyo:

f alcanza un mínimo relativo en $x = a \quad \Leftrightarrow \quad \exists h > \boldsymbol{0} \,/\, f(x) \ge f(a) \quad \forall x \in \,]a-h, a+h[$

Una función tiene un *extremo absoluto (relativo)* cuando tiene un máximo o un mínimo absoluto (relativo) en algún punto.



Máximo relativo



Mínimo relativo

Por tanto, una función puede tener varios extremos relativos o carecer de ellos. Pero si son absolutos, sólo puede tener un máximo y/o un mínimo. Además, todo extremo absoluto es al mismo tiempo relativo, pero no al contrario.

Ejemplos:

(*) La función $f(x) = -x^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{4}x$ tiene un máximo absoluto en $x = \boldsymbol{2}$:

$$f(x) = -x^2 + 4x \le f(2) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x - 4 = (-1)\cdot(x-2)^2 \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

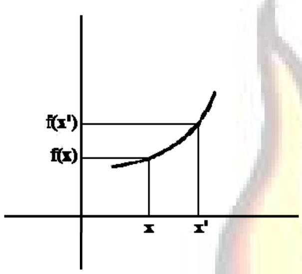
(*) La función $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < \boldsymbol{0} \\ x & \text{si } x \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$ tiene un mínimo absoluto en $x = \boldsymbol{0}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x \ge 0 \\ \text{Si } x < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \ge 0 = f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

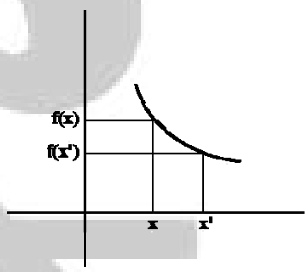
(C) Una función *f* es $\begin{cases} \textit{creciente} \\ \textit{estrictamente creciente} \\ \textit{decreciente} \\ \textit{estrictamente decreciente} \end{cases}$ en un intervalo *I* sii para cualesquiera puntos del mismo, $x, x' \in I$, la tasa de variación media, $TVM(x', x) = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ es $\begin{cases} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{cases}$.

Una *función* es *(estrictamente) monótona* cuando sea (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente.

Dicho de otra manera, si un aumento en el valor de la variable produce un incremento en el valor de la imagen, la función será creciente. En caso contrario será decreciente. Gráficamente:



Estrictamente creciente



Estrictamente decreciente

NOTA: Una función será monótona en un punto cuando exista un entorno de dicho punto donde la función sea monótona.

Ejemplo:

(*) La función $f(x) = -3x + 1$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{-3x' + 1 - (-3x + 1)}{x' - x} = \frac{-3\cancel{(x' - x)}}{\cancel{(x' - x)}} = -3 < 0 \quad \forall x', x \in \mathbb{R}$$

(*) La función $f(x) = -x^2 + 4$ es creciente en el intervalo $]-\infty, 0]$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{-x'^2 + 4 - (-x^2 + 4)}{x' - x} = \frac{-1(x'^2 - x^2)}{(x' - x)} = \frac{-1\cancel{(x' - x)}(x' + x)}{\cancel{(x' - x)}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' + x \leq 0$$

Para que esa condición se cumpla, los dos números no pueden ser positivos. Si uno fuera estrictamente positivo y otro negativo, siempre habría en dicho intervalo valores positivos que al sumarlos no cumplirían la condición. Por lo tanto, lo más que pueden ser ambos números es cero, es decir, deben ser menores o iguales. Por tanto, *f* será creciente en el intervalo $]-\infty, 0]$.

Teorema

Si una función es derivable en un punto con derivada positiva (negativa), entonces es creciente (decreciente) en dicho punto.

Demostración

Ya que la función es derivable en el punto, la TVM tiene límite (que es la derivada) y éste es positivo. Como además la función es continua en dicho punto, existe un entorno del mismo donde el signo se mantiene. Por tanto, existe un entorno del punto donde la TVM es positiva y, por tanto, la función es creciente en dicho punto.

El mismo razonamiento sirve para cuando la derivada es negativa.

Esto nos permite caracterizar la monotonía a partir de la derivabilidad:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'>0 \text{ en un intervalo} \quad \Rightarrow \quad f \text{ estrictamente creciente en dicho intervalo} \\ f'<0 \text{ en un intervalo} \quad \Rightarrow \quad f \text{ estrictamente decreciente en dicho intervalo} \end{array}}$$

Ejemplos:

(*) $f(x)=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} >0 & \Leftrightarrow \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente en }]0,\infty[\\ =0 & \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \text{posible extremo (mínimo)} \\ <0 & \Leftrightarrow \quad x<0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ decreciente en }]-\infty,0[\end{cases}$

(*) $f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente en } \mathbb{R}$

(*) $f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} >0 & \Leftrightarrow \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente en }]0,\infty[\\ =0 & \text{Nunca (no tiene extremos)} \\ <0 & \Leftrightarrow \quad x<0 \quad (\text{no están en } Dom(f)) \quad \Rightarrow \quad \text{Nunca decreciente} \end{cases}$

En los puntos donde la derivada se anula, no se puede decir nada ya que la función puede ser creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas. Lo único que podemos afirmar es que son puntos candidatos a ser extremos de la función:

Teorema de FERMAT

Si una función tiene es derivable en un punto y en él se alcanza un extremo relativo, entonces la derivada en dicho punto es cero.

Demostración

Por tener un extremo en el punto, la función no puede ser creciente en él y, por tanto, la derivada no puede ser positiva. Análogamente no puede ser decreciente en él, luego la derivada no puede ser negativa. Por tanto, como existe la derivada, pero no puede ser ni mayor ni menor que cero, entonces será igual a cero.

Esta propiedad nos permite estudiar los extremos relativos a partir de la derivada y de los siguientes criterios que vamos a analizar. Para ello consideremos que x_0 es un cero de la primera derivada (lo cual presupone la derivabilidad en él, por tanto la continuidad en dicho punto y, previamente, su pertenencia al dominio de la función):

Criterio 1: *Variación de la monotonía.*
-Si la función es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha de x_0, entonces ésta alcanza un máximo relativo en dicho punto.
-Si la función es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha de x_0, entonces ésta alcanza un mínimo relativo en dicho punto.

Criterio 2: *Valor de la derivada segunda en el punto.*
-Si $f''(x_0) < 0$, la función alcanza un máximo relativo en dicho punto.
-Si $f''(x_0) > 0$, la función alcanza un mínimo relativo en dicho punto.
Demostración
-Si $f''(x_0) < 0$, entonces f' es estrictamente decreciente en dicho punto y, como en él se anula f', entonces f' será positiva a la izquierda y negativa a la derecha. Por tanto, f es estrictamente creciente a la izquierda de dicho punto y estrictamente decreciente a la derecha, lo que implica la existencia de un máximo relativo en dicho punto. *(La otra se hace análogamente)*

Si la segunda derivada también se anulase en dicho punto, no podríamos aplicar el criterio anterior, aunque existe una generalización del mismo que veremos un poco más adelante.

Ejercicios:

1. Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [2,4] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:
   a) $f(x)=(x-1)^2$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=x^2-x+1$ d) $f(x)=1/x$
   Sol: a) 4, crece; b) $(e^4-e^2)/2$, crece; c) 5, crece; d) -1/8, decrece

2. Halla el valor del crecimiento de $f(x) = x^2-3x$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. *Sol: -3, 1*

3. Dada la función $f(x) = x^3-6x^2+9x$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?
   Sol: $y' = 3x^2 - 6x + 9$; *Crece* $]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$; *decrece* $]1, 3[$; *máximo* $(1, 4)$; *mínimo* $(3, 0)$

4. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=(x+1)^3$. *Sol: Crece en* $\mathbb{R}$

5. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=2x^3-3x^2$.

   Sol: Crece $(-\infty,\mathbf{0})\cup(\mathbf{1},\infty)$; *decrece* $(\mathbf{0},\mathbf{1})$

6. Estudia la monotonía de las siguientes funciones analizando el signo de su derivada:

   a) $y=(x-1)/2$ b) $y=x^2-2$ c) $y=3x^2+5x-2$

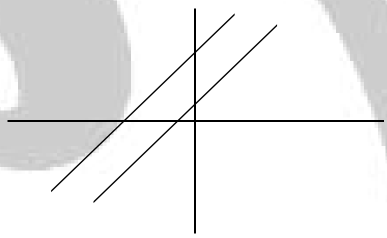
   d) $y=x^3-3x^2+3$ e) $y=x^3$ f) $y=(x-1)^2$

7. Dibuja una función que tenga derivada nula en $x=0$ y en $x=2$, derivada positiva en el intervalo [0,2] y negativa para cualquier otro valor de x.

8. Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x)=3x^2$. ¿Cuántas existen? *Sol:* $f(x)=x^3+k$

9. ¿Qué relación existe entre f y g? ¿Y entre f' y g'?

   Sol: f y g son paralelas, f' y g' son iguales.



10. Demuestra que la abscisa del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ es $x=-b/2a$.

11. Si $f'(0)=0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

    a) La función f tiene máximo o mínimo en $x=0$.

    b) La tangente en $x=0$ es horizontal.

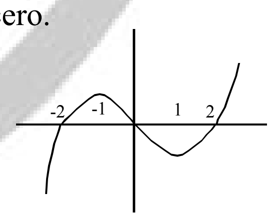
    c) La función pasa por el punto (0,0). *Sol: b)*

12. a) Indica, en la gráfica de la función, los puntos en los que la derivada es cero.

    b) En $x=2$, ¿la derivada es positiva o negativa?

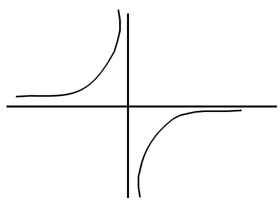
    c) ¿Y en $x=0$?

    Sol: a) -1, 1; b) +; c) -

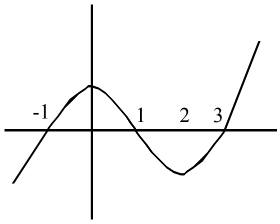


13. ¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?

    Sol: No porque siempre es estrictamente creciente



14. Esta es la gráfica de la función derivada de *f(x)*.
   a) ¿Tiene *f* algún punto de tangente horizontal?
   b) ¿Es creciente o decreciente?
   Justifica tus respuestas.



Sol: a) sí en $x=-1$, $x=1$ *y* $x=3$; *b) crece* $(-1,1)\cup(3,+\infty)$, *decrece* $(0,2)\cup(-\infty,-1)$

15. Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y estudia el crecimiento y decrecimiento para decidir si son máximos o mínimos:
   a) $y=x\cdot e^x$ b) $y=x^2\cdot e^x$ c) $y=x^2/e^x$

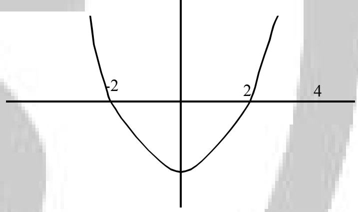
Sol: a) Mínimo x=-1; b) Mínimo x=0, máximo x=-2; c) Mínimo x=0, máximo x=2

16. Averigua qué función $y=f(x)$ cumple las siguientes condiciones:
   a) Su derivada es $f'(x)=3x^2-2x+3$
   b) Pasa por el punto (-1,0)

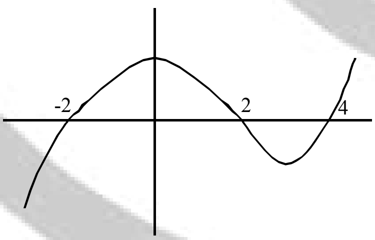
Sol: $y=x^3-x^2+3x+5$

17. Una función *f(x)* tiene un máximo en x=-2, un punto de inflexión en x=0 y un máximo en x=2. Representa aproximadamente $f'(x)$.

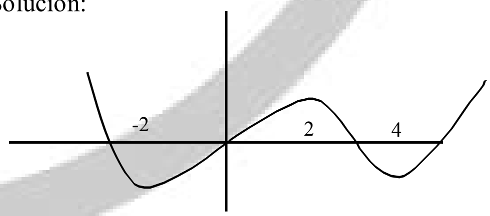
Solución:



18. Si la siguiente gráfica representa a *f'(x)*, dibuja *f(x)* aproximadamente, sabiendo que pasa por el origen.



Solución:

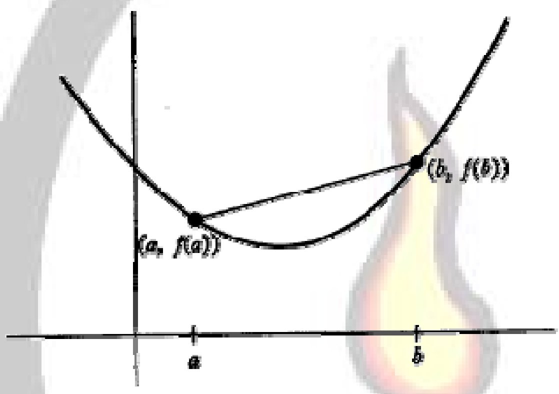


(D) Una función es *convexa* en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera con abscisa en el intervalo queda por encima de la función:

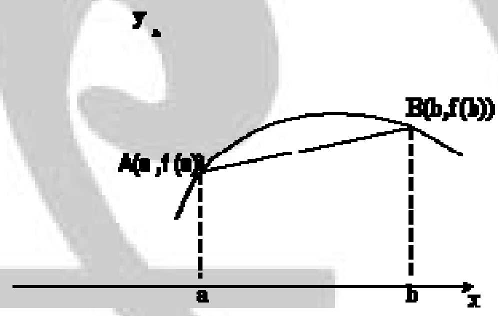
$$f \text{ convexa en } [a,b] \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$
$$\iff f\left[(1-t)\cdot a + tb\right] \leq (1-t)\cdot f(a) + t\cdot(b) \quad \forall x \in \left]0,1\right[$$

Una función es *cóncava* en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera con abscisa en el intervalo queda por debajo de la función:

$$f \text{ cóncava en } [a,b] \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$
$$\iff f\left[(1-t)\cdot a + tb\right] \geq (1-t)\cdot f(a) + t\cdot(b) \quad \forall x \in \left]0,1\right[$$



CONVEXA



CÓNCAVA

Teorema

Si una función es derivable y su derivada es creciente (decreciente) en un intervalo, entonces es convexa (cóncava) en dicho intervalo.

Esto nos permite caracterizar la curvatura a partir de la derivabilidad:

$f''>0$ en un intervalo $\Rightarrow$	f convexa en dicho intervalo
$f''<0$ en un intervalo $\Rightarrow$	f cóncava en dicho intervalo

Ejemplos:

(*) $f(x)=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f$ creciente en $\mathbb{R}$

(*) $f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f$ cóncava en $\left]0,\infty\right[$

(*) $f(x)=x^3-3x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=6x-6 \quad \Rightarrow \begin{cases} >0 \iff x>1 \Rightarrow f \text{ convexa en } \left]1,\infty\right[\\ =0 \iff x=1 \Rightarrow \text{posible punto inflexión (sí lo es)} \\ <0 \iff x<1 \Rightarrow f \text{ cóncava en } \left]-\infty,1\right[\end{cases}$

En los puntos donde la segunda derivada se anula, no se puede decir nada ya que la función puede ser convexa, cóncava o ninguna de las dos cosas. Lo único que podemos afirmar es que son candidatos a ser *puntos de inflexión* de la función, esto es, puntos donde la curvatura cambia, ya que en ellos se puede producir un cambio de signo en la segunda derivada. Así pues, vamos a analizar los criterios que nos permitirán discernir lo que pasa. Para ello consideremos que x_0 es un cero de la segunda derivada (lo cual presupone la derivabilidad en él hasta por dos veces, por tanto la continuidad en dicho punto y, previamente, su pertenencia al dominio de la función):

Criterio 1: *Variación de la curvatura.*
-Si la función es convexa a la izquierda de x_0 y cóncava a la derecha de x_0, entonces ésta tiene un punto de inflexión en dicho punto.
-Si la función es cóncava a la izquierda de x_0 y convexa a la derecha de x_0, entonces ésta tiene un punto de inflexión en dicho punto.

Criterio 2: *Valor de la derivada tercera en el punto.*
Si $f'''(x_0) \neq 0$, la función tiene un punto de inflexión en x_0.

Criterio de Taylor:

Supongamos que la función es derivable tantas veces como sea necesario en el entorno de un punto y que todas las derivadas se anulan en él menos una.
-Si la primera derivada que no se anula tiene orden par, entonces habrá un extremo relativo:

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \text{ máximo relativo}$$

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \text{ mínimo relativo}$$

-Si la primera derivada que no se anula tiene orden impar, entonces habrá un punto de inflexión.

Ejercicio. Estudia la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-1) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad c(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^2 - 1)$$

FUNCIÓN		MONOTONÍA		FUNCIÓN		MONOTONÍA	
		Creciente	Decreciente			Creciente	Decreciente
1	$p(x)$			*2*	$q(x)$		
3	$r(x)$			*4*	$s(x)$		
5	$f(x)$			*6*	$g(x)$		
7	$h(x)$			*8*	$j(x)$		
9	$k(x)$			*10*	$l(x)$		
11	$m(x)$			*12*	$n(x)$		
13	$a(x)$			*14*	$b(x)$		
15	$c(x)$			*16*	$d(x)$		

FUNCIÓN		EXTREMOS		FUNCIÓN		EXTREMOS	
		Máximos	Mínimos			Máximos	Mínimos
1	$p(x)$			*2*	$q(x)$		
3	$r(x)$			*4*	$s(x)$		
5	$f(x)$			*6*	$g(x)$		
7	$h(x)$			*8*	$j(x)$		
9	$k(x)$			*10*	$l(x)$		
11	$m(x)$			*12*	$n(x)$		
13	$a(x)$			*14*	$b(x)$		
15	$c(x)$			*16*	$d(x)$		

FUNCIÓN		CURVATURA		FUNCIÓN		CURVATURA	
		Cóncava	Convexa			Cóncava	Convexa
1	$p(x)$			*2*	$q(x)$		
3	$r(x)$			*4*	$s(x)$		
5	$f(x)$			*6*	$g(x)$		
7	$h(x)$			*8*	$j(x)$		
9	$k(x)$			*10*	$l(x)$		
11	$m(x)$			*12*	$n(x)$		
13	$a(x)$			*14*	$b(x)$		
15	$c(x)$			*16*	$d(x)$		

FUNCIÓN		PUNTOS DE INFLEXIÓN	FUNCIÓN		PUNTOS DE INFLEXIÓN
1	$p(x)$		*2*	$q(x)$	
3	$r(x)$		*4*	$s(x)$	
5	$f(x)$		*6*	$g(x)$	
7	$h(x)$		*8*	$j(x)$	
9	$k(x)$		*10*	$l(x)$	
11	$m(x)$		*12*	$n(x)$	
13	$a(x)$		*14*	$b(x)$	
15	$c(x)$		*16*	$d(x)$	

5.6. Ejemplos de representación gráfica de funciones.

$\boxed{f(x) = -2x+4}$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,4) \\ \text{Abscisas: } (2,0) \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: }]-\infty,2[\\ \text{Negativo: }]2,\infty[\end{cases}$

(4) Asíntotas: No tiene al ser un polinomio

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

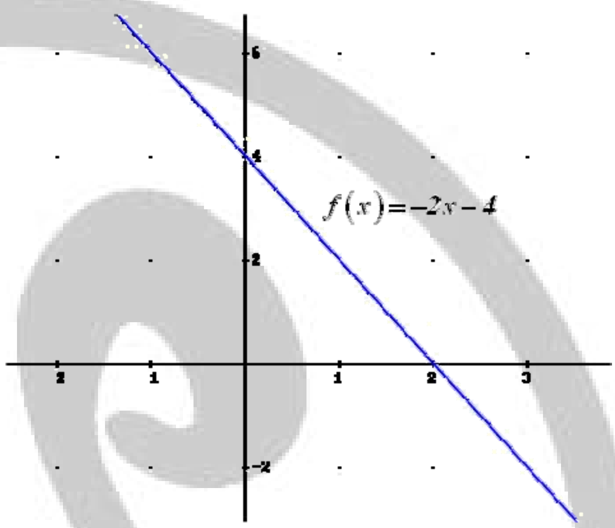
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $\begin{cases} f'(x) = -2 \\ f''(x) = 0 \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f'>0)\text{: Nunca} \\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: } \mathbb{R} \end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximos: No hay} \\ \text{Mínimos: No hay} \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: Nunca} \\ \text{Cóncava: Nunca} \end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: No hay



$\boxed{f(x) = x^2+2x}$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Img}(f) = [-1,\infty[$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,0) \\ \text{Abscisas: } (0,0);(-2,0) \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: }]-\infty,-2[\cup]0,\infty[\\ \text{Negativo: }]-2,0[\end{cases}$

(4) Asíntotas: No tiene al ser un polinomio

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

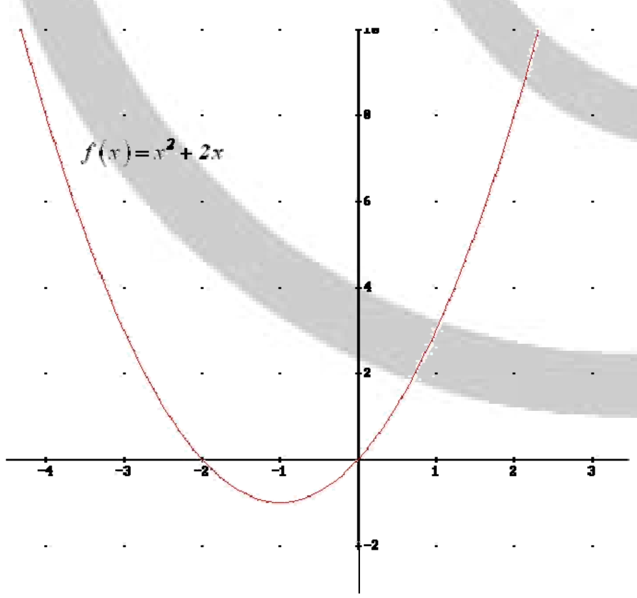
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $\begin{cases} f'(x) = 2x+2 \\ f''(x) = 2 \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f'>0)\text{: }]-1,\infty[\\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: }]-\infty,-1[\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximos: No hay} \\ \text{Mínimo: } (-1,-1) \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: } \mathbb{R} \\ \text{Cóncava: Nunca} \end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: No hay



$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x}$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,0) \\ \text{Abscisas: } (-\sqrt{3},0);(0,0);(\sqrt{3},0) \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: }]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]0,\sqrt{3}[\\ \text{Negativo: }]-\sqrt{3},0[\cup]\sqrt{3},\infty[\end{cases}$

(4) Asíntotas: No tiene al ser un polinomio

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

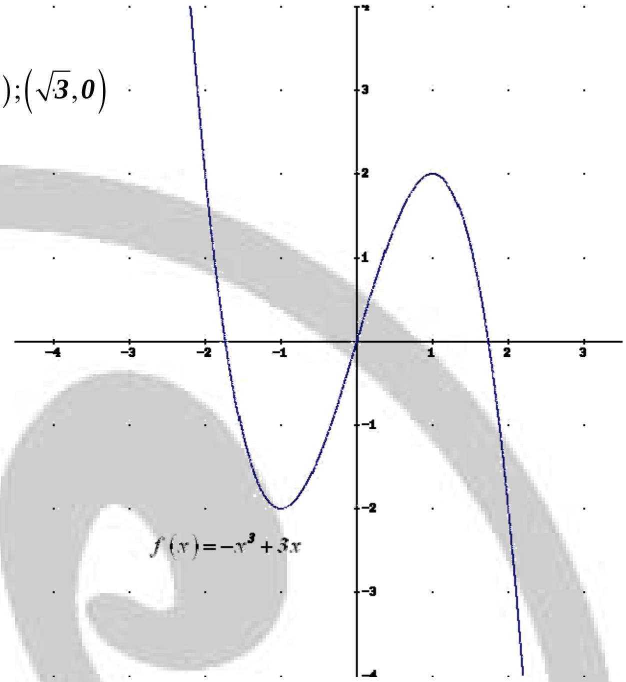
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $\begin{cases} f'(x) = -3x^2 + 3 \\ f''(x) = -6x \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f' > 0)\text{: }]-1,1[\\ \text{Decreciente } (f' < 0)\text{: }]-\infty,-1[\cup]1,\infty[\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximo: } (1,2) \\ \text{Mínimo: } (-1,-2) \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: }]-\infty,0[\\ \text{Cóncava: }]0,\infty[\end{cases}$

(10) Punto de inflexión: $(0,0)$



$\boxed{f(x) = -x^4 + 2x^2}$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Img}(f) = [-\infty,1[$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,0) \\ \text{Abscisas: } (-\sqrt{2},0);(0,0);(\sqrt{2},0) \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: }]-\sqrt{2},0[\cup]0,\sqrt{2}[\\ \text{Negativo: }]-\infty,-2[\cup]\sqrt{2},\infty[\end{cases}$

(4) Asíntotas: No tiene al ser un polinomio

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

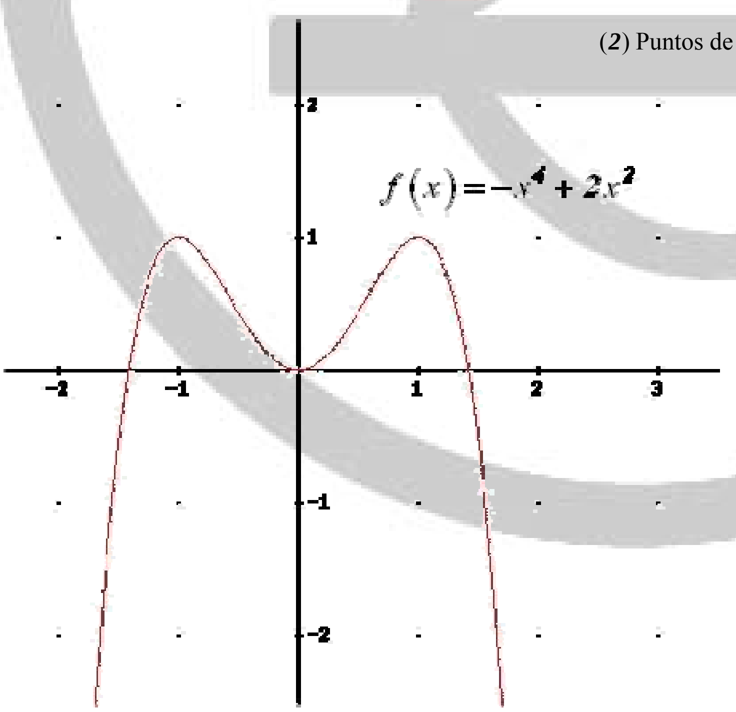
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $\begin{cases} f'(x) = -4x^3 + 4x \\ f''(x) = -12x^2 + 4 \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f' > 0)\text{: }]-\infty,1[\cup]0,1[\\ \text{Decreciente } (f' < 0)\text{: }]-1,0[\cup]1,\infty[\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximos: } (-1,1);(1,1) \\ \text{Mínimo: } (0,0) \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: } \left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\\ \text{Cóncava: } \left]-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3},\infty\right[\end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{5}{9}\right);\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{5}{9}\right)$



$$\boxed{f(x)=\frac{x-1}{x+1}}$$

(1) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ e $\text{Img}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases}\text{Ordenadas: } (0,-1)\\ \text{Abscisas: } (1,0)\end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases}\text{Positivo: }]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\\ \text{Negativo: }]-1,1[\end{cases}$

(4) Asíntotas $\begin{cases}\text{AV} \quad x=-1\\ \text{AH} \quad y=1\end{cases}$

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}-\{-1\}$, donde hay una discontinuidad asintótica de salto infinito

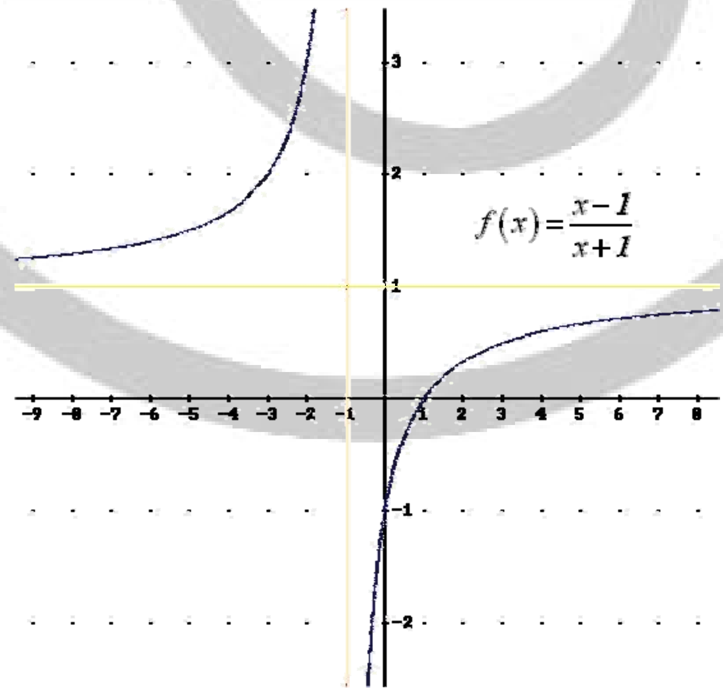
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}-\{-1\}$ con $\begin{cases}f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}\\ f''(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^3}\end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases}\text{Creciente } (f'>0)\text{: } \mathbb{R}-\{-1\}\\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: Nunca}\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases}\text{Máximos: No hay}\\ \text{Mínimos: No hay}\end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases}\text{Convexa: }]-\infty,-1[\\ \text{Cóncava: }]1,\infty[\end{cases}$

(10) Punto de inflexión: No hay



$$\boxed{f(x)=\frac{x^3}{2x^2-8}}$$

(1) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ e $\text{Img}(f)=\mathbb{R}$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases}\text{Ordenadas: } (0,0)\\ \text{Abscisas: } (0,0)\end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases}\text{Positivo: }]-2,0[\cup]2,\infty[\\ \text{Negativo: }]-\infty,-2[\cup]0,2[\end{cases}$

(4) Asíntotas $\begin{cases}\text{AV} \quad x=-2; x=2\\ \text{AO} \quad y=\frac{1}{2}x\end{cases}$

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ donde hay sendas discontinuidades asintóticas de salto infinito

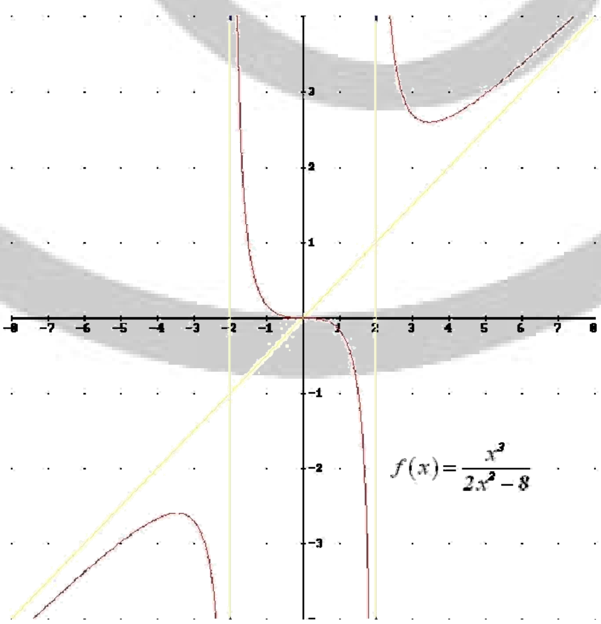
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ con $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{2(x^2-4)^2}$ y $f''(x)=\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$

(7) Monotonía $\begin{cases}\text{Creciente } (f'>0)\text{: } \left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]2\sqrt{3},\infty\right[\\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: } \left]-2\sqrt{3},-2\right[\cup]-2,2[\cup\left]2,2\sqrt{3}\right[\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases}\text{Máximo: } \left(-2\sqrt{3},\frac{-3}{2}\sqrt{3}\right)\\ \text{Mínimo: } \left(2\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases}\text{Convexa: }]-2,0[\cup]2,\infty[\\ \text{Cóncava: }]-\infty,-2[\cup]0,2[\end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: $(0,0)$



$$\boxed{f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 1 \\ e+\ln x & \text{si } x>1 \end{cases}}$$

(1) $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $\text{Img}(f)=\mathbb{R}^+$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,1) \\ \text{Abscisas: No hay} \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: } \mathbb{R} \\ \text{Negativo: Nunca} \end{cases}$

(4) Asíntotas $\begin{cases} \text{AV} \quad \text{No hay} \\ \text{AH} \quad y=0 \end{cases}$

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

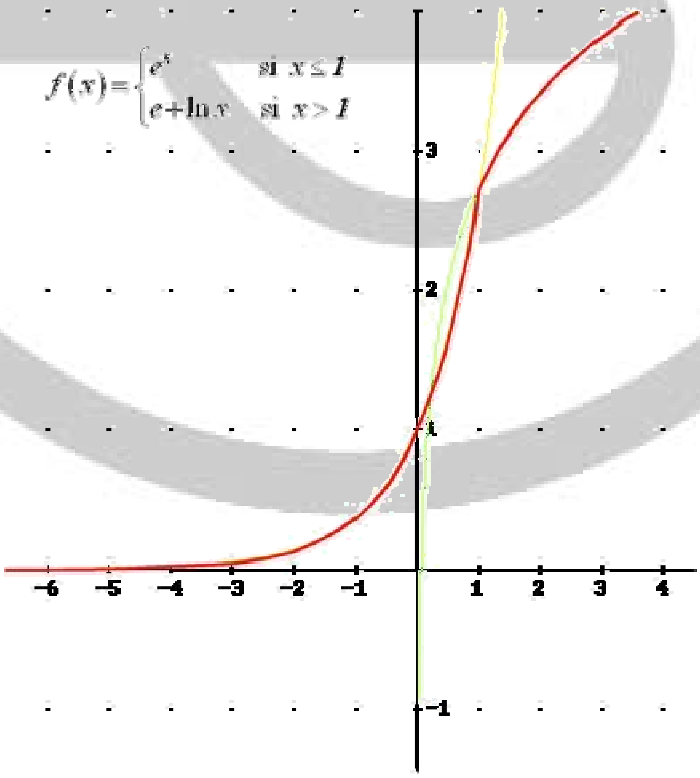
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}-\{1\}$ con $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$ y $f''(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f'>0)\text{: } \mathbb{R}-\{1\} \\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: Nunca} \end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximo: No hay} \\ \text{Mínimo: No hay} \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: }]-\infty,1[\\ \text{Cóncava: }]1,\infty[\end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: No hay



$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<1 \\ -x+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

(1) $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $\operatorname{Img}(f)=\left]-\infty,1\right]$

(2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{Ordenadas: } (0,0) \\ \text{Abscisas: } (0,0);(2,0) \end{cases}$

(3) Signo $\begin{cases} \text{Positivo: } \left]0,2\right[\\ \text{Negativo: } \left]-\infty,0\right[\cup\left]2,\infty\right[\end{cases}$

(4) Asíntotas $\begin{cases} \text{AV} & \text{No hay} \\ \text{AH} & \text{No hay} \end{cases}$

(5) f es continua en todo $\mathbb{R}$

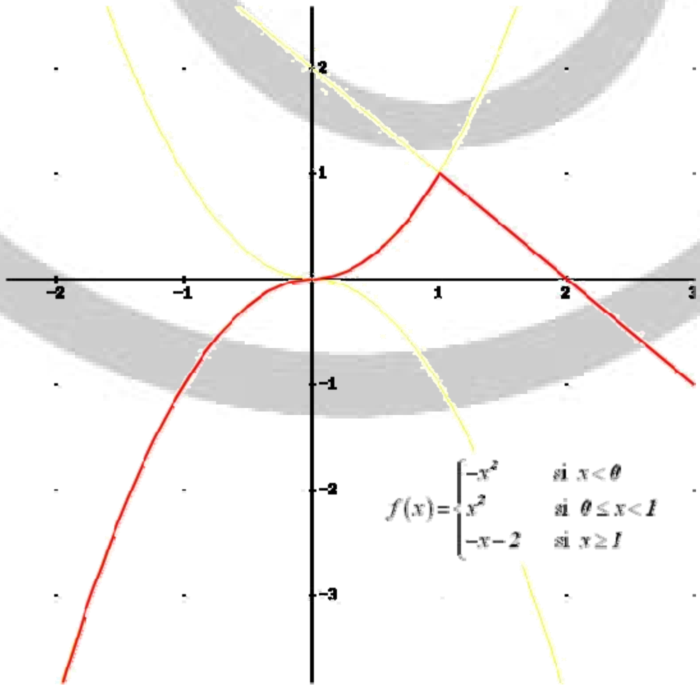
(6) f es derivable en todo $\mathbb{R}-\{1\}$ con $f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } 0\le x<1 \\ -1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ y $f''(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

(7) Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente } (f'>0)\text{: } \left]-\infty,1\right[\\ \text{Decreciente } (f'<0)\text{: } \left]1,\infty\right[\end{cases}$

(8) Extremos relativos $\begin{cases} \text{Máximo: } (1,1) \\ \text{Mínimo: No hay} \end{cases}$

(9) Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa: } \left]0,1\right[\\ \text{Cóncava: } \left]-\infty,0\right[\end{cases}$

(10) Puntos de inflexión: $(0,0)$



Ejercicio. Representa gráficamente, de la forma más aproximada posible, las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=2x^2-x+7 \quad ; \quad r(x)=-x^3+6 \quad ; \quad s(x)=3x^2-x$$

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+x}{x^2-1}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x)=L\left(x-1\right) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad c(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^2-1\right)$$

Ejercicio. Estudia todas las características que puedas de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente.

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1 & si \quad x=1\\ \dfrac{x^2-1}{1-x} & si \quad x\neq 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}-x & si \quad x\leq -1\\ \dfrac{-1}{x+1} & si \quad -1<x<2\\ x^3 & si \quad x\geq 2\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases}3-x & si \quad x<1\\ 2 & si \quad 1\leq x<3\\ x+1 & si \quad x\geq 3\end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases}-x^2 & si \quad -2\leq x<0\\ L\,x & si \quad 0\leq x<4\end{cases} \qquad l(x)=\begin{cases}3\cdot e^x & si \quad -3\leq x\leq 0\\ -x^2+2x+3 & si \quad 0<x\leq 3\end{cases}$$

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2-x} & si \quad x<1\\ 4x-x^2 & si \quad x\geq 1\end{cases} \qquad n(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-2} & si \quad x<0\\ 2^{2-x} & si \quad 0\leq x\end{cases} \qquad ñ(t)=\begin{cases}-t^3+5t^2 & si \quad 0\leq t<3\\ -t^2+12t-9 & si \quad 3\leq t\leq 5\\ 2t+16 & si \quad 5<t\leq 10\end{cases}$$

$$o(x)=\begin{cases}3x-3 & si \quad x\leq 2\\ x^2-6x+11 & si \quad x>2\end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases}2x+1 & si \quad x<2\\ x^2-8x+17 & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

$$q(x)=\begin{cases}2^x & si \quad x\leq -1\\ -x^2+3 & si \quad -1<x<2\\ x-3 & si \quad x\geq 2\end{cases} \qquad r(x)=\begin{cases}e^x & si \quad x<-1\\ \dfrac{4}{x+3} & si \quad -1\leq x\leq 1\\ 1+L\,x & si \quad x>1\end{cases}$$

$$s(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & si \quad x<-1\\ 2x+2 & si \quad -1\leq x\leq 1\\ -x^2+8x & si \quad x>1\end{cases} \qquad t(x)=\begin{cases}x^2+3 & si \quad x\leq 1\\ 4 & si \quad 1<x\leq 3\\ \left(x-4\right)^2+2 & si \quad x>3\end{cases}$$

$$u(x)=\begin{cases}x^2/2 & si \quad x<2\\ -x+4 & si \quad 2\leq x<4\\ \left(x-4\right)^2 & si \quad x\geq 4\end{cases} \qquad v(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{4} & si \quad 0\leq x\leq 2\\ \dfrac{1}{x} & si \quad 2<x\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}x^2 & si \quad x\leq 2\\ \dfrac{1}{x} & si \quad 2<x<5\\ \dfrac{x-1}{2} & si \quad x\geq 5\end{cases} \qquad z(x)=\begin{cases}1-x^2 & si \quad x\leq 1\\ 3x^2-12x+9 & si \quad 1<x\leq 3\\ -2x^2+16x-30 & si \quad x>3\end{cases}$$

5.7. Optimización de funciones.

El cálculo de máximos y mínimos mediante derivadas, permite resolver de una manera sencilla muchos problemas en los que se trata de optimizar una función. Para resolverlos debemos seguir el siguiente esquema general:

a) Partiendo de los datos del problema se construye la función que hay que maximizar o minimizar. La mayor parte de las veces nos quedará una función de dos o más variables.
b) Si la función tiene más de una variable, debemos relacionar éstas mediante ecuaciones que se deducirán del enunciado, de forma que consigamos expresar nuestra función utilizando una sola variable.
c) Se calculan los máximos y/o mínimos de la función.
d) Se interpretan los resultados obtenidos, rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.

Ejemplos:

(*) Hallar dos números cuya suma sea ***20*** y cuyo producto sea el mayor posible.

a) Designamos por x e y a los números buscados. Por tanto, la función que pretendemos maximizar será $z = x \cdot y$.

b) Como los n^{os} deben sumar ***20***,

$$x + y = \boldsymbol{20} \Rightarrow y = \boldsymbol{20} - x \Rightarrow z = f(x) = x \cdot (\boldsymbol{20} - x) = -x^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{20}x$$

c)
$$f'(x) = -\boldsymbol{2}x + \boldsymbol{20} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{10}$$
$$f''(x) = -\boldsymbol{2} \quad \Rightarrow \quad f''(\boldsymbol{10}) = -\boldsymbol{2} < \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \text{el máximo se alcanza para } x = \boldsymbol{10} \quad \Rightarrow \quad y = \boldsymbol{10}$$

d) Por tanto, los números buscados son ***10*** y ***10***, que cumplen todas las condiciones del enunciado.

(*) Hallar lo que deben medir los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa ***90*** cm para que al girarlo sobre uno de ellos obtengamos un cono de volumen máximo.

a) Designamos por x e y a los catetos, siendo x el que va a dar lugar a la circunferencia base del cono. Por tanto, la función que pretendemos maximizar será $z = \dfrac{\pi \cdot x^{\boldsymbol{2}} \cdot y}{\boldsymbol{3}}$.

b) Como los dos son catetos de un triángulo rectángulo, aplicando el T^{ma} de Pitágoras:

$$x^{\boldsymbol{2}} + y^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{90}^{\boldsymbol{2}} \Rightarrow x^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{8100} - y^{\boldsymbol{2}} \Rightarrow z = f(y) = \frac{\pi}{\boldsymbol{3}} \cdot \left(\boldsymbol{8100}y - y^{\boldsymbol{3}}\right)$$

c)
$$f'(y) = \frac{\pi}{\boldsymbol{3}} \cdot \left(\boldsymbol{8100} - \boldsymbol{3}y^{\boldsymbol{2}}\right) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad y = \boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{3}}$$
$$f''(x) = \frac{\pi}{\boldsymbol{3}} \cdot (-\boldsymbol{6}y) \quad \Rightarrow \quad f''\left(\boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{3}}\right) < \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \text{el máximo se alcanza para } y = \boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{6}}$$

d) Por tanto, los catetos deben medir $\boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{6}}$ y $\boldsymbol{30}\sqrt{\boldsymbol{3}}$ cm.

Ejercicios:

1. Descomponer el número ***25*** en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

2. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es ***40*** m.

3. Demostrar que la suma de un número real positivo no nulo y su inverso siempre es mayor o igual que dos.

4. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de ***3600*** m^2 de superficie, para poder cercarlo mediante una valla de longitud mínima.

5. Un jardinero quiere construir un jardín en forma de sector circular con perímetro de ***20*** m. ¿Cuál será el radio que da al jardín el área máxima? ¿Cuál será la amplitud en radianes del sector?

6. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, calcular las dimensiones del que tenga área máxima. Razonar el proceso.

7. Un pastor quiere construir un aprisco de forma rectangular. Compra ***100*** m de tela metálica para hacer la cerca, con la intención de que el aprisco sea lo más grande posible. ¿Podrías indicarle cuáles son las dimensiones ideales?

8. Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado, la diferencia sea máxima.

9. ¿Cuál es el número que sumado con ***25*** veces su inverso da un valor mínimo?

10. Halla dos números cuya suma sea ***24*** y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

11. Entre todos los rectángulos de perímetro ***12*** cm, ¿cuál tiene diagonal menor? ¿Cuánto mide ésta?

12. ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área de entre todos los que tienen ***10*** cm de hipotenusa?

13. Divide un segmento de ***60*** cm en dos partes, de forma que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima.

14. Se desea comprar un terreno rectangular de ***400*** m^2 de área. ¿Cuáles serán las dimensiones más convenientes para que la construcción de la cerca resulte lo más económico posible?

15. Determina la diagonal mínima de todos los rectángulos de ***8*** m de perímetro.

16. De todos los rectángulos de ***12*** m de perímetro, ¿cuál es el que al girar alrededor de uno de sus lados engendra un cilindro de volumen máximo?

17. Halla el rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de base ***30*** cm y lado ***25*** cm.

18. Determina las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = 4x$, tales que su distancia al punto ***(4,0)*** sea mínima.

19. ¿Qué punto P(x,y) de la hipérbola $2y^2 - x^2 = 2$ está más cerca del ***M(0,3)***?

20. Inscribir en un cono de radio ***3*** cm y altura ***4*** cm el cilindro de volumen máximo.

21. Dada una esfera de radio *r*, determina el cono de volumen mínimo circunscrito a dicha esfera.

22. Un problema económico. Una fábrica concierta un contrato con una empresa de autobuses para el traslado de sus trabajadores. Convienen en pagar ***120*** ptas. por trabajador si hay un mínimo de ***50*** y se comprometen a disminuir una pta. por cada persona que exceda de ***50***. Averiguar el número de trabajadores que proporcionará el máximo ingreso a la empresa de autobuses.

23. Una hoja de papel debe contener ***18*** cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben de tener ***2*** cm cada uno, y los laterales ***1*** cm. Se piden las dimensiones de la hoja para las que el gasto del papel sea mínimo.

24. La base menor de un trapecio rectángulo mide ***7*** cm., y el lado oblicuo tiene una longitud de ***6*** cm. Calcula la altura que haga máxima el área del trapecio.

25. Dada una lámina rectangular de longitudes ***2*** y ***1*** m, respectivamente, calcula las dimensiones de la caja abierta que se puede formar con ella cortando en las cuatro esquinas un cuadro para que el volumen sea máximo.

26. Se desea construir una caja abierta (sin tapa) de base cuadrada y de ***108*** litros de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga superficies mínimas, y por tanto, mínimo coste?

27. Un triángulo isósceles de ***10*** cm de perímetro gira alrededor de su altura engendrando un cono. Halla las longitudes de los lados del triángulo para que el volumen engendrado sea máximo.

28. La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es ***72*** cm ¿Qué dimensiones debe tener dicho prisma para que su volumen sea máximo?

29. De todos los conos que tienen de generatriz $\sqrt{6}$ cm, calcula el radio de la base del que tiene volumen máximo.

30. Una bala disparada verticalmente hacia arriba alcanza, al cabo de t segundos la altura $h(t) = 500t - 5t^2$ metros. ¿Cuál será la altura máxima que puede alcanzar?

31. Se tiene un alambre de dos metros de longitud y se desea dividirlo en dos partes para formar con la primera un cuadrado y con la segunda un círculo. Halla la longitud de cada parte para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

32. Si se unen los extremos de las manecillas de un reloj se obtiene un triángulo cuya área es función del tiempo. Halla la hora comprendida entre las doce y las doce y media para la cual es máxima dicha área. Las agujas del reloj miden ***4*** y ***6*** cm.

33. Un propietario puede alquilar sus ***40*** apartamentos a ***5.000*** ptas mensuales. Por cada ***250*** ptas. de aumento en el alquiler, observa que puede alquilar un apartamento menos. ¿Qué alquiler debe cobrar para obtener la máxima ganancia?

34. Halla la mínima distancia del punto ***P(4,2)*** a la parábola $y^2 = 8x$.

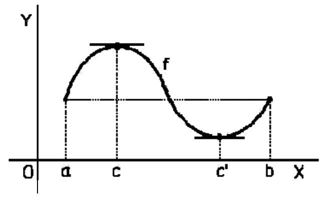
35. De todos los triángulos isósceles cuya base y altura suman ***20*** m, ¿qué base tiene el de área máxima?

36. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto ***P(3,6)*** y determina con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.

5.8. Principales teoremas de derivabilidad en intervalos cerrados y acotados.

Teorema de ROLLE

$$\text{Si } f \text{ es una función } \begin{cases} \text{continua en } [a,b] \\ \text{derivable en }]a,b[\\ f(a)=f(b) \end{cases} \Rightarrow \quad \exists c \in \,]a,b[\; / \; f'(c)=\boldsymbol{0}$$



Demostración

Al ser la función continua, por el T^ma de Weierstrass, alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

-Si el máximo y el mínimo se alcanzaran los dos en los extremos del intervalo, entonces serían iguales y la función sería constante y, por tanto, tendría derivada cero en todos sus puntos, por lo que se cumple la tesis del enunciado.

-Supongamos, por tanto, que alguno de los extremos se alcanza en un punto interior del intervalo. Por su condición de extremo, la derivada en él vale cero, y ya tenemos el punto que queríamos encontrar.

Teorema de CAUCHY generalizado

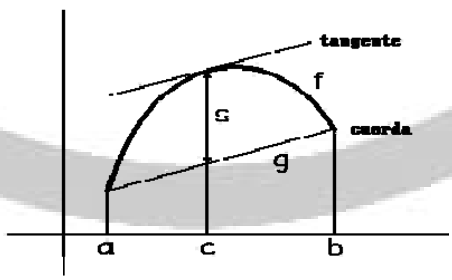
$$\text{Si } f \text{ y } g \text{ son funciones } \begin{cases} \text{continuas en } [a,b] \\ \text{derivables en }]a,b[\\ g'(x) \neq \boldsymbol{0} \quad \forall x \in \,]a,b[\end{cases} \Rightarrow \quad \exists c \in \,]a,b[\; / \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración

Aplicar el T^ma de Rolle a la función $F(x)=g(x)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]-f(x)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]$

Teorema de CAUCHY simplificado o teorema del valor medio o teorema de LAGRANGE

$$\text{Si } f \text{ es una función } \begin{cases} \text{continua en } [a,b] \\ \text{derivable en }]a,b[\end{cases} \Rightarrow \quad \exists c \in \,]a,b[\; / \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Demostración

Aplicar el teorema de Cauchy generalizado a las funciones *f* y la identidad *I*.

Reglas de L'Hospital

$$\text{Si } f \text{ y } g \text{ son funciones } \begin{cases} \text{continuas en } [a,b] \\ \text{derivables en }]a,b[\\ g'(x) \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in]a,b[\\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \text{ si } \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K, \text{ entonces } \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

$$\text{Si } f \text{ y } g \text{ son funciones } \begin{cases} \text{continuas en } [a,b] \\ \text{derivables en }]a,b[\\ g'(x) \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in]a,b[\\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \text{ si } \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K, \text{ entonces } \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

$$\text{Si } f \text{ y } g \text{ son funciones } \begin{cases} \text{continuas en } [a,b] \\ \text{derivables en }]a,b[\\ g'(x) \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in]a,b[\\ \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \text{ si } \exists \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K, \text{ entonces } \exists \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

$$\text{Si } f \text{ y } g \text{ son funciones } \begin{cases} \text{continuas en } [a,b] \\ \text{derivables en }]a,b[\\ g'(x) \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in]a,b[\\ \lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \text{ si } \exists \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K, \text{ entonces } \exists \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Estas reglas son muy útiles para la resolución de las indeterminaciones que plantea, pero también se pueden utilizar para resolver otros tipos de indeterminaciones, si conseguimos transformar el producto, la diferencia o la potencia de funciones en un cociente que se encuentren en las condiciones de L'Hospital.

5.9. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada).

2º Para desarrollar y completar algunos temas, apuntes y ejercicios obtenidos de:

-Libros de texto:

(A) Biosca, A. y otros: *"Matemáticas aplicadas a las CCSS 1",* Ed. Guadiel, 2002.

(B) Lazcano, I. y otros: *"Matemáticas 1º BUP",* Editorial Edelvives, 1982.

-Apuntes del profesor Jesús Escudero Martín del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca).

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/