Nota

Prueba 1.01 - 1º Bach C
Números reales

Nombre:.. 3/11/09

Valor	Nota
12	

1. En cada cuestión, responde diciendo a qué intervalo pertenece x si:

a) $|-x+2|<0$ b) $-3 \le 3x-6<5$

c) $|2x+5| \ge 1$ d) $\left|x+\frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3}$

a) No existe ningún x que cumpla la condición pues el valor absoluto no puede ser negativo.

b) $-3+6 \le 3x < 5+6 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{3} \le x < \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left[1, \frac{11}{3}\right)}$

c) $|2x+5| \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5 \ge 1 \Rightarrow x \ge -2 \\ ó \\ 2x+5 \le -1 \Rightarrow x \le -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \in \Re - (-3,-2)}$

d) $\left|x+\frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \le x+\frac{1}{3} \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} \le x \le 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right]}$

Valor	Nota
12	

2. Utilizando la definición de logaritmo, averigua:

a) $\log_3 1$ b) $\log_5 0{,}04$

c) $\log_9 3$ d) $\log_2(\log_2 4)$

a) $\boxed{\log_3 1 = 0}$ ya que $3^0 = 1$

b) $\log_5 0{,}004 = \log_5 \frac{4}{100} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = \boxed{-2}$

c) $\log_9 3 = \log_9 \sqrt{9} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

d) $\log_2(\log_2 4) = \log_2(\log_2 2^2) = \log_2 2 = \boxed{1}$

Valor	Nota
12	

3. Averigua el valor de x en cada una de las siguientes cuestiones:

a) $13^x = \frac{1}{169}$ b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$ d) $\log_3 x = 1 + \log_9 81$

a) $13^x = \frac{1}{169} = \frac{1}{13^2} = 13^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-2}$

b) $\log_5 x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 5^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 125}$

c) $\log_x 3 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = 3 \quad \Rightarrow \quad (x^{\frac{1}{3}})^3 = 3^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 27}$

d) $\log_3 x = 1+\log_9 81 = 1+\log_9 9^2 = 1+2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 27}$

Valor	Nota
12	

4. Simplifica:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 6^{-3} \cdot (-3)^8}{18^{-2} \cdot (-12)^3}$ b) $\sqrt[8]{81}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}}$ d) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} =$

a) $\frac{2^5 \cdot 6^{-3} \cdot (-3)^8}{18^{-2} \cdot (-12)^3} = \frac{2^5 \cdot (2 \cdot 3)^{-3} \cdot 3^8}{(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot [-(2^2 \cdot 3)]^3} = -\frac{2^5 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 3^8}{2^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 2^6 \cdot 3^3} = -\frac{2^2 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^{-1}} = \boxed{-\frac{3^6}{2^2}}$

b) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = 3^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}} = \sqrt[15]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^2} = \boxed{\sqrt[3]{4}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 5} = \sqrt[6]{5^3} = \boxed{\sqrt{5}}$

Valor	Nota
12	

5. Haz las siguientes operaciones con radicales y simplifícalas todo lo que puedas:

a) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$ b) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt[4]{2500}$

c) $\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-2}}$ d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

a) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}=\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot5^2}+\sqrt{2^2\cdot3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\boxed{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt[4]{2500}=\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot3^2}+\sqrt[4]{2^2\cdot5^4}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt[4]{2^2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\boxed{10\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-2}}=a^{\frac{-1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{-2}{4}}=a^{\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{-2}{4}}=a^{\frac{-1}{3}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}\cdot(2\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3})=2-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-3\cdot2=\boxed{-4-\sqrt{6}}$

Valor	Nota
12	

6. Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{2}}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$ d) $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

a) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{14}}{5\cdot2}=\boxed{\frac{\sqrt{14}}{5}}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{3\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{3^4}}{2\cdot\sqrt[3]{3^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[6]{3^7}}{2\cdot3}=\frac{\sqrt[6]{3^7}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt[6]{3}}{2}}$

c) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\cdot(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\cdot(2\sqrt{5}-3)}=\frac{22\sqrt{5}-33}{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\frac{22\sqrt{5}-33}{20-9}=\frac{22\sqrt{5}-33}{11}=\boxed{2\sqrt{5}-3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{(5\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot(5\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(5\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(5\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{(5\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2+2(5\sqrt{2})(\sqrt{5})}{(5\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{50+5+10\sqrt{10}}{50-5}=\frac{55+10\sqrt{10}}{45}=\boxed{\frac{11+2\sqrt{10}}{9}}$

Valor	Nota
6	

7. Escribe las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

a) log 3 + 3·log2 − 2·(1 − log6)

b) $\frac{1}{3}\cdot\ln5+\frac{2}{3}\cdot\ln3-(2+3\cdot\ln15)$

a) $\log3+3\cdot\log2-2\cdot(1-\log6)=\log(3\cdot2^3)-2\cdot(\log10-\log6)=\log(3\cdot2^3)-\log\left(\frac{10}{6}\right)^2$

$=\log\frac{3\cdot2^3}{\left(\frac{10}{6}\right)^2}=\boxed{\log\frac{3^3\cdot2^3}{5^2}}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\ln5+\frac{2}{3}\ln3-(2+3\cdot\ln15)=\ln\sqrt[3]{5}+\ln\sqrt[3]{3^2}-\ln e^2-\ln15^3=\ln\frac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{e^2\cdot15^3}=\boxed{\ln\frac{\sqrt[3]{45}}{e^2\cdot15^3}}$

Valor	Nota
6	

8. Al medir una calle se obtuvo un valor de 1.540 m. Se midió también la altura de una habitación que resulto ser de 2,80 m.
a) ¿Cuál es la cota de error absoluto de cada medición?
b) ¿Cuál de las dos medidas crees que se hizo con mayor precisión? Explícalo.

a) 1540 m está aproximada a decenas luego la cota de error es media decena:, es decir, 5 unidades; 2,80 está aproximada o centésima, luego la cota de error es media centésima, es decir 5 milésimas: 0,005.

b) Para comparar la precisión debemos comparar las cotas de error relativo.

En el primer caso es: $\frac{5}{1540}\approx0{,}0032$, mientras que en segundo es: $\frac{0{,}005}{2{,}80}\approx0{,}00179$.

Por tanto la segunda medida es más precisa que la primera ya que su cota de error relativo es menor.

Valor	Nota
6	

9. Un antiguo babilonio ha viajado en el tiempo hasta el siglo XXI y la administración lo ha matriculado en 1º de Bachillerato Científico. Se ha traído su calculadora científica, que como sabemos funciona en base sexagesimal (y que por ello calcula logaritmos en base 60). ¿Cómo calculará log 5 y ln 7 con esa calculadora?

Deberá hacer un cambio de base a su base de logaritmos que es 60, luego aplicando la fórmula general del cambio de base, el babilonio calcularía de la siguiente manera:

$$\log 5 = \frac{\log_{60} 5}{\log_{60} 10} \quad y \quad \ln 7 = \frac{\log_{60} 7}{\log_{60} e}$$

Valor	Nota
10	

10. Normalmente el Dr. House le encargaría estas cuentas al Dr. Taub o a "Trece" pero los ha despedido y está sin equipo, así que te ha pillado a ti por los pasillos del hospital y te ha tocado ser su ayudante:

Dr. House: Tengo una paciente a la que el cielo le ha caído sobre su cabeza (es un decir, ya que lo que en realidad le ha caído es toda su oficina). El caso es que padece de síndrome de aplastamiento, que entre sus efectos, produce un aumento de la mioglobulina en sangre que es fatal para la función renal.

Tu: ¡Ah!

Dr. House: El caso es que necesito saber cuántos gr. de mioglobulina hay en su sangre para tratarle. El análisis detecta 1,75 mgr/ml de sangre. El peso de la paciente es de 62 kg y sabemos que hay 0,065 ml de sangre por cada gramo de peso corporal. El tratamiento puede reducir la concentración de mioglobulina en un 25% de la que hay en sangre cada 6 horas. ¿Cuánta mioglobulina tiene en su sangre? ¿Cuánto le costará volver a los niveles normales? (0,25 mgr/ml) ¡Vamos, calcula!

Tu: (en plan quejita) ¡Es que son números muy pequeños!

Dr. House: ¡Hazlo en notación científica y usa logaritmos! ¡Para eso tienes la calculadora!

Primero tenemos que calcular el número de mililitros de sangre que tiene el enfermo: de 62 kg:

$$(62\,000\ g)\cdot(0{,}065\ ml/g) = (6{,}2\cdot 10^4\ g)\cdot(6{,}5\cdot 10^{-2}\ ml/g) = 4{,}03\cdot 10^3\ ml \text{ de sangre.}$$

La cantidad de mioglobulina será:

$$(1{,}75\ mg/ml)\cdot(4{,}03\cdot 10^3\ ml) = 1{,}75\cdot 10^{-3}\ g/ml)\cdot(4{,}03\cdot 10^3\ ml) = \underline{7{,}0525\ g}$$

Cada 6 horas se reduce en un 25% la cantidad de mioglobulina, por lo que queda un 75% de la que había. Para saber la que quedará después de 6 horas multiplicamos por 0,75, dentro de 12 horas por $0{,}75^2$ y así sucesivamente. Queremos saber cuantos periodos de 6 horas deben transcurrir para pasar de 1,75 mg/ml a 0,25 mg/ml. Es decir debemos resolver esta ecuación:

$$1{,}75\cdot 0{,}75^n = 0{,}25$$

Para despejar usamos logaritmos:

$$\log(1{,}75\cdot 0{,}75^n) = \log 0{,}25 \quad\Rightarrow\quad \log 1{,}75 + n\cdot\log 0{,}75 = \log 0{,}25$$

Despejamos n y resulta:

$$n = \frac{\log 0{,}25 - \log 1{,}75}{\log 0{,}75} \approx 6{,}76$$

luego deben transcurrir "casi" 7 periodos de 6 horas, unas 40,6 horas.