

Nota	

## Prueba 1.02 - 1º Bach C

### Trigonometría



Nombre: ..... 24/11/09

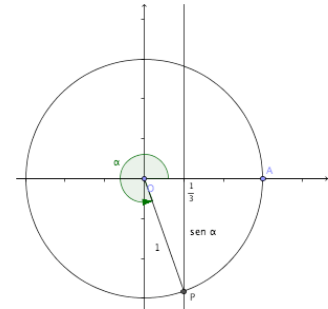
Valor	Nota
10	

1. a) Sin usar la calculadora y sabiendo que el ángulo  $\alpha$  está comprendido entre  $270^\circ$  y  $360^\circ$  y que su coseno vale:  $\cos \alpha = 1/3$ , calcular el seno y la tangente del ángulo  $\alpha$ .  
 b) Dibuja el ángulo  $\alpha$  en una circunferencia de radio 1.

a) El ángulo es del cuarto cuadrante, luego su seno será negativo y su tangente también

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{-\frac{\sqrt{8}}{3}};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right) : \left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\sqrt{8}}.$$



b) En la figura adjunta se ha trazado una perpendicular sobre el punto de coordenadas  $(1/3, 0)$  y se ha unido el punto de corte con la circunferencia que está en el tercer cuadrante para determinar el ángulo.

Valor	Nota
10	

2. Demostrar que:  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = 2 \cdot \sec x$

En la parte de la izquierda de la expresión, se pone denominador común y se opera:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} &= \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} + \frac{(1 + \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x + 1 + \sin^2 x + 2 \cdot \sin x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} = \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \cdot \sin x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} = \frac{2 \cdot (1 + \sin x)}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos x} = 2 \cdot \sec x \end{aligned}$$

Valor	Nota
10	

3. Demostrar, usando fórmulas trigonométricas y sin calculadora, que:  
 $\sin 105^\circ - \sin 45^\circ - \sin 15^\circ = 0$

Como  $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$  y  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ - \sin 45^\circ - \sin 15^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) - \sin 45^\circ - \sin(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ - \sin 45^\circ - (\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = 0 \end{aligned}$$

Valor	Nota
10	

4. Demostrar que:  $\tan 3\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{1 + \cos 6\alpha}$

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble para  $6\alpha$ , que es el doble de  $3\alpha$ :

$$\frac{\sin 6\alpha}{1 + \cos 6\alpha} = \frac{2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{1 + \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha} = \frac{2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{1 + \cos^2 3\alpha - (1 - \cos^2 3\alpha)} = \frac{2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2 \cdot \cos^2 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \tan 3\alpha$$

Valor	Nota
20	

5. Encima de un edificio de 120 m de altura, hay una antena de radio. Una persona de 1,80 m de altura, desde el suelo ve el pie de la antena con un ángulo de elevación de  $38^\circ 20'$  y el extremo de la antena con un ángulo de elevación de  $50^\circ 35'$ . Calcular la altura de la antena.

Los triángulos ABC y ABD son rectángulos. En cada uno de ellos calculamos la tangente del ángulo A. Quedan dos ecuaciones que al resolverlas nos permiten hallar la altura de la antena:

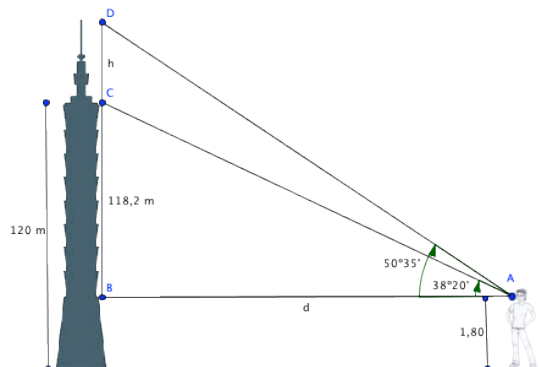
$$\tan 38^\circ 20' = \frac{118,2}{d} \Rightarrow d = \frac{118,2}{\tan 38^\circ 20'} = \frac{118,2}{0,790697} = 149,49 \text{ m}$$

y sustituyendo en la tangente del otro lado, tenemos:

$$\tan 50^\circ 35' = \frac{118,2 + h}{d} \Rightarrow 1,216698 = \frac{118,2 + h}{149,49}$$

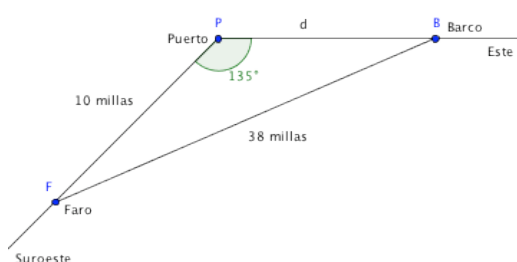
Se resuelve ahora la ecuación y queda que:

$$181,88 = 118,2 + h \Rightarrow \boxed{h = 63,68 \text{ m}}$$



Valor	Nota
20	

6. A 10 millas al Suroeste de un puerto hay un faro. Un barco navega hacia el Este desde el puerto a 24 nudos y ha salido al mediodía. ¿A qué hora está a 38 millas del faro?



La dirección Este con la Suroeste forma un ángulo de  $135^\circ$ . En la figura se puede observar la disposición del Faro, Puerto y Barco, así como los datos del problema. Sólo tenemos que averiguar la distancia recorrida por el barco y una vez la sepamos dividir por la velocidad, que es de 24 nudos (millas/hora) para saber el tiempo que necesitamos para recorrerlo. Aplicamos el teorema del coseno:

$$38^2 = 10^2 + d^2 - 2 \cdot 10 \cdot d \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow 1444 = 100 + d^2 + 14,14 \cdot d$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado que resulta:

$$d^2 + 14,14 \cdot d - 1344 = 0 \Rightarrow d = \frac{-14,14 \pm \sqrt{14,14^2 + 4 \cdot 1344}}{2} = \begin{cases} 30,27 \text{ millas} \\ -44,41 \text{ millas} \end{cases}$$

Evidentemente, la solución negativa no sirve pues indicaría que el barco ha ido hacia el Oeste. Luego el Barco está a 30,27 millas del Puerto que a 24 millas hora, le ha costado hacerlo:

$$t = \frac{30,27}{24} = 1,26 \text{ h} = \boxed{1 \text{ h } 16 \text{ min}}$$

Como sal del Puerto a mediodía, es precisamente esa hora.

Valor	Nota
20	

7. Un barco que navega en dirección noreste con una velocidad de 30 nudos, observa un faro al mediodía, en dirección N  $100^\circ$  E. Una hora más tarde ese mismo faro lo observa en dirección N  $150^\circ$  O. ¿A qué distancia estaba en cada momento del faro? ¿Cuál ha sido la menor distancia a la que ha estado del faro? ¿A qué hora? ?

En la figura adjunta A indica la primera posición del Barco, B la segunda una hora después a 30 millas al Noreste de A. El Faro se encuentra en F. Del triángulo ABF, conocemos el lado  $AB = 30$  y los ángulos  $A = 100^\circ - 45^\circ = 55^\circ$  y  $B = 150^\circ - 135^\circ = 15^\circ$ . Por tanto el tercer ángulo vale  $F = 180^\circ - 55^\circ - 15^\circ = 110^\circ$ . Aplicando el teorema del seno podemos averiguar los otros dos lados, que son las distancia del Barco al Faro en los dos momentos:

$$\frac{30}{\sin 110^\circ} = \frac{AF}{\sin 15^\circ} = \frac{BF}{\sin 55^\circ} \Rightarrow \begin{cases} AF = \frac{30 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 110^\circ} = \boxed{8,26 \text{ millas}} \\ BF = \frac{30 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 110^\circ} = \boxed{26,16 \text{ millas}} \end{cases}$$

La menor distancia al Faro es en el punto D, que es el pie de la altura. Tenemos que calcular AD para saber la distancia que hay que recorrer para llegar a él y dividiendo por la velocidad (30 millas/h) sabremos cuanto le cuesta llegar a D. En el triángulo ADF calculamos el seno y el coseno de A:

$$\cos 55^\circ = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AD = AF \cdot \cos 55^\circ = 4,74 \text{ millas}$$

$$\sin 55^\circ = \frac{DF}{AF} \Rightarrow h = DF = AF \cdot \sin 55^\circ = \boxed{6,77 \text{ millas}}$$

Luego la menor distancia a la que está del faro son 6,77 millas y eso ocurre:  $t = \frac{4,74}{30} = 0,158 \text{ h} = \boxed{9,5 \text{ min}}$

después del mediodía, que es el tiempo que le cuesta al barco recorrer las 4,74 millas que le separan de D

