Las cónicas responden a la ecuación general del tipo F(x , y) = 0
La ecuación general de una cónica es:

$$\underbrace{Ax^2 + Bxy + Cy^2}_{\text{términos cuadráticos}} + \underbrace{Dx + Ey}_{\text{términos lineales}} + \underbrace{F}_{\text{término independiente}} = 0 \quad \textbf{(I)}$$

Bxy término rectangular, cuando aparece este término significa la cónica esta rotada, en esta guía sólo vamos a ver B=0(sin termino rectangular)

CIRCUNFERENCIA:

- **Definición: Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado Centro y esa distancia es el radio.**
- **Ecuación Canónica:** $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$
- **Centro:** (α, β)
- **Radio: r**
- **En (I) A=B**
- **Cuando en (I) aparece A=B es del tipo Circunferencia, pero puede degenerar en un punto o en no existe lugar geométrico.**

1) **1.1 Halle y grafique el lugar geométrico de los puntos P(x,y)que distan 3 unidades de C(-2,3).**
   1.2 Traslade los ejes coordenados de forma tal que el nuevo origen de coordenadas sea C(-2,3).¿Cuáles son las coordenadas de C en el sistema trasladado?
   1.3 Exprese la ecuación de la cónica que obtuvo en 1 tomando como referencia el sistema (Ci,j)

1.1 C(-2.3) r=3

Reemplazamos directamente en la ecuación canónica de la Circunferencia:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

1.2 Traslade los ejes coordenados de forma tal que el nuevo origen de coordenadas sea C(-2,3).¿Cuáles son las coordenadas de C en el sistema trasladado?

Las ecuaciones de traslación son: $\begin{cases} x' = x-\alpha \\ y' = y-\beta \end{cases}$ donde (α, β) es el centro de la circunferencia

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases}$$

1.3 Exprese la ecuación de la cónica que obtuvo en 1 tomando como referencia el sistema (Ci,j)

Reemplazando las ecuaciones de traslación en la ecuación canónica obtenemos:

$$x'^2 + y'^2 = 9$$

2) **Halle las ecuaciones de las siguientes circunferencias:**
   2.1 C(3,-4), r = 5

Directamente reemplazamos el centro y el radio en la ecuación canónica de la circunferencia:
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

2.2 C(2,-1), pasa por el origen

En la ecuación canónica de la circunferencia reemplazamos el centro:
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$$

Como el origen pertenece a la circunferencia verifica la ecuación:
$(0-2)^2+(0+1)^2=r^2$

$4+1=r^2 \qquad r^2=5$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5$$

2.3 Su centro esta sobre el eje "Y"; que pasa por A(-1,1) y B(2,3)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Como el centro esta sobre el eje "y", cualquier punto del eje la componente x vale cero, reemplazando en la ecuación:

$$(x-0)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ (I)}$$

El punto A verifica la ecuación, reemplazamos en (I)

$$(-1-0)^2+(1-\beta)^2=r^2$$

Lo mismo el punto B: $(2-0)^2+(3-\beta)^2=r^2$

$$\begin{cases} 1+1-2\beta+\beta^2=r^2 (I) \\ 4+9-6\beta+\beta^2=r^2 (II) \end{cases}$$

Igualando (I) y (II)

$$2-2\beta+\beta^2=13-6\beta+\beta^2 \quad \Rightarrow \quad 6\beta-2\beta=13-2 \quad \Rightarrow \quad 4\beta=11 \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{11}{4}$$

Reemplazando el valor de $\beta=\dfrac{11}{4}$ en $(-1-0)^2+(1-\beta)^2=r^2$

$$1+(1-\frac{11}{4})^2=r^2$$

$$1+\frac{49}{16}=r^2 \Rightarrow \quad r^2=\frac{65}{16}$$

Reemplazamos en (I) : $(x-0)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$$x^2+(y-\frac{11}{4})^2=\frac{65}{16}$$

2.4 Su centro esta sobre la recta –2x + y = 0, que pasa por el origen y su radio es $\sqrt{5}$.

Si el centro (α, β) esta sobre la recta verifica la ecuación de la recta: y=2x $\Rightarrow \quad \beta = 2\alpha$

Reemplazamos en la ecuación canónica de la circunferencia $\Rightarrow \quad \beta = 2\alpha$ y r $= \sqrt{5}$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-2\alpha)^2 = 5*$$

Pasa por el origen (0,0) pertenece a la circunferencia:

$$(0-\alpha)^2 + (0-2\alpha)^2 = 5$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = 5$$

$$5\alpha^2 = 5$$

$$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \vee \quad \alpha = -1$$

Reemplazamos en *:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \textbf{o} \quad (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

3) Analice si las siguientes ecuaciones representan circunferencias e indique, cuando sea posible, las coordenadas del centro y el valor del radio:

3.1 $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$

Completamos cuadrados, asociamos los términos en x e y:

$$(x^2 + 4x + \quad) + (y^2 - 6y + \quad) = 12$$

- Dividimos el coeficiente del término lineal por 2(ese valor va a ser el segundo término del binomio) y lo elevamos al cuadrado
- Ese término lo sumamos a ambos miembros para que no altere la expresión

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 12 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Es una circunferencia de centro (-2,3) y radio 5

3.2 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$

$$(x^2 - 4x + \quad) + (y^2 + 2y + \quad) = -10$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -10 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = -5$$

Si observamos tenemos dos términos elevados al cuadrado sumando, nunca nos puede dar un número negativo $\Rightarrow$ no existe lugar geométrico

3.3 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

$$(x^2 - 2x + \quad) + (y^2 + 6y + \quad) = -10$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -10 + 9 + 1$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

Para que la suma de dos términos nos de por resultado el valor cero puede pasar que los dos términos sean opuestos o los dos nulos, como están elevados al cuadrado la única alternativa es que sean cero.

El valor de x que hace cero el primer término es 1 y el valor de y que hace cero el segundo término es -3 $\Rightarrow$ Es el punto (1,-3)

Como podemos observar en estas tres ecuaciones, los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales, eran del tipo circunferencia, pero vimos que podían degenerar en un punto o no existe lugar geométrico.

4) ¿Para qué valores reales de k las siguientes ecuaciones representan:

- **i) circunferencias**
- **ii) puntos (escríbalos)**
- **iii) ningún lugar geométrico real**

4.1 $x^2 + y^2 + kx + 2 = 0$

Completamos cuadrados.

$$(x^2 + kx + \quad) + y^2 = -2$$

$$(x^2 + kx + \frac{k^2}{4}) + y^2 = -2 + \frac{k^2}{4}$$

$$(x + \frac{k}{2})^2 + y^2 = \frac{k^2 - 8}{4}$$

Circunferencia: $\frac{k^2 - 8}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 > 8 \Rightarrow \quad |k| > \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad |k| > 2\sqrt{2}$

Punto: $\frac{k^2 - 8}{4} = 0 \Rightarrow k^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad |k| = \sqrt{8} \Rightarrow \quad |k| = 2\sqrt{2}$

k $= 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad$ P($-\sqrt{2}$,0)

k $= -2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad$ P($\sqrt{2}$,0)

No existe lugar geométrico: $\frac{k^2 - 8}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad |k| > 2\sqrt{2}$

4.2 $x^2 + y^2 + 6kx - 4y + 13k = 0$

$$(x^2 + 6kx + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -13k$$

$$(x^2 + 6kx + 9k^2) + (y^2 - 4y + 4) = -13k + 9k^2 + 4$$

$$(x + 3k)^2 + (y - 2)^2 = 9k^2 - 13k + 4 \; \textbf{(*)}$$

$$9k^2 - 13k + 4 = 0$$

$$k = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{18} = \frac{13 \pm 5}{18} \qquad k = 1 \quad k = \frac{4}{9}$$

- Cualquier valor entre $\frac{4}{9}$ y 1 que reemplace en (*) no da por resultado un valor negativo, los demás valores dan positivo.

k>1 ó k>$\frac{4}{9}$ circunferencia

k = 1 ó k = $\frac{4}{9}$ Punto

k<1 y k>$\frac{4}{9}$ no existe lugar geométrico

4.3 $4x^2 + 4y^2 - 4x + 6ky + 4k + 1 = 0$

Asociamos los términos en x e y y en ambos casos sacamos factor común 4

$$4(x^2 - x + \quad) + 4(y^2 + \frac{6}{4}ky + \quad) = -4k - 1$$

$$4(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 4(y^2 + \frac{3}{2}ky + \frac{9}{16}k^2) = -4k - 1 + 1 + \frac{9}{4}k^2$$

Tengamos en cuenta que al sumar $\frac{1}{4}$ en el 1º miembro esta afectado por el 4, entonces en el 2º tengo que sumar $\frac{1}{4}$ por 4. Lo mismo que el $\frac{9}{16}k^2$

$$4(x - \frac{1}{2})^2 + 4(y + \frac{3}{4}k)^2 = \frac{9}{4}k^2 - 4k$$

$$k(\frac{9}{4}k - 4) = 0 \qquad \begin{cases} k = 0 \\ k = \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

$$\text{Puntos}\begin{cases} k = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}, 0) \\ k = \dfrac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) \end{cases}$$

k>0 y k<$\frac{16}{9}$ no existe lugar geométrico

k<0 o k>$\frac{16}{9}$ circunferencia

5) Halle y grafique la ecuación de la circunferencia con centro en el punto O'=(2,3) y tangente:

5. 1 al eje de abscisas
5.2 al eje de ordenadas
5.3 a la recta t:-3x + y – 3 = 0

5. 1 al eje de abscisas

Reemplazamos el centro en la ecuación de la circunferencia

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

El eje de abscisas es el eje x y su ecuación es y = 0

La intersección de la circunferencia con el eje x nos da por resultado un punto, planteamos el sistema: $\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=r^2\\ y=0\end{cases}$

Reemplazamos en la ecuación de la circunferencia y = 0

$$(x-2)^2+(0+3)^2=r^2$$

Ten gamos en cuenta que la incógnita es x

$$x^2-4x+4+9=r^2$$

$$x^2-4x+(13-r^2)=0$$

Es una ecuación cuadrática, cuando la resolvemos aplicando la fórmula el discriminante $\Delta=b^2-4ac$ nos puede dar positivo, negativo o cero

$\Delta>0$ son dos puntos

$\Delta=0$ un punto

$\Delta<0$ ningún punto

En nuestro ejercicio queremos que el eje sea tangente a la circunferencia, significa que hay un solo punto en común $\Rightarrow \quad \Delta=0$

$$\Delta=16-4(13-r^2)=0$$

$$4r^2-36=0 \qquad 4r^2=36 \qquad r^2=9$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=9$$

5.2 al eje de ordenadas

Es exactamente igual que el ejercicio anterior pero teniendo en cuenta que el eje de ordenadas es el eje y y cuya ecuación es x = 0

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=r^2\\ x=0\end{cases}$$

$$(0-2)^2+(y+3)^2=r^2$$

$$4+y^2+6y+9=r^2$$

$$y^2+6y+(13-r^2)=0$$

$$\Rightarrow \Delta=0$$

$$\Delta=36-4(13-r^2)=0$$

$$4r^2-16=0 \qquad 4r^2=16 \qquad r^2=4$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4$$

5.3 a la recta t:-3x + y – 3 = 0

Despejamos de la ecuación de la recta y $\Rightarrow$ y = 3x+3

Hallamos la intersección de la recta y la circunferencia, teniendo en cuenta que la intersección tiene que dar un solo punto

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=r^2\\ y=3x+3\end{cases}$$

$$(x-2)^2+(3x+3+3)^2=r^2$$
$$(x-2)^2+(3x+6)^2=r^2$$
$$x^2-4x+4+9x^2+36x+36-r^2=0$$
$$10x^2+32x+(40-r^2)=0$$
$$\Rightarrow \quad \Delta=0 \quad \Rightarrow \quad 32^2-4.10(40-r^2)=0$$
$$1024-1600+40r^2=0 \quad \Rightarrow \quad 40r^2=576 \quad \Rightarrow \quad r^2=\frac{72}{5}$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{72}{5}$$

PARÁBOLA:

- **DEFINICIÓN: Es el lugar geométrico de los puntos P(x, y) que equidistan de una recta fija llamada directriz y un punto fijo llamado foco.**
- **Vértice** (α,β)
- **En la ecuación general de una cónica:** $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$**, para que sea del tipo parábola A ó C tiene que ser cero**
- **Tengamos en cuenta que una parábola puede degenerar en un par de rectas, 1 recta o no existe lugar geométrico**
- **Eje focal paralelo al eje x**
  - **Vértice :** (α,β)
  - **Foco:** $(\frac{p}{2}+\alpha,\beta)$
  - **Directriz:** $y=-\frac{p}{2}$
  - **Lado recto:** $2|p|$
  - **Eje focal:** $y=\beta$
  - **Ecuación:** $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$

Eje focal paralelo al eje y:

- **Vértice :** (α,β)
- **Foco:** $(\alpha,\frac{p}{2}+\beta)$
- **Directriz:** $x=-\frac{p}{2}$
- **Lado recto:** $2|p|$
- **Eje focal:** $x=\beta$
- **Ecuación :** $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$

6) Halle y grafique el lugar geométrico de los puntos P(x , y) que equidistan:

6.1 del punto F(1,0) y de la recta x = -1

Si dibujamos la recta y el foco nos damos cuenta que la parábola es de eje focal coincidente con el eje x y que el vértice es el origen:

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$$

$y^2 = 2px$ por ser $V(\alpha,\beta) = (0,0)$

F(1,0) $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = 1$ $\Rightarrow$ p=2 $\Rightarrow$ 2p=4

Reemplazamos en la ecuación $\Rightarrow$ $y^2 = 4x$

6.2 del punto F(0,-5) y de la recta y = 5.

Si analizamos como en el ejercicio anterior , concluimos que eje focal es coincidente con el eje y y que también el vértice es el origen

$$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$$

$$x^2 = 2py$$

F(0,-5) $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = -5$ $\Rightarrow$ p = -10 $\Rightarrow$ 2p = -20

$$x^2 = -20y$$

7) Obtenga las ecuaciones de las siguientes parábolas:

7.1 V(0,0) , F(-2,0)

El foco esta sobre el eje x $\Rightarrow$ eje focal x

Como el vértice es el origen $\Rightarrow$ ecuación : $y^2 = 2px$

Foco(-2,0) $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = -2$ $\Rightarrow$ p = -4 $\Rightarrow$ 2p = -8 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

$y^2 = -8x$

7.2 V(0,0)pasa por P_0(2,3) y su eje focal es el eje “x”

$$y^2 = 2px$$

Si pasa por el punto P_0(2,3) verifica la ecuación $\Rightarrow$ $3^2 = 2p.2$ $\Rightarrow$ $2p = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ $y^2 = \frac{9}{2}x$

7.3V(-4,3)F(-4,1)

Si marcamos estos puntos concluimos que la parábola es de eje paralelo al eje y

$\Rightarrow$ $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$

reemplazamos las componentes del vértice

$(x+4)^2 = 2p(y-3)$

El foco es $(\alpha, \frac{p}{2}+\beta)$ =(-4,1)

Si a este par ordenado le restamos las componentes del vértice nos da p/2 $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = 2$ $\Rightarrow$ p = 4

$\Rightarrow$ 2p = 8

Por último reemplazamos en la ecuación

$$(x+4)^2 = 8(y-3)$$

7.4 Eje paralelo al eje x, V(1,3), que pasa por (-1,-1)

Eje paralelo al eje x $\Rightarrow$ $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

Vértice =(1,3) $\Rightarrow$ $(y-3)^2 = 2p(x-1)$

pasa por (-1,-1) verifica la ecuación: $(-1-3)^2 = 2p(-1-1)$

16 = 2p(-2) $\Rightarrow$ 2p = -8

$$\Rightarrow \qquad (y-3)^2 = -8(x-1)$$

8) Para cada una de las siguientes ecuaciones

8.1 $2x^2 + 5y - 3x + 4 = 0$

8.2 $y = x^2 - 2x + 3$

8.3 $x = -y^2 + 2y - 7$

se pide:

a) Completando cuadrados obtenga una ecuación del tipo
$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ ó $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

b) Efectué una traslación conveniente para que el nuevo origen de coordenadas coincide con el vértice de la parábola.

c) Obtenga las coordenadas del foco y del vértice, la longitud del lado recto y las ecuaciones de la directriz y del eje focal(sugerencia: use las ecuaciones que caracterizan la traslación) .

d) Grafique

8.1 $2x^2 + 5y - 3x + 4 = 0$

Completamos cuadrados, asociamos los términos en x y sacamos factor común 2

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \quad) = -5y - 4$$

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) = -5y - 4 + \frac{9}{8}$$

$$2(x - \frac{3}{4})^2 = -5y - \frac{23}{8}$$

$$2(x - \frac{3}{4})^2 = -5(y + \frac{23}{40})$$

respuesta: a) $(x - \frac{3}{4})^2 = -\frac{5}{2}(y + \frac{23}{40})$

Vértice : $(\frac{3}{4}, -\frac{23}{40})$, parábola de eje focal paralelo al eje y ecuaciones de traslación: $\begin{cases} x' = x - \dfrac{3}{4} \\ y' = y + \dfrac{23}{40} \end{cases}$ reemplazando en la ecuación obtenida en a)

$x'^2 = -\dfrac{5}{2}y'$ respuesta b)

$2p = -\dfrac{5}{2}$ $p = -\dfrac{5}{4}$ $\dfrac{p}{2} = -\dfrac{5}{8}$

	S(O',x',y')	S(O,x,y)
Vértice	(0,0)	$(3/4, -23/40)$
Foco	$(0, -\dfrac{5}{8})$	$(3/4, -23/40 - 5/8)$
Eje focal	X'=0	$x - \dfrac{3}{4} = 0$
Directriz	$Y' = -\dfrac{5}{8}$	$Y + \dfrac{23}{40} = -\dfrac{5}{8}$
Lado recto	$5/2$	$5/2$

8.2 $y = x^2 - 2x + 3$

a)

$(x^2 - 2x + 1) = y - 3 + 1$

$(x - 1)^2 = y - 2$

b) ecuaciones de traslación que reemplazamos en la ecuación $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

$x'^2 = y'$

$2p = 1 \Rightarrow$ $p = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{4}$

	S(O',x',y')	S(O,x,y)
Vértice	(0,0)	(1,2)
Foco	$(0, \dfrac{1}{4})$	$(1, 2 + \dfrac{1}{4})$
Eje focal	X'=0	$x - \dfrac{3}{4} = 0$
Directriz	$Y' = -\dfrac{1}{4}$	$Y - 2 = -\dfrac{1}{4}$
Lado recto	1	1

8.3 $x = -y^2 + 2y - 7$

$y^2 - 2y = -x - 7$

$$(y^2 - 2y + 1) = -x - 7 + 1$$
$$(y-1)^2 = -x - 6$$
a) $(y-1)^2 = -(x+6)$

b) $\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad y'^2 = -x'$

2p = -1 $\Rightarrow$ p = $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$

	S(O',x',y')	S(O,x,y)
Vértice	(0,0)	(-6,1)
Foco	$(-\frac{1}{4},0)$	$(-\frac{25}{4},1)$
Eje focal	Y'=0	y-1=0
Directriz	x'= $\frac{1}{4}$	x+6= $\frac{1}{4}$
Lado recto	1	1

9) Halle la ecuación del arco parabólico de base b y altura h representado en la figura.

Como observamos en la figura de la guía es una parábola de eje paralelo al eje y, cuya ecuación es: $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ (I)

(0,0) pertenece a la parábola $\Rightarrow$ $(0-\alpha)^2 = 2p(0-\beta)$

Vértice: $(\frac{b}{2}$,h) $\Rightarrow$ $(0-\frac{b}{2})^2 = 2p(0-h)$

$$\frac{b^2}{4} = 2p(-h)$$
$$2p = -\frac{b^2}{4h}$$

Reemplazando 2p y el vértice en (I)

$$(x-\frac{b}{2})^2 = -\frac{b^2}{4h}(y-h)$$

ELIPSE:

- **Definición: Es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) tales que la suma a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2.a**
- **Semieje mayor: a , eje mayor: 2a**
- **Semieje menor: b , eje menor 2b**
- **Distancia focal: 2c**
- **Relación pitagórica de la Elipse:** $a^2 = b^2 + c^2$

- **Lado recto** $= \dfrac{2b^2}{a}$
- **Excentricidad** $= \dfrac{c}{a}$ **(en la elipse <1)**
- **En la elipse siempre a > b**
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ **Para que sea del tipo elipse el signo de A debe ser igual al signo de C**
- **Tengamos en cuenta que una elipse puede degenerar exactamente igual que una circunferencia, en un punto y no existe lugar geométrico**

- **Centro en el origen (0,0), Eje focal x**
  - **Vértices:** $(\pm a, 0)$
  - **Focos:** $(\pm c, 0)$
  - **Vértices secundarios:** $(0, \pm b)$
  - **Ecuación eje focal y = 0**
  - **Directrices** $x = \pm \dfrac{a}{e}$
  - **Ecuación canónica** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- **Centro en el origen (0,0), eje focal y**
  - **Vértices:** $(0, \pm a)$
  - **Focos:** $(0, \pm c)$
  - **Vértices secundarios:** $(\pm b, 0)$
  - **Ecuación eje focal x = 0**
  - **Directrices** $y = \pm \dfrac{a}{e}$
  - **Ecuación canónica** $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

- **Centro** (α, β) **,eje paralelo al eje x**
  - **Vértices:** $(\alpha \pm a, \beta)$
  - **Focos:** $(\alpha \pm c, \beta)$
  - **Vértices secundarios:** $(\alpha, \beta \pm b)$
  - **Ecuación eje focal** $y = \beta$
  - **Directrices** $x - \alpha = \pm \dfrac{a}{e}$
  - **Ecuación canónica** $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
- **Centro** (α, β)**, eje paralelo al eje y**
  - **Vértices:** $(\alpha, \beta \pm a)$
  - **Focos:** $(\alpha, \beta \pm c)$
  - **Vértices secundarios:** $(\alpha \pm b, \beta)$
  - **Ecuación eje focal** $x = \alpha$

- **Directrices** $y-\beta = \pm \dfrac{a}{e}$
- **Ecuación canónica** $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$

10) Para cada una de las siguientes elipses, halle los semiejes mayor y menor, las coordenadas de vértices y focos, y la excentricidad. Grafique.

10.1 $9x^2 + 16y^2 = 144$

10.2 $3x^2 + 2y^2 = 6$

10.3 $2x^2 + 3y^2 = 11$

10.1 $9x^2 + 16y^2 = 144$

Dividimos ambos miembros por 144

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 144$$

El denominador con mayor valor es a^2

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$ semieje mayor

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$ semieje menor

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16\text{-}9 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{7}$

Como a esta en el termino x , la elipse es de eje focal x

Vértices: $(\pm 4,0)$ Focos $(\pm\sqrt{7},0)$ excentricidad $= \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

10.2 $3x^2 + 2y^2 = 6$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$a^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3}$ semieje mayor

$b^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{2}$ semieje menor

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 3\text{-}2 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

Como a esta en el termino y , la elipse es de eje focal y

Vértices: $(0,\pm\sqrt{3})$ Focos $(0,\pm 1)$ excentricidad $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

10.3 $2x^2 + 3y^2 = 11$

$$\frac{x^2}{\frac{11}{2}} + \frac{y^2}{\frac{11}{3}} = 1$$

$a^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{11}{2}}$ semieje mayor

$b^2 = \frac{11}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{11}{3}}$ semieje menor

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{11}{2} - \frac{11}{3} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{11}{6}}$

Como a esta en el termino x , la elipse es de eje focal x

Vértices: $(\pm\sqrt{\frac{11}{2}},0)$ Focos $(\pm\sqrt{\frac{11}{6}},0)$

excentricidad $= \sqrt{\frac{11}{6}} : \sqrt{\frac{11}{2}}$ $e = \sqrt{\frac{11}{6} \cdot \frac{2}{11}}$ $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

11) En cada caso halle la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas:

11.1 $V_{1,2}(\pm 5,0)$ Focos$(\pm 4,0)$

11.2 Vértices$(0, \pm 10)$ Excentricidad $\frac{4}{5}$

11.3 Focos $(0, \pm 4)$ Excentricidad $\frac{4}{5}$

11.4 Ejes coincidentes con los ejes coordenados y pasa por (4,3) y (-1,4)

11.5 Focos$(\pm 3,0)$, pasa por (4,1)

11.1 $V_{1,2}(\pm 5,0)$ Focos$(\pm 4,0)$

Si marcamos estos elementos concluimos que la elipse tiene centro en el origen y eje focal x

$\Rightarrow$ ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a =5 y c = 4 que nos dan los vértices y los focos, que son datos

Nos falta calcular b: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 16$

$b^2 = 9$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

11.2 Vértices(0, $\pm$ 10) Excentricidad $\frac{4}{5}$

Si ubicamos los vértices vemos que en el punto medio esta el centro (0,0) y el eje focal es el eje y$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

La componente del vértice es a = 10

Por otro lado nos dan como dato la excentricidad $\Rightarrow$ $e=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

Un error muy común es suponer que c=4 y a=5 ESTA MAL

$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ y a=10 $\Rightarrow$ $c=\frac{4}{5}a$ $\Rightarrow$ $c=\frac{4}{5}10$ $\Rightarrow$ c=8

nos falta calcular el valor de b $\Rightarrow$ $a^2=b^2+c^2$

$$b^2=a^2-c^2$$
$$b^2=100-64$$
$$b^2=36$$

Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$$

11.3 Focos (0, $\pm$ 4) Excentricidad $\frac{4}{5}$

Con los focos deducimos que el centro esta en el origen y el eje focal y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

c = 4 dato del foco

$e=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $c=\frac{4}{5}a\Rightarrow$ $a=\frac{5}{4}c$ $a=\frac{5}{4}4$ a = 5

Nos falta el valor de b $\Rightarrow$ $a^2=b^2+c^2$

$$b^2=a^2-c^2$$
$$b^2=25-16$$
$$b^2=9$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

11.4 Ejes coincidentes con los ejes coordenados y pasa por (4,3) y (-1,4)

Con los ejes coincidentes con los ejes coordenados sabemos que el centro es el origen, pero dándonos dos puntos no sabemos si es de eje focal x o y

Suponemos que es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y después vemos que pasa con la solución

Los puntos pertenecen a la elipse entonces verifican la ecuación:

(4,3) $\frac{4^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16b^2+9a^2}{a^2b^2}=1 \Rightarrow 16b^2+9a^2=a^2b^2$ **(I)**

(-1,4) $\frac{(-1)^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1b^2+16a^2}{a^2b^2}=1 \Rightarrow 1b^2+16a^2=a^2b^2$ **(II)**

Igualamos (I) y (II): $16b^2+9a^2=1b^2+16a^2$

$$15b^2=7a^2$$

$$a^2=\frac{15}{7}b^2$$

Reemplazamos en (II)

$b^2+16.\frac{15}{7}b^2=\frac{15}{7}b^2b^2$ sacamos factor común b^2 y dividimos por b^2

$1+\frac{240}{7}=\frac{15}{7}b^2$

$\frac{247}{7}=\frac{15}{7}b^2$ $\qquad b^2=\frac{247}{7}.\frac{7}{15}$ $\qquad b^2=\frac{247}{15}$

$a^2=\frac{15}{7}b^2$ $\qquad a^2=\frac{15}{7}\frac{247}{15}$ $\qquad a^2=\frac{247}{7}$

Reemplazamos los valores obtenidos en $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{\frac{247}{7}}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1$$

11.5Focos($\pm$ 3,0), pasa por (4,1)

Con los focos deducimos que el centro es el origen y el eje focal es el x, también que c=3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a^2=b^2+c^2$ $\qquad a^2=b^2+9$ *

(4,1) verifica la ecuación : $\frac{16}{b^2}+\frac{1}{a^2}=1$

$16b^2+a^2=a^2b^2$ reemplazando *

$16b^2+b^2+9=(b^2+9)b^2$

$b^4 - 8b^2 - 9 = 0$

$$b^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4.9}}{2} \qquad b^2 = \frac{8 \pm 10}{2}$$

$b^2 = -1$ que no puede ser o $b^2 = 9$

Reemplazando el valor en $a^2 = b^2 + 9$

$$a^2 = 18$$

Por último reemplazamos en la ecuación:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

12) Para cada una de las siguientes elipses:

12.1 $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$

12.2 $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$

se pide:

a) **Completando cuadrados obtenga una ecuación del tipo**
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$
b) **Efectué una traslación conveniente para que O' coincida con el centro de la elipse.**
c) **Obtenga las coordenadas de focos , vértices, la longitud del lado recto y las ecuaciones de las directrices y del eje focal.**

12.1 $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$

Completamos cuadrados:

$$(x^2 - 8x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) = 0$$
$$(x^2 - 8x + 16) + 2(y^2 + 2y + 1) = 0 + 16 + 2$$
$$(x-4)^2 + 2(y+1)^2 = 18 \text{ dividimos por } 18$$

a) $$\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

b) $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

c) $\dfrac{x'^2}{18} + \dfrac{y'^2}{9} = 1$

$a^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad$ b = 3

$a^2 = b^2 + c^2 \qquad c^2 = a^2 - b^2 \qquad c^2 = 18 - 9 \qquad c^2 = 9 \qquad$ c = 3

$e = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lado recto $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2.9}{3\sqrt{2}} \cong 4{,}24$

	S(O',x',y')	S(O,x,y)
Centro	(0,0)	(4,-1)
Vértices	$(\pm 3\sqrt{2},0)$	$(4 \pm 3\sqrt{2},-1)$
Focos	$(\pm 3,0)$	$(4\pm 3,-1)$
Vértices Secundarios	$(0,\pm 3)$	$(4,\pm 3\text{-}1)$
Eje focal	Y'=0	Y = -1
Directrices	$x' = \pm 6$	$x - 4 = \pm 6$

12.2 $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$

$9(x^2 - 6x + \quad) + 8(y^2 - 2y + \quad) = -17$

$9(x^2 - 6x + 9) + 8(y^2 - 2y + 1) = -17 + 81 + 8$

$9(x-3)^2 + 8(y-1)^2 = 72$

$\dfrac{(x-3)^2}{8} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

b) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

c) $\dfrac{x'^2}{8} + \dfrac{y'^2}{9} = 1$

$a^2 = 9 \quad \Rightarrow$ a = 3

$b^2 = 8 \quad \Rightarrow b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 \qquad c^2 = a^2 - b^2 \qquad c^2 = 9 - 8 \qquad$ c = 1

$e = \dfrac{1}{3}$ lado recto $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{16}{3}$

	S(O',x',y')	S(O,x,y)
Centro	(0,0)	(3,1)
Vértices	$(0,\pm 3)$	$(3,1\pm 3)$
Focos	$(0,\pm 1)$	$(3,1\pm 1)$
Vértices Secundarios	$(\pm 2\sqrt{2},0)$	$(3\pm 2\sqrt{2},1)$
Eje focal	X'=0	X=3
Directrices	$y' = \pm 9$	$y - 1 = \pm 9$

13) **Determine el lugar geométrico de los puntos que verifican:**

$$(x^2 + y^2 - 1)(9x^2 + 4y^2 - 32) < 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1 > 0 \wedge 9x^2 + 4y^2 - 32 < 0) \quad \vee \quad (x^2 + y^2 - 1 < 0 \wedge 9x^2 + 4y^2 - 32 > 0)$$

14) **Determine los valores reales de A, B y C , para que la elipse** $4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ **sea tangente al eje de abscisas en el origen de coordenadas y pase por el punto:**

14.1 (-1,2)
14.2 (2,-1)

14.1 (-1,2)

$4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

La elipse es tangente en el origen, significa que este pertenece.

(0,0) 4.0+0+A.0+B.0+C=0 $\Rightarrow$ C=0

(-1,2) 4+4-A+2B=0 $\Rightarrow$ A=2B+8

el eje de abscisas $\Rightarrow$ y = 0

La intersección entre la elipse y el eje x, al ser tangente, nos da por resultado sólo un punto (igual que el ejercicio 5)

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + Ax = 0$$

$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; b^2 - 4ac = 0 \;\Rightarrow\; A^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

A=2B+8 $\Rightarrow$ B = -4

Rta: A=C=0, B=-4

14.2 (2,-1)

$4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

(0,0) 4.0+0+A.0+B.0+C=0 $\Rightarrow$ C=0

(2,-1) 16+1+2.A-B=0 $\Rightarrow$ B=2.A+17

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + Ax = 0$$

$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; b^2 - 4ac = 0 \;\Rightarrow\; A^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

B=2.A+17 B = 17

Rta: A=C=0, B=17

HIPÉRBOLA:

- **Definición: Es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) tales que la diferencia, en módulo a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2.a**

- **Semieje transverso: a , eje transverso: 2a**
- **Semieje conjugado o imaginario: b , eje conjugado 2b**
- **Distancia focal: 2c**
- **Relación pitagórica de la Hipérbola :** $c^2 = a^2 + b^2$
- **Lado recto** $= \frac{2b^2}{a}$
- **Excentricidad** $= \frac{c}{a}$ **(en la hipérbola >1)**
- **En la hipérbola <u>no</u> siempre a > b**
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ **Para que sea del tipo hipérbola el signo de A debe ser distinto al signo de C**
- **Tengamos en cuenta que la hipérbola puede degenerar en dos rectas concurrentes (que serían sus asíntotas)**

- **Centro en el origen (0,0), Eje focal x**
  - **Vértices:** $(\pm a, 0)$
  - **Focos:** $(\pm c, 0)$
  - **Vértices secundarios:** $(0, \pm b)$
  - **Ecuación eje focal y = 0**
  - **Directrices** $x = \pm \frac{a}{e}$
  - **Asíntotas** $y = \pm \frac{b}{a} x$
  - **Ecuación canónica** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **(término negativo relacionado con b)**
- **Centro en el origen (0,0), eje focal y**
  - **Vértices:** $(0, \pm a)$
  - **Focos:** $(0, \pm c)$
  - **Vértices secundarios:** $(\pm b, 0)$
  - **Ecuación eje focal x = 0**
  - **Directrices** $y = \pm \frac{a}{e}$
  - **Asíntotas** $y = \pm \frac{a}{b} x$
  - **Ecuación canónica** $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

- **Centro** (α, β) **,eje paralelo al eje x**
  - **Vértices:** $(\alpha \pm a, \beta)$
  - **Focos:** $(\alpha \pm c, \beta)$
  - **Vértices secundarios:** $(\alpha, \beta \pm b)$
  - **Ecuación eje focal** $y = \beta$
  - **Directrices** $x - \alpha = \pm \frac{a}{e}$

- **Asíntotas** $y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$
- **Ecuación canónica** $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

- **Centro** (α,β)**, eje paralelo al eje y**
  - **Vértices:** $(\alpha,\beta\pm a)$
  - **Focos:** $(\alpha,\beta\pm c)$
  - **Vértices secundarios:** $(\alpha\pm b,\beta)$
  - **Ecuación eje focal** $x=\alpha$
  - **Directrices** $y-\beta=\pm\frac{a}{e}$
  - **Asíntotas** $y-\beta=\pm\frac{a}{b}(x-\alpha)$
  - **Ecuación canónica** $-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

15) Para cada una de las siguientes hipérbolas, halle las longitudes de los semiejes transverso y conjugado, las coordenadas de vértice y focos, la excentricidad y las ecuaciones del eje focal, las directrices y las asíntotas. Grafique.

15.1 $16x^2-9y^2=144$

15.2 $25x^2-144y^2+3600=0$

15.3 $2x^2-3y^2-6=0$

15.1 $16x^2-9y^2=144$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ eje focal x, con centro en el origen

$a^2=9$ $a=3$ semieje transverso

$b^2=16$ b = 4 semieje conjugado

$c^2=a^2+b^2$ $c^2=9+16$ c = 5

Vértices: $(\pm 3,0)$ Focos: $(\pm 5,0)$ $A_{1,2}(0,\pm 4)$

Excentricidad $e=\frac{5}{3}$ eje focal y = 0 directrices $x=\pm\frac{9}{5}$ Asíntotas $y=\pm\frac{4}{3}x$

15.2 $25x^2-144y^2+3600=0$

$25x^2-144y^2=-3600$

$-\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$ hipérbola con centro en el origen y eje focal y

$a^2=25$ $a=5$ semieje transverso

$b^2 = 144$ b = 12 semieje conjugado
$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = 144+25$ c = 13

Vértices: (0,± 5) Focos: (0,± 13) $A_{1,2}$(± 12,0)
Excentricidad e = $\frac{13}{5}$ eje focal x = 0 directrices y = ± $\frac{25}{13}$ Asíntotas y=± $\frac{5}{12}$x

15.3 $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
$2x^2 - 3y^2 = 6$
$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ Hipérbola con centro en el origen y eje focal x
$a^2 = 3$ $a = \sqrt{3}$ semieje transverso
$b^2 = 2$ b = $\sqrt{2}$ semieje conjugado
$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = 3+2$ c = $\sqrt{5}$

Vértices: (± $\sqrt{3}$,0) Focos: (± $\sqrt{5}$,0) $A_{1,2}$(0,± $\sqrt{2}$)
Excentricidad e = $\sqrt{\frac{5}{3}}$ eje focal y = 0 directrices x = ± $\frac{3}{\sqrt{5}}$ Asíntotas y =± $\sqrt{\frac{2}{3}}$ x

16) **En cada uno de los casos, obtenga la ecuación de la hipérbola que satisfacen las condiciones dadas:**
16.1 Vértices(± 5,0) Focos (± 7,0)
16.2 Vértices(0, ± 7) e = $\frac{4}{3}$
16.3 e = $\sqrt{5}$, focos en el eje x, centro en el origen y pasa por (3,2)
16.4 Vértices(± 2,0) Asíntotas y =± 2x
16.5 Centro en (-1,4), F_1(-1,2) V_1(-1,3)
16.6 Asíntotas (2x-y = 0) y (2x + y = 0) y pasa por (3,2)

16.1Vértices(± 5,0) Focos (± 7,0)

A partir de los vértices y focos deducimos: hipérbola con eje focal x, centro en el origen , a = 5 y c = 7

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nos falta el valor de b
$c^2 = a^2 + b^2$ $b^2 = c^2 - a^2$ $b^2 =$ 49-25 $b^2 = 24$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$$

16.2Vértices(0, $\pm$ 7) e = $\frac{4}{3}$

Con el vértice deducimos que es de eje focal y, con centro en el origen y a =7

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ nos falta b}$$

$$e=\frac{4}{3} \qquad \frac{c}{a}=\frac{4}{3} \qquad c=\frac{4}{3}a \qquad c=\frac{4}{3}7 \qquad c = \frac{28}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad b^2 = c^2 - a^2 \qquad b^2 = \frac{784}{9} - 49 \qquad b^2 = \frac{343}{9}$$

$$-\frac{x^2}{\frac{343}{9}} + \frac{y^2}{49} = 1$$

16.3e =$\sqrt{5}$, focos en el eje x, centro en el origen y pasa por (3,2)

La ecuación tiene la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$e =\sqrt{5} \qquad \frac{c}{a}=\sqrt{5} \qquad c = \sqrt{5}\,a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 5a^2 = a^2 + b^2 \qquad b^2 = 4a^2$$

Reemplazando en la ecuación : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$

Y por último el punto (3,2) $\quad \frac{9}{a^2} - \frac{4}{4a^2} = 1 \qquad \frac{8}{a^2} = 1 \qquad a^2 =8$

$$b^2 = 4a^2 \qquad b^2 = 32$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$$

16.4Vértices($\pm$ 2,0) Asíntotas y =$\pm$ 2x

Al ubicar los vértices en los ejes deducimos que tiene eje focal x, centro en el origen y el valor de a = 2, la ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por otro lado la asíntota es y =$\pm$ 2x donde $2 = \frac{b}{a}$ b= 2a b=4 reemplazando en la ecuación:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

16.5 Centro en (-1,4), F_1(-1,2) V_1(-1,3)

En este ejemplo el centro no esta en el origen, y al ubicar el vértice y el foco vemos que es de eje focal paralelo al eje y, cuya ecuación es de la forma: $-\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

Centro (α,β)=(-1,4) $-\dfrac{(x+1)^2}{b^2}+\dfrac{(y-4)^2}{a^2}=1$

Vértices: $(\alpha,\beta\pm a)$=(-1,3) si al vértice le restamos el centro nos da el valor de a: a=1

Focos: $(\alpha,\beta\pm c)$=(-1,2) si al foco le restamos el centro nos da c: c =2

Nos falta el valor de b: $c^2=a^2+b^2$ $b^2=c^2-a^2$ $b^2=4\text{-}1$ $b^2=3$

$$-\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{1}=1$$

16.6 Asíntotas (2x-y = 0) y (2x + y = 0) y pasa por (3,2)

Si dibujamos las asíntotas deducimos que el centro es el origen, pero no sabemos si es de eje focal x o y , pero al marcar el punto que pertenece a la hipérbola deducimos que es de eje focal x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

De la asíntota se deduce que: $2=\dfrac{b}{a}$ b= 2.a, reemplazando en la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1$

y por último el punto (3,2): $\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{4}{4a^2}=1$ $\dfrac{8}{a^2}=1$ $a^2=8$

$b^2=4a^2$ $b^2=32$

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$$

17) Para cada una de las siguientes ecuaciones que corresponden a hipérbolas:

17.1 $2x^2-y^2-8x-2y+3=0$

17.2 $9y^2-4x^2-24x-36y-36=0$

se pide:

a) Completando cuadrados obtenga una ecuación del tipo

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\pm 1$$

b) Efectué una traslación conveniente para que O' coincida con el centro de la hipérbola.

c) Obtenga las longitudes de los semiejes transverso y conjugado, las coordenadas de focos , vértices, la excentricidad las ecuaciones del eje focal y de las asíntotas.

d) Grafique

17.1 $2x^2-y^2-8x-2y+3=0$

Completamos cuadrados

$$2(x^2-4x+\quad)-(y^2+2y+\quad)=-3$$
$$2(x^2-4x+4)-(y^2+2y+1)=-3+8-1$$
$$2(x-2)^2-(y+1)^2=4$$
$$\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases} \qquad \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4}=1$$

$a^2=2 \Rightarrow$ a $=\sqrt{2}$ semieje transverso

$b^2=4 \Rightarrow$ b = 2 semieje conjugado

$c^2=a^2+b^2 \quad c^2=2+4 \qquad$ c $=\sqrt{6}$

excentricidad e $=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

lado recto $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.4}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

	S(o',x'y')	S(o,x,y)
Centro	(0,0)	(2,-1)
Vértices	($\pm\sqrt{2}$,0)	($2\pm\sqrt{2}$,-1)
Focos	($\pm\sqrt{6}$,0)	($2\pm\sqrt{6}$,-1)
$A_{1,2}$	(0,$\pm$ 2)	(2,-1 $\pm$ 2)
Eje focal	Y'=0	Y+1=0
asíntotas	Y'=$\pm\sqrt{2}$ x	Y+1=$\pm\sqrt{2}$ (x-2)

17.2 $9y^2-4x^2-24x-36y-36=0$

$$-4(x^2+6x+\quad)+9(y^2-4y+\quad)=36$$
$$-4(x^2+6x+9)+9(y^2-4y+4)=36-36+36$$
$$-4(x+3)^2+9(y-2)^2=36$$

$$-\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-2 \end{cases} \qquad -\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$$

$a^2=4 \Rightarrow$ a =2 semieje transverso

$b^2=9 \Rightarrow$ b = 3 semieje conjugado

$c^2=a^2+b^2 \quad c^2=4+9 \qquad$ c $=\sqrt{13}$

excentricidad e $=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

lado recto $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.9}{2}=9$

	S(o',x'y')	S(o,x,y)
Centro	(0,0)	(-3,2)
Vértices	$(0,\pm 2)$	$(-3,2\pm 2)$
Focos	$(0,\pm\sqrt{13})$	$(-3,2\pm\sqrt{13})$
$A_{1,2}$	$(\pm 3,0)$	$(-3\pm 3,2)$
Eje focal	X'=0	X+3=0
asíntotas	$Y'=\pm\frac{2}{3}x$	$Y-2=\pm\frac{2}{3}(x+3)$

18) Obtenga la ecuación canónica, identifique y grafique las siguientes cónicas:

18.1 $4x^2+9y^2-16x+72y+124=0$

18.2 $4x^2-16x+15=0$

18.3 $4x^2-4y^2+16x-20y-9=0$

18.4 $25x^2-4y^2+150x-8y+129=0$

18.5 $x^2-y^2-2x-4y-3=0$

18.6 $x^2+y^2+4y+4=0$

18.1 $4x^2+9y^2-16x+72y+124=0$

$$4(x^2-4x+\quad)+9(y^2+8y+\quad)=-124$$

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2+8y+16)=-124+16+144$$

$$4(x-2)^2+9(y+4)^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$$

Elipse con Centro (-2,4),eje focal // al eje x

18.2 $4x^2-16x+15=0$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4.4.15}}{8} \qquad x=\frac{16\pm 4}{8} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

2 rectas //

18.3 $4x^2-4y^2+16x-20y-9=0$

$$4(x^2+4x+\quad)-4(y^2+5y+\quad)=9$$

$$4(x^2+4x+4)-4(y^2+5y+\frac{25}{4})=9+16-25$$

$$4(x+2)^2-4(y+\frac{5}{2})^2=0$$

$$(x+2)^2-(y+\frac{5}{2})^2=0$$

$$|x+2|=\left|y+\frac{5}{2}\right|$$

$x+2=y+\frac{5}{2}$ **ó** $x+2=-y-\frac{5}{2}$

$y=x-\frac{1}{2}$ $\quad$ $y=-x-\frac{9}{2}$ $\quad$ 2 rectas concurrentes

18.4 $25x^2-4y^2+150x-8y+129=0$

$$25(x^2+6x+\quad)-4(y^2+2y+\quad)=-129$$

$$25(x^2+6x+9)-4(y^2+2y+1)=-129+225-4$$

$$25(x+3)^2-4(y+1)^2=92$$

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{92}{25}}-\frac{(y+1)^2}{23}=1$$

Hipérbola de eje transverso // al eje x con centro (-3,-1)

18.5 $x^2-y^2-2x-4y-3=0$

$$(x^2-2x+\quad)-(y^2+4y+\quad)=3$$

$$(x^2-2x+1)-(y^2+4y+4)=3+1-4$$

$$(x-1)^2-(y+2)^2=0$$

$$|x-1|=|y+2|$$

x-1 = y + 2 $\quad$ ó $\quad$ x-1= -y + 2

y = x-3 $\quad$ y = -x-1

2 rectas concurrentes

18.6 $x^2+y^2+4y+4=0$

$$x^2+(y^2+4y+\quad)=-4$$

$$x^2+(y^2+4y+4)=-4+4$$

$$x^2+(y+2)^2=0$$

Es un punto el (0,-2)

19) 19.1 Para cada p>0 , la ecuación:

$$px^2 + (p+2)y^2 = p^2 + 2p$$

representa una elipse. Determine (en función de p) la excentricidad y las coordenadas de los focos.

19.2 deduzca la ecuación cartesiana de la hipérbola que tiene los mismos focos que la elipse de la parte a), y que tiene excentricidad $\sqrt{3}$.

19.1 Para cada p>0 , la ecuación:

$$px^2 + (p+2)y^2 = p^2 + 2p$$

representa una elipse. Determine (en función de p) la excentricidad y las coordenadas de los focos.

$$px^2 + (p+2)y^2 = p(p+2)$$

como p>0 podemos asegurar que p(p+2)$\neq$ 0, podemos dividir por esta expresión

$$\frac{px^2}{p(p+2)} + \frac{(p+2)y^2}{p(p+2)} = 1$$

$\dfrac{x^2}{(p+2)} + \dfrac{y^2}{p} = 1$ el mayor de los dos denominadores es p+2$\Rightarrow$ es de eje focal x, centro en el origen de coordenadas

$a^2 =$ p+2

b^2=p

Para poder calcular el foco necesitamos el valor de c

$c^2 = a^2 - b^2$ $\qquad$ $c^2 =$ p+2-p $\qquad$ $c^2 = 2$ $\qquad$ $c = \sqrt{2}$

Foco ($\pm\sqrt{2}$,0) $\qquad$ excentricidad e $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+2}} = \sqrt{\dfrac{2}{p+2}}$

19.2 deduzca la ecuación cartesiana de la hipérbola que tiene los mismos focos que la elipse de la parte a), y que tiene excentricidad $\sqrt{3}$.

Foco ($\pm\sqrt{2}$,0) $\qquad$ e $=\sqrt{3}$

La hipérbola tiene centro en el origen y el eje focal es x, $c = \sqrt{2}$

e $=\sqrt{3}$ $\qquad$ e$=\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\qquad$ $a^2 = \dfrac{2}{3}$

En la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $b^2 = c^2 - a^2$ $\qquad$ $b^2 = 2 - \dfrac{2}{3}$

$b^2 = \dfrac{4}{3}$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ obtenemos:

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

20) Obtenga todos los valores reales de k sabiendo que el eje focal de la hipérbola:

20.1 $k(k-1)x^2 + (k+1)y^2 = 1$ **es paralelo al eje de abscisas**

20.2 $x^2 + ky^2 - 6x + 2ky + 1 = 0$ **es paralelo al eje de abscisas y el eje transverso mide 4**

20.3 $-4x^2 + y^2 - 16x + k = 0$ **es paralelo al eje de ordenadas y el eje transverso mide 8.**

20.1 $k(k-1)x^2 + (k+1)y^2 = 1$ **es paralelo al eje de abscisas**

Si es de eje x la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, por lo tanto el primer término, en x, es positivo y el segundo negativo

k(k-1)>0 y k+1<0 $\Rightarrow \left[(k > 0 \wedge k-1 > 0) \vee (k < 0 \wedge k-1 < 0)\right] \wedge k < -1$

$\Rightarrow k < -1 \wedge (k > 1 \vee k < 0)$ $\Rightarrow k < -1$

20.2 $x^2 + ky^2 - 6x + 2ky + 1 = 0$ **es paralelo al eje de abscisas y el eje transverso mide 4**

Completamos cuadrados llevando la ecuación a la forma canónica : $x^2 + ky^2 - 6x + 2ky + 1 = 0$

$(x^2 - 6x + \quad) + k(y^2 + 2y + \quad) = -1$

$(x^2 - 6x + 9) + k(y^2 + 2y + 1) = -1 + 9 + k$

$(x-3)^2 + k(y+1)^2 = k + 8$

$$\frac{(x-3)^2}{k+8} + \frac{(y+1)^2}{\frac{k+8}{k}} = 1$$

Si la hipérbola es paralela al eje de abscisas tiene la forma: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

El eje transverso es 2.a = 4 $\Rightarrow$ a = 2 $\Rightarrow$ $a^2 = 4$ y $a^2 = k + 8$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

k+8 =4 $\Rightarrow$ k = -4, reemplazando este valor en el segundo término de la ecuación me da por resultado un valor negativo, que es correcto para que nos de una hipérbola.

Rta: k = -4

20.3 $-4x^2 + y^2 - 16x + k = 0$ **es paralelo al eje de ordenadas y el eje transverso mide 8.**

$-4x^2 + y^2 - 16x + k = 0$

$-4(x^2 + 4x + \quad) + y^2 = -k$

$-4(x^2 + 4x + 4) + y^2 = -k - 16$

$-4(x+2)^2 + y^2 = -k - 16$

$$-\frac{(x+2)^2}{\frac{-k-16}{4}}+\frac{y^2}{-k-16}=-k-16$$

Si la hipérbola es paralela al eje de ordenadas tiene la forma: $-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

El eje transverso es 2.a =8 $\Rightarrow$ a = 4 $\Rightarrow$ $a^2=16$ y $a^2=-k-16$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ -k-16=16 $\Rightarrow$ k = -32, reemplazando este valor en el segundo término de la ecuación me da por resultado un valor negativo, que es correcto para que nos de una hipérbola.
Rta: k = -32

21) Analice la ecuación $(h-k)x^2+(h-m)y^2=1$ en cada uno de los siguientes casos:

21.1 k>h>m
21.2 m>h>k
21.3 h>k>m

21.1 k>h>m
h-k<0 por ser h <k
h-m>0 por ser h>m
$(h-k)x^2+(h-m)y^2=1$ el primer término es negativo y el segundo positivo, es una hipérbola de eje focal o transverso y

21.2 m>h>k
h-k>0
h-m<0
$(h-k)x^2+(h-m)y^2=1$ el primer termino es positivo y el segundo es negativo, es una hipérbola de eje focal x

21.3 h>k>m
h-k>0
h-m>0
$(h-k)x^2+(h-m)y^2=1$ los dos términos son positivos, es una elipse
Vamos a analizar si puede ser una circunferencia:
Para que sea una circunferencia los coeficientes de los dos términos deben ser iguales:h-k=h-m de lo cual se deduce que k=m, es falso, por lo tanto nunca puede ser circunferencia
Rta: Elipse

22) Clasifique las siguientes ecuaciones para los distintos valores de k:

22.1 $\frac{x^2}{20-k}+\frac{y^2}{30-k}=1$

22.2 $\frac{x^2}{|k-5|}+\frac{y^2}{k-3}=1$

22.3 $(8-k)x^2+ky^2=8k-k^2$

22.1 $\dfrac{x^2}{20-k}+\dfrac{y^2}{30-k}=1$

Hay dos valores que no puede tomar k que son los que hacen cero los denominadores: para k=20 y k=30 la ecuación no esta definida

Tenemos que analizar el signo que puede tener cada término dependiendo de los valores de k.

Puede pasar que los dos términos sean positivos simultáneamente y la ecuación representaría una elipse

20-k>0 y 30-k>0 $\Rightarrow$ k<20 y k<30 $\Rightarrow$ k<20

Si son los dos términos negativos: no existe lugar geométrico

20-k<0 y 30-k<0 $\Rightarrow$ k>20 y k>30 $\Rightarrow$ k>30

Si el primer término es negativo y el segundo positivo: es una hipérbola de eje focal y

20-k<0 y 30-k>0 $\Rightarrow$ k>20 y k<30 $\Rightarrow$ k$\in$ (20,30)

La última alternativa es que el primer término sea positivo y el segundo negativo

20-k>0 y 30-k<0 $\Rightarrow$ k<20 y k>30 $\Rightarrow$ k$\in \{\ \}$ (no hay ningún valor de k simultáneamente menor que 20 y mayor que 30)

Rta: k<20 Elipse
k$\in$ (20,30) hipérbola de eje focal y
k>30 no existe lugar geométrico
k=20 y k=30 no esta definida la ecuación

22.2 $\dfrac{x^2}{|k-5|}+\dfrac{y^2}{k-3}=1$

no esta definida para k = 5 y k = 3

$|k-5|$ para cualquier de k, siempre es positiva

k-3>0, los dos términos son positivos y representa una elipse

k-3<0, el primer término positivo y el segundo negativo, representa una hipérbola de eje focal x

Rta: k<3 hipérbola de eje focal x
k>3 (distinto de 5) Elipse
k=3 y k=5 no esta definida

22.3 $(8-k)x^2+ky^2=8k-k^2$

$(8-k)x^2+ky^2=k(8-k)$

si observamos los valores que anulan los términos son k = 8 y k = 0, vamos a analizar que pasa con estos valores:

k=8 la ecuación queda de la forma: $8y^2=0$ $\Rightarrow$ y=0 es el eje x (para todo valor de x,y vale cero)

k= 0 $\Rightarrow$ $8x^2=0$ $\Rightarrow$ x = 0 eje y

A partir de esta ecuación $(8-k)x^2+ky^2=k(8-k)$ si $k\neq 8 \quad \wedge \quad k\neq 0$ dividimos ambos miembros por k(8-k):

$$\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{(8-k)}=1$$

Y a partir de acá analizamos como los ejercicios anteriores

- k>0 y 8-k>0 $\Rightarrow$ k>0 y k<8 $\Rightarrow$ k∈ (0,8) $\Rightarrow$ Elipse

- k<0 y 8-k<0 $\Rightarrow$ k<0 y k>8 $\Rightarrow$ no existe ningún valor de k que cumpla esta condición simultáneamente

- k>0 y 8-k<0 $\Rightarrow$ k>0 y k>8 $\Rightarrow$ k>8 $\Rightarrow$ hipérbola de eje x

- k<0 y 8-k>0 $\Rightarrow$ k<0 y k<8 $\Rightarrow$ k<0 $\Rightarrow$ hipérbola de eje y

Rta: k<0 hipérbola de eje y
k=0 eje y
k∈ (0,8) Elipse
k=8 eje x
k>8 hipérbola de eje x

23) Clasifique la ecuación $Ax^2+(B-1)y^2+2x-3y=0$ **en cada uno de los siguientes casos:**

23.1 A > 0; B > 1
23.2 A > 0; B = 1
23.3 A = 0; B < 1
23.4 A = 0; B > 1

23.1 A > 0; B > 1

Si B>l $\Rightarrow$ B-1>0 $\Rightarrow$ signo coeficiente de x^2 es igual al signo del coeficiente de y^2 $\Rightarrow$ la cónica es del tipo Elipse
Si A=B-1 es del tipo Circunferencia

23.2 A > 0; B = 1

La ecuación queda de la forma: $Ax^2+2x-3y=0$
Al estar una variable elevada al cuadrado y la otra lineal es una parábola de eje focal y.

23.3 A = 0; B < 1

La ecuación queda del tipo : $(B-1)y^2+2x-3y=0$ $\Rightarrow$ Parábola de eje focal x

23.4 A = 0; B > 1 $\Rightarrow$ $(B-1)y^2+2x-3y=0$ $\Rightarrow$ Parábola de eje focal x

24) Clasifique la ecuación $x^2+y^2-4+h(x^2-y^2)+kx-my=0$ **en cada uno de los siguientes casos:**

24.1 h = k = m = 1
24.2 h = k = -1; m = 0
24.3 h = 1; k = m = 0

24.4 h = 0; k = m = 1

24.1 h = k = m = 1

Si reemplazamos en la ecuación nos queda :

$$x^2 + y^2 - 4 + x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$2x^2 + x - y = 4 \text{ completamos cuadrados}$$

$$2x^2 + x + \quad = y + 4$$

$$2(x^2 + \frac{1}{2}x + \quad) = y + 4$$

$$2(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}) = y + 4 + \frac{1}{8}$$

$$2(x + \frac{1}{4})^2 = y + \frac{33}{8}$$

Parábola de Vértice $(-\frac{1}{4}, -\frac{33}{8})$ de eje focal y

24.2 h = k = -1; m = 0

Si reemplazamos en la ecuación $x^2 + y^2 - 4 + h(x^2 - y^2) + kx - my = 0$

Nos queda de la forma: $x^2 + y^2 - 4 - x^2 + y^2 - x = 0$

$$2y^2 = x + 4$$

$y^2 = \frac{1}{2}(x + 4)$ Parábola de eje focal x y Vértice (-4,0)

24.3h = 1; k = m = 0

$$x^2 + y^2 - 4 + h(x^2 - y^2) + kx - my = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 + x^2 - y^2 = 0$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$ 2 rectas paralelas

24.4h = 0; k = m = 1

$$x^2 + y^2 - 4 + x - y = 0 \text{ completamos cuadrados}$$

$$x^2 + x + y^2 - y = 4$$

$$(x^2 + x + \frac{1}{4}) + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$$

Circunferencia con centro $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

CONICAS ROTADAS

1. Clasificar las siguientes cónicas:
a) $4x^2-2xy+y^2-14x+2y+13=0$
b) $4y^2+4xy+2x^2-8y-2x+9=0$
c) $y^2+2xy-6x-8y+15=0$
Rtas: a) Cónica degenerada en un punto b) Elipse real c) Dos rectas concurrentes

2. Clasificar y hallar los elementos de las cónicas:
a) $5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0$
b) $-3x^2+y^2-4xy+x+2y-5=0$
Rtas.: a) Elipse real C(0,-1) Ejes x-2y-2=0 , 9x+2y-2=0 b) Hipérbola real C(5/2,-4)