EJERCICIOS RESUELTOS VECTORES EN EL PLANO

Cuestión 1.-
Hallar el simétrico del punto A(4, - 2) respecto de M(3, - 11).
SOL: (2,-20)

Cuestión 2.-
Dados los puntos A (3, 2) y B(5, 4) halla un punto C, alineado con A y B, de manera que se obtenga

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$$

SOL: C(9,8)

Cuestión 3.-
Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices: A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2) y D; sea un paralelogramo.
SOL: D(0,1)

Cuestión 4.- Dados los vectores $\vec{u}$ =(2, k) y $\vec{v}$ = (3, - 2), calcula k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean:
a) Perpendiculares. SOL: k = 3
b) Paralelos. SOL: k = -4/3
c) Formen un ángulo de 60°. SOL: k = 0.99 ó 31.01

Cuestión 5.- Calcular el valor de k sabiendo que $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$
$\vec{a} = -2\vec{u} + k\vec{v}$ $\qquad \vec{b} = 5\vec{u} - 3\vec{v}$

Cuestión 6.- Hallar un vector unitario $\vec{u}$ de la misma dirección del vector $\vec{v} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$. Calcula otro vector ortogonal y de módulo 5 a $\vec{v} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$

Cuestión 7.-

Normalizar los siguientes vectores: $\vec{u}$ = (1, $\sqrt{2}$), $\vec{v}$ = (-4, 3) y $\vec{w}$ = (8. -8).

Sol:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \qquad \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16+9} = 5 \qquad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{36+64} = 10 \qquad \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{8}{10}, -\frac{8}{10}\right)$$

Cuestión 8.- Calcula la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el $\overrightarrow{AC}$, siendo A(6,0), B(3,5), C(-1,-1).
SOL: $\frac{8\sqrt{2}}{5}$

Cuestión 9.- Hallar k si el ángulo que forma $\vec{u} = (3, k)$ con $\vec{v} = (2, -1)$ vale:
a) 90°   SOL: k = 6
b) 0°   SOL: k = -3/2
c) 45° SOL: k = -9 ó 1

Cuestión 10.- Comprobar que el segmento de une los puntos medios de los lados AB y AC del triángulo: A(3,5), B(-2,0), C(0,-3), es paralelo al lado BC e igual a su mitad.

Cuestión 11.- Si $M_1(2, 1)$, $M_2(3, 3)$ y $M_3(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo? SOL: A(7, 4)B(5, 0) C(−1, 2)

Cuestión 12.- Determinar si los vectores fijos AB = (35, -21) y CD = (-10, 6) tienen la misma dirección. Calcular el módulo de ambos vectores

Cuestión 13.- Dado el vector libre $\vec{a} = (5, 3)$, calcular el vector libre $\vec{b}$ que tiene la misma dirección que $\vec{a}$, distinto sentido y módulo igual a la unidad.

Cuestión 14.- Dados los puntos A = (-3, 5) y B = (3, 2) calcular las coordenadas del punto del segmento AB cuya distancia a A es el doble de su distancia a B.

Cuestión 15.- Determinar si el triángulo de vértices A = (1, 1), B = (-1, 3) y C = (-3 , -3) es escaleno.

Cuestión 16.-

Dados los puntos A (2,1); B (6,3); C (7,1) y D (3,-1). Demostrar que el polígono ABCD es rectángulo y calcula su perímetro y su área. Sol: $P=6\sqrt{5}$; $A=10$

Cuestión 17.-

Cuál es la proyección del vector (3,2) sobre el vector (5,-1)?. Sol: $\sqrt{26}/2$

Cuestión 18.-

Halla un vector unitario de misma dirección y distinto sentido que (4,-3). Sol: (-4/5,3/5)

Cuestión 19.-

Escribe vectores ortogonales al vector (-3,1) tales que: a) Su primera componente sea 2; b) Que su segunda componente sea 4; c) Que sea unitario. Sol: a) (2,6); b) (4/3,4); c) $(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$

Cuestión 20.-

Halla las componentes del vector u que sea perpendicular a v = (-3,6) y que: a) Su primera componente sea 2; b) Su módulo sea 1. Sol: a) (2,1); b) $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$

<u>Cuestión 21</u>.-

Siendo $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ hallar:

a) B si A(1,4) Sol: B(4,3)

b) A si B(-2,5) Sol A(-5,6)

<u>Cuestión 22</u>.-

Del triángulo ABC sabemos que C(6,8), $\overrightarrow{AB}(-6,4)$ y $\overrightarrow{BC}(4,2)$, hallar A, B y $\overrightarrow{AC}$.

Sol. A(8,2), B(2,6), $\overrightarrow{AC}(-2,6)$

<u>Cuestión 23</u>.-

Sabemos que $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}$ (O= origen de coordenadas) y que $\overrightarrow{AB}(4,-6)$. Hallar A y B. Sol. A(2,-3), B(6,-9).

<u>Cuestión 24</u>.-

Si A, B y C están alineados calcular "m":

a) A(m,-1), B(2,5) y C(-1,3) Sol. m=-7

b) A(-4,1), B(1,m) y C(-2,6) Sol. m=27/2

c) A(1,1), B(-4,2) y C(m,3) Sol. m=-9

<u>Cuestión 25</u>.-

Averiguar si A, B y C están o no alineados:

a) A(-3,5), B(4,2) y C(10,-1) Sol. no

b) A(-8,11), B(1,-1) y C(4,-5) Sol. si

c) A(-2,-9), B(0,1) y C(4,20) Sol. no

d) A(0,-5), B(7,-2) y C(21,4) Sol. si

<u>Cuestión 26</u>.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1,4)$ y $\vec{v}(2,3)$ hallar el ángulo $\angle(\vec{u},\vec{v})$. Sol. α=47°43'34''

<u>Cuestión 27</u>.-

Hallar "k" sabiendo que $|\vec{a}| = 3$ y $\vec{a}(2,k)$. Sol. $k = \pm\sqrt{5}$

<u>Cuestión 28</u>.-

Hallar "a" sabiendo que el ángulo que forma $\vec{v}(3,a)$ con $\vec{w}(2,-1)$ es de 60°. Sol. a=-3/2

<u>Cuestión 29</u>.-

Calcular $(2\vec{u}-3\vec{v})(3\vec{u}+\vec{v})$, suponiendo $|\vec{u}|=1; |\vec{v}|=2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=2{,}5$ Sol. -47/2

<u>Cuestión 30</u>.-

Sabiendo que $\vec{a}\left(\frac{1}{3},-2\right)$ y $\vec{b}(7,x)$ son perpendiculares, hallar x. Sol. x=7/6

Cuestión 31.-

Sea $\vec{x}(3,-4)$, hallar los dos vectores unitarios en la dirección de $\vec{x}$, así como el ángulo que forma $\vec{x}$ con el primer vector de la base. Sol. $(3/5,-4/5),(-3/5,4/5)$, $\alpha = 53°7'48,3''$

Cuestión 32.-

Siendo A(-5,-7) y B(1,5), dividimos el segmento en :

a) Tres partes iguales. Sol. (-3, -3) y (-1, 1)

b) Cuatro partes iguales Sol. (-7/2, -4), (-2, -1) y (-1/2, 2)

Cuestión 33.-

Los puntos A(2,1), B(4,-1), C(0,4) y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar D.
Sol. D(-2,6)

Cuestión 34.-

Los puntos A(1,1) y B(3,3) son dos vértices consecutivos de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto M(5,2). Hallar los dos vértices restantes. Sol. C(9,3) y D(7,1)

Cuestión 35.-

Los cuatro vértices consecutivos de un paralelogramos son A(-1,3), B, C(7,4) y D. Siendo M(1,2) el punto medio del lado AB. Hallar B y D. Sol. B(3,1) y D(3,6)

Cuestión 36.-

Hallar el baricentro del triángulo ABC, siendo

a) A(-3,-2), B(1,0) y C(5,5) Sol. (1,1)

b) A(1,5), B(-3,1) y C(-7,-3) Sol. carece de sentido

Cuestión 37.-

1. Determinar si los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (35, -21) y $\overrightarrow{CD}$ = (-10, 6) tienen la misma dirección. Calcular el módulo de ambos vectores.

Solución

Para determinar si dos vectores tienen la misma dirección basta comprobar si sus componentes son proporcionales.

El cociente de las primeras componentes es $\frac{35}{-10}=\frac{7}{-2}$ y el de las segundas $\frac{-21}{6}=\frac{-7}{2}$, por tanto los vectores tienen la misma dirección.

El módulo de los vectores es:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35^2+(-21)^2} = \sqrt{1225+441} = \sqrt{1666}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-10)^2+6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = \sqrt{4\cdot 34} = 2\sqrt{34}$$

Cuestión 38.-

2. Dado el vector libre $\bar{a}$ = (5, 3) y el punto A = (4, -1), hallar las coordenadas del punto B para que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ represente al vector $\bar{a}$.

Solución

Llamando (x, y) a las coordenadas de B, las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son (x - 4, y + 1).

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ represente al vector libre $\bar{a}$ se ha de verificar (x - 4, y + 1) = (5, 3), de donde, x - 4 = 5 e y + 1 = 3, obteniéndose x = 9 e y = 2.

Así las coordenadas de B son (9, 2).

Cuestión 39.-

5. Dado el vector libre $\bar{a} = (5, 3)$, calcular el vector libre $\bar{b}$ que tiene la misma dirección que $\bar{a}$, distinto sentido y módulo igual a la unidad.

Solución

Como $\bar{b}$ tiene la misma dirección que $\bar{a}$ deben ser proporcionales, es decir, $\bar{b} = t.\bar{a} = (5t, 3t)$ para algún valor de t.

Por otra parte, $|\bar{b}| = \sqrt{(5t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{25t^2 + 9t^2} = \sqrt{36t^2} = 6|t|$. Para que este módulo sea 1 se ha de verificar $6|t| = 1$, de donde, $t = \pm\frac{1}{6}$.

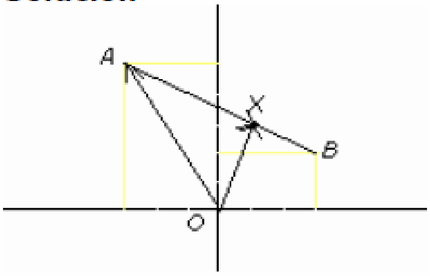
Como $\bar{a}$ y $\bar{b}$ han de tener distinto sentido, es necesario que $t = \frac{-1}{6}$.

Por tanto, $\bar{b} = \frac{-1}{6}(5, 3) = \left(\frac{-5}{6}, \frac{-1}{2}\right)$.

Cuestión 40.-

6. Dados los puntos $A = (-3, 5)$ y $B = (3, 2)$ calcular las coordenadas del punto del segmento $\overline{AB}$ cuya distancia a A es el doble de su distancia a B.

Solución



En la figura se observa que $\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX}$.

Teniendo en cuenta que la distancia de X a A es el doble que la de X a B se tiene $\overline{AX} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Por tanto, $\overline{OX} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AB}$ y como $\overline{AB} = (3-(-3), 2 - 5) = (6, -3)$, sustituyendo queda $\overline{OX} = (-3, 5) + \frac{2}{3}(6, -3) = (1, 3)$.

Por tanto, las coordenadas buscadas son (1, 3)