

TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Tasa de variación media. Cálculo y significado

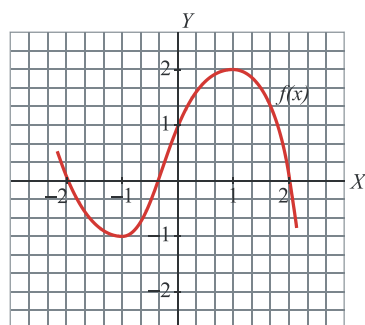
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$



Derivada de una función por la definición

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{4}$ d) $f(x) = \frac{3}{x}$.

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ en $x = -1$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$ c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en $x = 1$ d) $f(x) = \frac{x^2}{3}$ en $x = 1$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$

2) $y = x$

3) $y = 3x$

4) $y = x^5$

5) $y = 3 \cdot x^6$

6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$

7) $y = \frac{3x^2}{4}$

8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$

9) $y = \frac{1}{x^4}$

10) $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$

11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$

12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$

13) $y = \frac{1}{x^2} + x^{-3} + 2 \cdot x^{-1}$

14) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$

15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$

16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$

17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$

18) $y = (x^2 - 1) / (x^3 + 3x)$

19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

20) $y = \frac{1}{x}$

21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$

22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$

23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$

24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$

25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$

26) $y = \frac{x^3 - 3}{5}$

27) $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$

$$28) y = \frac{1}{1-3x^3}$$

$$29) y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2}$$

$$30) y = \frac{x^3}{x-3}$$

$$31) y = (3x^3 - 2x + 7)^7$$

$$32) y = 3 \cdot (x^2 - x + 1)^3$$

$$33) y = (2x^4 - 4x^2 - 3)^5$$

$$34) y = (2x^3 + x)^4$$

$$35) y = 5 \cdot (x^3 - 3x)^4$$

$$36) y = \frac{(x^4 - 5x)^2}{(x^3 - 3x)^5}$$

$$37) y = \frac{(x^3 - 2x)^3 \cdot (2x^4 - x^2)^2}{(x^3 - 2x)^3}$$

$$38) y = \frac{(2x^4 - x^2)^2}{(2x^4 - x^2)^2}$$

$$39) y = \sqrt[3]{x}$$

$$40) y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$41) y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$42) y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$$

$$43) y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$44) y = \sqrt[5]{x^3 - 7x}$$

$$45) y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$$

$$46) y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$$

$$47) y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$48) y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$$

$$49) y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$50) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$51) y = 5 \cdot (x^3 - 2x^2 + x)^4$$

$$52) y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$$

$$53) y = e^{\sqrt{x}}$$

$$54) y = \frac{1}{e^{2x}}$$

$$55) y = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$56) y = \frac{x}{e^x}$$

$$57) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$58) y = \frac{x^2 - x}{e^x}$$

$$59) y = \log_3 x$$

$$60) y = \log_2 x^3$$

$$61) y = \log x$$

$$62) y = \text{Ln}(x^2 - 1)$$

$$63) y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$

$$64) y = \text{Ln} \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$$

$$65) y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$$

$$66) y = \frac{\text{Ln} x}{x^5}$$

$$67) y = \text{Ln}[x^3 \cdot (x+2)]$$

$$68) y = \text{Ln} \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$69) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$70) y = \text{Ln} \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$71) y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$72) y = \text{tag } 2x$$

$$73) y = \text{sen } 2x$$

$$74) y = \text{sen } x^2$$

$$75) y = \text{sen}^2 x$$

$$76) y = \text{sen}^2 2x$$

$$77) y = \text{sen}^2 x^2$$

$$78) y = \text{sen}^5 2x^3$$

$$79) y = 5 \cdot \text{sen}^3 2x^4$$

$$80) y = e^{\cos x}$$

$$81) y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$82) y = \sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$$

$$83) y = \text{tag}(x+3)^2$$

$$84) y = \text{tag}^2(x+3)$$

$$85) y = \text{Ln} \left(\cos \frac{x^2}{2} \right)$$

$$86) y = \text{tag}(1-2x)$$

$$87) y = \text{tag} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$88) y = \frac{\cos \text{ec } x}{\sec x}$$

$$89) y = \text{sen} \sqrt{x}$$

$$90) y = \text{sen}(x + e^x)$$

$$91) y = \text{Ln} \left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \right]$$

$$92) y = \cos x \cdot (1 - \cos x)$$

$$93) y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$$

$$94) y = \text{Ln}(x^2 \cdot \text{sen } 2x)$$

$$95) y = \frac{x \cdot \text{sen}^2 x}{e^x - 1}$$

$$96) y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$97) y = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$98) y = \text{Ln}(\text{tag } 2x)$$

$$99) y = \text{Ln}(\text{sen } x)$$

$$100) y = \text{sen}^3(x+1)$$

$$101) y = \sec^2 x$$

$$102) y = \sqrt{x} \text{sen} \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$$

$$103) y = \text{sen}[\cos(\text{tag } x)]$$

$$104) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

$$105) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$106) y = \text{Ln}(\text{tag}^2 \sqrt{x})$$

$$107) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$108) y = \text{Ln} \frac{(x-1)^2}{2x-3}$$

$$109) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x)$$

$$110) y = e^{\cos 2x}$$

$$111) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x \cdot \cos^3 x)$$

$$112) y = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$$

$$113) y = \text{sen}(x+1)^3$$

EJERCICIO 7 - Halla la función derivada de:

a) $y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$

b) $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$

c) $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$

d) $y = (3x^3 - 5x + 1) \cdot (x + x^2)$

e) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

f) $y = \frac{x^3}{3x + 2}$

g) $y = \left(\frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$

h) $y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$

i) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

j) $y = \sqrt{x^9} \cdot 4x^5$

k) $y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$

l) $y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x$ m) $y = (3x - 1)^2 \cdot (1 - 4x)$ n) $y = \frac{x^5 \sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5}$ ñ) $y = (3x^3 - 5x + 2)^4$

o) $y = (3x^2 - x)^4$ p) $y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}}$ q) $y = \sqrt{1-x^2}$ r) $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3$

s) $y = (2x - 4)^4 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$ t) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$ u) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}$ v) $y = \text{Ln}(x^2 + 2x) + e^{-x}$

w) $y = \log_3 x + 3^x$ x) $y = 2 \cdot \text{sen}(3x+4)$ y) $y = 3\cos^3(3x)$ z) $y = \text{tag}(x^2+1)$

1) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ 2) $y = x \cdot e^x$ 3) $y = \frac{\text{Lnx}}{\text{senx}}$ 4) $y = 4 \cdot (2x^3 - 1)^5$

5) $y = e^{\sqrt{x+3}}$ 6) $y = \sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)}$ 7) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 8) $y = \text{tag} \sqrt{3x+2}$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x - 4x^2$ que sea paralela a la recta $y = -7x + 3$

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente -4 que sea tangente a la curva $y = x^4 + 2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 - Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

- Su derivada se anula en $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en $(0, 0)$
- Sus asíntotas son $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

EJERCICIO 24 :

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

- a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 8x - x^2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x) = 14x - 7x^2$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

- | | | | |
|--|---------------------------------------|--|---|
| a) $f(x) = (x-1)^2(x+8)$ | b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ | c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ | d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$ |
| e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ | f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ | g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ | h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$ |
| i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ | j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ | k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ | l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ |
| m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ | n) $f(x) = x(x-3)^2$ | ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$ | o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}$ |
| p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ | q) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$ | r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$ | s) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$ |