EXAMEN DE FUNCIONES. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Se recomienda:

a) Antes de hacer algo, leer todo el examen.

b) Resolver antes las preguntas que se te den mejor.

c) Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.

d) Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.

1 Sea la función dependiente de los parámetros a y b:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & if \quad x \le 0 \\ x - 1 & if \quad 0 < x \le 2 \\ bx - 5 & if \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

1.1 Halla los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto R de los números reales. (2x(2x0.35+0.15))(# 1.7 p)

1.2 Representa el resultado final. (3x.5 p)(#1.5 p)(# 3.2 p)

2 Escribe la siguiente función como composición de funciones elementales: $g(x) = \dfrac{1}{1 + \cos(e^x)}$ (0.6 p)

3 Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendra dado, durante los próximos años, por la función $f(t) = \dfrac{15000t + 10000}{2t + 2}$, **siendo t el número de años transcurridos. Se pide**:

3.1 Tamaño actual de la población. (0.25 p)

3.2 Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica tu respuesta. (0.6 p)(0.25 p)(# 1.1 p)

4 Calcula los límites siguientes:

4.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right) =$ (1 p)

4.2 $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right) =$ (1 p)

4.3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 6}{x^2 + 4x + 4} =$ (1 p)

4.4 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}} =$ (0.8 p)(# 3.8 p)

5 Calcula la función inversa de $f(x) = x^5 - 32$ (**0.7 p**)

Ojo es un examen sobre 9.4

SOLUCIÓN

1 $f(x) = \begin{cases} -2x - a & if \quad x \le 0 \\ x - 1 & if \quad 0 < x \le 2 \\ bx - 5 & if \quad x > 2 \end{cases}$

1.1

Se trata de una funcion definida a trozos, de forma que es una serie de trozos de rectas, por lo que es siempre continua en los puntos donde no se cambia de una recta a otra. Ahora, nos hemos de asegurar que las rectas van unidas una tras otra.

Hemos de estudiar la continuidad en los siguientes puntos:

- $x = 0$
  - Calculamos $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [-2x - a] = -2 \cdot 0 - a = -a$ 0.35
  - Calculamos $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [x - 1] = 0 - 1 = -1$ 0.35

Necesitamos que estos límites laterales coincidan, por lo que será $-a = -1 \Leftrightarrow a = 1$. 0.15

Ahora se cumple que

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ f es continua en $x = 0$

- $x = 2$
  - Calculamos $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} [x - 1] = 2 - 1 = 1$ 0.35
  - Calculamos $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} [bx - 5] = b \cdot 2 - 5 = 2b - 5$ 0.35

Necesitamos que estos límites laterales coincidan, por lo que será $1 = 2b - 5 \Leftrightarrow 6 = 2b \Leftrightarrow b = \frac{6}{2} =$

$= 3$. 0.15

Ahora se cumple que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ f es continua en $x = 2$

1.2

Tenemos que

$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & if \quad x \le 0 \\ x - 1 & if \quad 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & if \quad x > 2 \end{cases}$

Como se trata todo de rectas, nos bastará con determinar dos puntos de cada una para que estas estén unívocamente determinadas.

- $-2x - 1 \rightarrow$

x	0	-2
y	-1	3

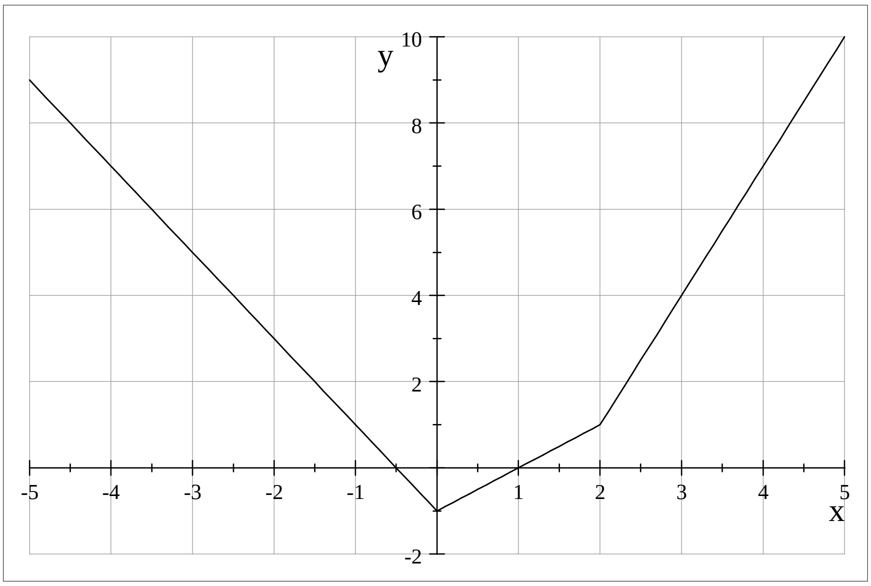
- $x - 1 \rightarrow$

x	0	2
y	-1	1

- $3x - 5 \rightarrow$

x	4	2
y	7	1

$\begin{cases} -2x - 1 & if \quad x \le 0 \\ x - 1 & if \quad 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & if \quad x > 2 \end{cases}$



3x.5 p

2 $g(x) = \dfrac{1}{1+\cos(e^x)}$

Consideramos la siguientes funciones elementales:

- $f(x) = e^x$
- $h(x) = \cos x$
- $v(x) = \dfrac{1}{1+x}$

En estas condiciones el paso a paso sería:

$x \to e^x \to \cos(e^x) \to \dfrac{1}{1+\cos(e^x)}$

Es decir: $(v \circ h \circ f)(x) = v[h(f(x))] = v[h(e^x)] = v[\cos(e^x)] = \dfrac{1}{1+\cos(e^x)}$ 0.6 p

3 $f(t) = \dfrac{15000t+10000}{2t+2}$

3.1

$f(0) = \dfrac{15000 \cdot 0 + 10000}{2 \cdot 0 + 2} = \dfrac{10000}{2} = 5000$ individuos tiene la población actualmente. 0.25 p

3.2 Si el tiempo se prolonga indefinidamente, se entiende que va a infinito, por lo que hemos de calcular el límite siguiente:

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15000t+10000}{2t+2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15000t}{2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15000}{2} = 7500$ individuos sería el tamaño estable de la población pues es el resultado de dejar pasar los años 0.6 p + 0.25 p

4

4.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2} - x\right) = \infty - \infty$ indeterminación!!!!!!!

Racionalizamos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$ 1 p

4.2 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3-2}}{2-2} = \dfrac{1-\sqrt{1}}{0} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación!!!!!!!

Racionalizamos:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}\right) = \lim_{x\to2} \frac{\left(1-\sqrt{3-x}\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{1^2-\left(\sqrt{3-x}\right)^2}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{1-(3-x)}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{1-3+x}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to2} \frac{1}{1+\sqrt{3-x}} = \frac{1}{1+\sqrt{3-2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} =$$

$\frac{1}{2}$ 1 p

4.3 $\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \frac{3(-2)+6}{(-2)^2+4(-2)+4} = \frac{-6+6}{4-8+4} = \frac{0}{0}$ indeterminación!!!!!!!

$\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \to -2} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{\pm\infty}$

Hemos de estudiar los límites laterales:

- $\lim_{x \to -2^-} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$
- $\lim_{x \to -2^-} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^+} = \infty$

Como los límites laterales son distintos, entonces no existe $\lim_{x \to -2} \frac{3}{x+2}$ 1 p

4.4 $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3+2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\infty} = 0$ 0.8 p

Recuerda que para cociente de potencias de la misma base se restan los exponentes.

5 $f(x) = x^5 - 32$

Hacemos $y = x^5 - 32$ para despejar x en función de y:

$y + 32 = x^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{y+32}$

Definimos $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+32}$ 0.7 p

Comprobación:

- $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[5]{x+32}\right) = \left(\sqrt[5]{x+32}\right)^5 - 32 = x + 32 - 32 = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^5 - 32) = \sqrt[5]{x^5 - 32 + 32} = \sqrt[5]{x^5} = x$