EXAMEN DE DERIVADAS

Se recomienda:

a) Antes de hacer algo, leer todo el examen.

b) Resolver antes las preguntas que se te den mejor.

c) Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.

d) Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.

1 Se considera la curva de ecuación $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. **Halla la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa** $x = 1$ (**f' →0.5 p**; **$f'()$ →0.25 p**; **ecuación→0.35 p**)(# **1.1 p**)

2 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & if \quad x < 1 \\ \dfrac{3}{bx} & if \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calculénse los valores a **y** b **para que f sea continua y derivable en todos los puntos**.

(**continua→0.6 p**;**derivable→0.7 p**; **ecuación→0.5 p**))(# **1.8 p**)

3 Obtén con la calculadora el valor de $\ln 3.02$ **y obténlo también mediante la aproximación lineal de** $f(x) = \ln x$ **en** $x = 3$ (**cal→0.15 p**; **f' →0.45 p**;**$f'()$ →0.25 p**; **aprox→0.6 p**))(# **1.45 p**)

4 Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones:

4.1 $f(x) = \dfrac{3x}{(1+2x)^3}$ (0.8 p)

4.2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ (0.6 p)

4.3 $f(x) = x^2 \cdot e^x$ (0.7 p)

4.4 $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{3}$ (0.5 p)

4.5 $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2-1}{4x+3}\right)$ (1.3 p)

4.6 $f(x) = \arctan(2^x \cdot x^2)$ (1.35 p)(# 5.25 p)

SOLUCIÓN

1 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

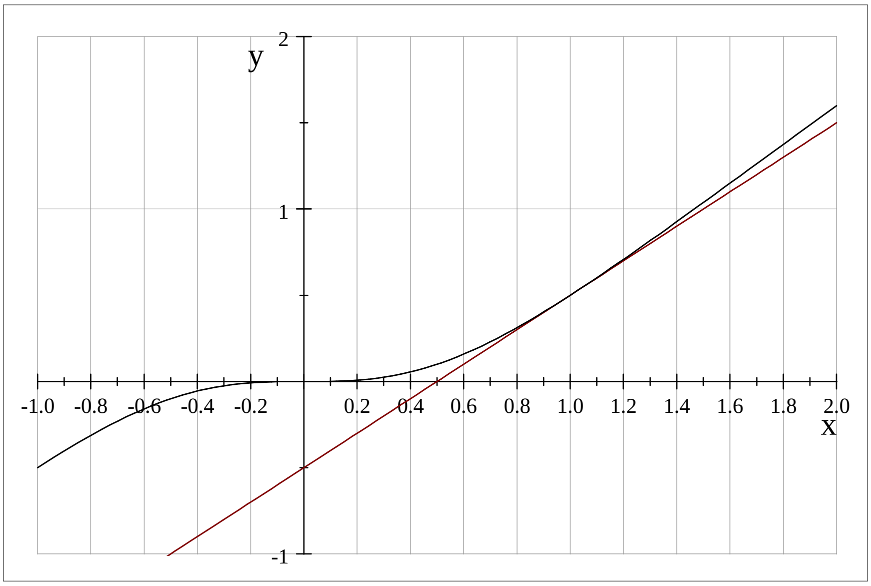
La ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 1$ será $y = f(1) + f'(1)(x-1)$

Por lo tanto, hemos de calcular los siguientes elementos:

- $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+3)x^2}{(x^2+1)^2}$ 0.5 p
- $f'(1) = \frac{(1^2+3)\cdot 1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{(1+4)\cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$ 0.25 p
- $f(1) = \frac{1^3}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Finalmente, tenemos $y = \frac{1}{2} + 1(x-1)$ 0.35 p

Gráficamente la situación sería:



2 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & if \quad x < 1 \\ \frac{3}{bx} & if \quad x \geq 1 \end{cases}$

Para que pueda ser derivable en todos los puntos, primero ha de ser continua, dado que la derivabilidad implica la continuidad.

Como se trata de una función definida a trozos, sólo habrá problemas en el punto dónde la función cambia de una definición a otra. No hay problemas de definición con el trozo definido mediante una fracción algebraica, dado que se anula en $x = 0$, y ese valor no lo estamos considerando para ese trozo; cae en el otro.

Estudiamos $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$, pero teniendo en cuenta la definición de nuestra función será

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = \frac{3}{b\cdot 1} = \frac{3}{b}$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2 - x + a) = -1^2 - 1 + a = a - 2$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\frac{3}{bx}) = \frac{3}{b\cdot 1} = \frac{3}{b}$

Entonces hemos de forzar $\frac{3}{b} = a - 2$ 0.6 p

Pasamos a estudiar la derivabilidad:

Tenemos que $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & if \quad x < 1 \\ -\frac{3}{bx^2} & if \quad x \geq 1 \end{cases}$

Como $\frac{3}{bx} = \frac{3}{b}x^{-1}$ su derivada es $-\frac{3}{b}x^{-2} = -\frac{3}{bx^2}$

Se trata de nuevo de una función definida a trozos que hemos de ver que es continua en todo su dominio. Razonando de manera análoga a la anterior, será necesario estudiar $f'(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$

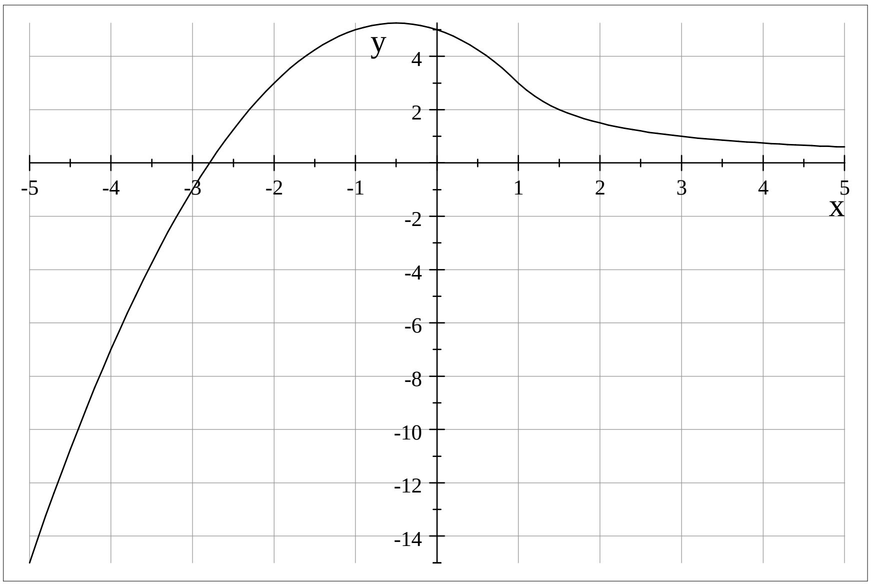
- $f'(1) = -\frac{3}{b \cdot 1^2} = -\frac{3}{b}$
- $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x-1) = -2 \cdot 1 - 1 = -3$
- $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}(-\frac{3}{bx^2}) = -\frac{3}{b \cdot 1^2} = -\frac{3}{b}$

Entonces hemos forzar $-3 = -\frac{3}{b} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{-3} = 1$ 0.7 p

Aplicando este resultado en la continuidad tendremos $\frac{3}{1} = a - 2 \Leftrightarrow a = 3 + 2 = 5$ 0.5 p

La expresión final de la función será: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 5 & if \quad x < 1 \\ \frac{3}{x} & if \quad x \geq 1 \end{cases}$

Cuya representación gráfica es:



Observa que para $x = 1$ no hay un pico, de ahí que admita ser derivable también en ese punto.

Y la de su derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & if \quad x < 1 \\ -\frac{3}{x^2} & if \quad x \geq 1 \end{cases}$

3 $\ln 3.02 = 1.1053$ **0.15 p**

Consideramos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x$ en $x = 3 \rightarrow y = f(3) + f'(3)(x-3)$

Tenemos que:

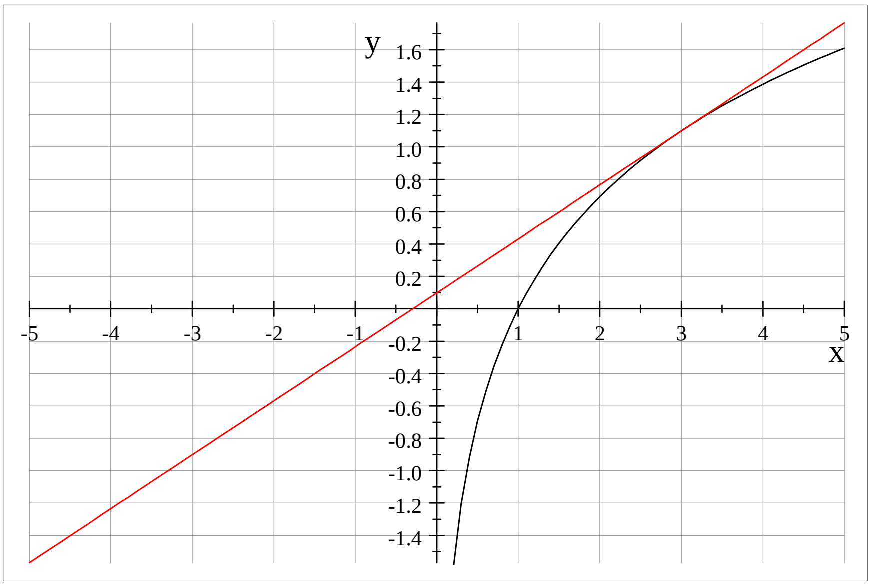
- $f(3) = \ln 3$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$ 0.45 p
  - $f'(3) = \frac{1}{3}$ 0.25 p

Por lo que la recta tangente queda $y = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-3)$

Así $f(3.02) \approx \ln 3 + \frac{1}{3}(3.02 - 3) = 1.1053$ 0.6 p

La aproximación es bastante buena.

Gráficamente:



Observa como las gráficas de f y de la tangente se superponen en $x = 3$

4

4.1 $f(x) = \dfrac{3x}{(1+2x)^3}$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un cociente
- derivada de un polinomio
- derivada de una potencia

$$f'(x) = \frac{3\cdot(1+2x)^3 - 3x\cdot 3(1+2x)^2\cdot 2}{\left((1+2x)^3\right)^2} = \frac{[3\cdot(1+2x) - 18x](1+2x)^2}{(1+2x)^{3\cdot 2}} = \frac{[3+6x-18x](1+2x)^2}{(1+2x)^6} =$$

$$= \frac{3-12x}{(1+2x)^4} =$$ 0.8 p

4.2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{3}}$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un polinomio
- derivada de una potencia

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x = \frac{2x}{3}(x^2+1)^{\frac{1-3}{3}} = \frac{2x}{3}(x^2+1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$ 0.6 p

4.3 $f(x) = x^2\cdot e^x$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de un polinomio
- derivada de una exponencial

$f(x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = e^x(x^2+2x)$ 0.7 p

4.4 $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{3}$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de una función trigonométrica

$f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = -\dfrac{2}{3}\sin 2x$ 0.5 p

4.5 $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2-1}{4x+3}\right)$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un cociente
- derivada de un polinomio
- derivada de una función logarítmica

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{3x^2-1}{4x+3}} \cdot \frac{(6x-0)(4x+3)-(3x^2-1)\cdot 4}{(4x+3)^2} = \frac{4x+3}{3x^2-1} \cdot \frac{24x^2+18x-12x^2+4}{(4x+3)^2} = \frac{18x+12x^2+4}{(3x^2-1)(4x+3)}$$

1.3 p

4.6 $f(x) = \arctan(2^x \cdot x^2)$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de un polinomio
- derivada de una función exponencial
- derivada de una función trigonométrica

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2^x \cdot x^2)^2} \cdot [2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x] = \frac{2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)}{1+2^{2\cdot x} \cdot x^{2\cdot 2}} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)}{1+2^{2x} \cdot x^4}$$ 1.35 p