

SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 8: FUNCIONES ELEMENTALES.

Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Sea f la función definida mediante la ecuación: $f(x) = \sqrt{x-1}$ (1p)

- a) Calcula $f(1)$, $f(5)$ y $f(-1)$
- c) Halla la anti-imagen de $y=5$
- d) ¿Cuál es el dominio de f ?

Solución:

a)

$$f(1) = 0$$

$$f(5) = 2$$

$f(-1)$ No, existe porque habría que calcular la raíz cuadrada de un número negativo, -2.

$$b) \quad 5 = \sqrt{x-1} \rightarrow 5^2 = (\sqrt{x-1})^2 \rightarrow 25 = x-1 \rightarrow x = 26$$

$$c) \text{ Dom}(f) = [1, +\infty)$$

2. Halla el dominio de las funciones siguientes: (1p)

$$a) \quad y = \frac{x+1}{\sqrt{-x}}$$

$$b) \quad y = \frac{2x}{x^2-4}$$

Solución:

a)

$$-x > 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0)$$

$$b) \quad x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -2 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

3. Observando las gráficas, indica: (1.5p)

- Dominio

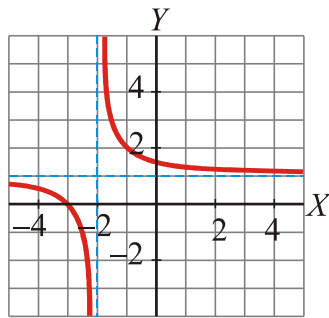
- Recorrido

- Puntos de cortes con los ejes

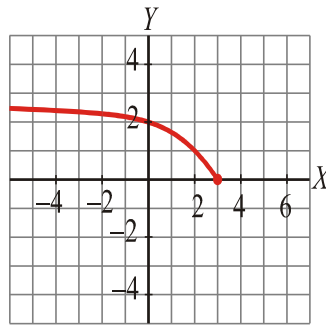
- Acotación,

de estas funciones.

a)



b)



Solución:

a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$; Recorrido = $\mathbb{R} - \{1\}$

Puntos de corte con los ejes: $(-3,0)$ y $(0,3/2)$

Aotación: No está acotada.

b) Dominio = $(-\infty, 3]$; Recorrido = $[0, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $(3,0)$ y $(0,2)$

Aotación: Acotada superiormente por $y=3$ – Acotada inferiormente por $y=0$

4. Representa gráficamente la siguiente función: (2p)

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

e indica:

- Dominio
- Recorrido
- Máximos y mínimos
- Puntos de corte con los ejes
- Simetría (Par, impar o ninguna)
- Crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Representación gráfica.

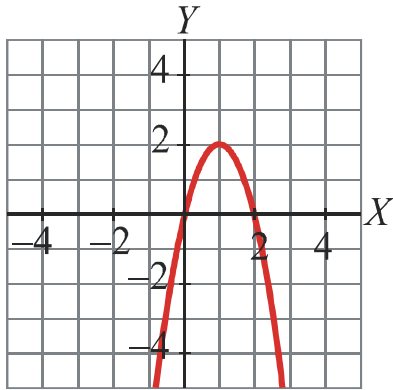
– El vértice de la parábola es:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow \text{Punto } (1, 2)$$

– Elaboramos tabla de valores, tomando el vértice como centro de la misma. Cogemos dos puntos por debajo de él y dos puntos por arriba.

x	-1	0	1	2	3
y	-6	0	2	0	-6

– Ya tenemos información suficiente para pintar la gráfica:



Estudio de las características de la función

- a) $\text{Dom}(f)=[1,+\infty)$
- b) $\text{Rec}(f)=(-\infty,2]$
- c) Máximo: Punto (1,2) - Mínimo: No tiene.
- d) Puntos de corte con los ejes:

Con el eje OX.

$$y = 0 \rightarrow -2x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(-2x + 4) = 0 \rightarrow (x=0) \text{ o } (-2x+4=0) \rightarrow (x=0) \text{ o } (x=2) \rightarrow \text{Punto } (0,0) \text{ y Punto } (2,0)$$

Con el eje OY

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

e) Simetría: No presenta simetría par (porque $f(x)$ no es igual a $f(-x)$) ni simetría impar (porque $f(x)$ no es igual a $-f(-x)$).

f) Crecimiento y decrecimiento

Crece en el intervalo $(-\infty, 1)$

Decrece en el intervalo $(1, +\infty)$

5. (1p)

Dadas las funciones $f(x) = \frac{-3x+2}{4}$ y $g(x) = x^2 + 1$, halla :

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ g)(x)$

Solución:

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2 + 1] = \frac{-3(x^2 + 1) + 2}{4} = \frac{-3x^2 - 3 + 2}{4} = \frac{-3x^2 - 1}{4}$$

$$b) (g \circ g)(x) = g[g(x)] = g[x^2 + 1] = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

6. Obtén la función inversa de: (1p)

$f(x) = \frac{2-3x}{4}$ y comprueba que al componer a derecha e izquierda con f , da la función identidad.

Solución:

Cambiamos x por y y despejamos la y :

$$x = \frac{2-3y}{4} \Rightarrow 4x = 2-3y \Rightarrow 3y = 2-4x \Rightarrow y = \frac{2-4x}{3}$$

Por tanto:

$$f^{-1}(x) = \frac{2-4x}{3}$$

Se prueba fácilmente que f compuesta con f^{-1} es igual a x y que f^{-1} compuesta con f también es igual a x .

7. Dadas las funciones: (2.5p)

$$f(x) = \frac{x}{x-4} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Obtén:

a) $(f+g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $(f/g)(x)$

d) El dominio de cada una de las funciones obtenidas en a), b) y c)

d) Calcula $(f \cdot g)(4)$ y $(f/g)(1)$

Solución:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x-4} + x^2 = \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x-4}$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x}{x-4} \cdot x^2 = \frac{x^3}{x-4}$

c) $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x-4} : x^2 = \frac{x}{x^2 \cdot (x-4)}$

d)

El dominio de la función obtenida en a) \rightarrow Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

El dominio de la función obtenida en b) \rightarrow Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

El dominio de la función obtenida en c) \rightarrow Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{0,4\}$

e) Calcula

$(f \cdot g)(4) \rightarrow$ No se puede calcular porque $x=4$ no pertenece al dominio de la función $f \cdot g$

$(f/g)(1) = -1/3$