EXAMEN: TEMA 5.- LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS (Resolución)

1.- Calcula la mediatriz del segmento que determinan los puntos $P(-2,3)$ y $Q(2,1)$.
Cogemos un punto genérico $X(x,y)$ y forzamos a que cumpla la propiedad (su distancia a cada extremo del segmento debe ser la misma), así:

$$\left.\begin{array}{r} d(X,P)=\sqrt{(x-(-2))^2+(y-3))^2} \\ d(X,Q)=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \Rightarrow$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros para eliminar las raíces, desarrollamos los cuadrados y pasamos todo al mismo miembro para simplificar al máximo la expresión.

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-2y+1 \Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9-x^2+4x-4-y^2+2y-1=0$$

Y por tanto la expresión la mediatriz es: $8x-4y+8=0$

2.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas: $r: x-2y+7=0$ y $s: x+2y-5=0$.
Cogemos un punto genérico $X(x,y)$ y forzamos a que cumpla la propiedad (su distancia a cada una de las rectas debe ser la misma), así:

$$\left.\begin{array}{r} d(X,r)=\dfrac{|x-2y+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \\ d(X,s)=\dfrac{|x+2y-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|x-2y+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-2y+7}{\sqrt{5}}=\dfrac{x+2y-5}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{x-2y+7}{\sqrt{5}}=\dfrac{-x-2y+5}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Eliminamos denominadores (podemos quitarlos directamente porque son iguales) y simplificamos al máximo ambas expresiones:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+7=x+2y-5 \\ x-2y+7=-x-2y+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b_1: 4y-12=0 \\ b_2: 2x+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} b_1: y=3 \\ b_2: x=-1 \end{array}$$

3.- Encuentra la ecuación la circunferencia:

a) que pasa por los puntos: $A(0,0)$, $B(-1,3)$, $C(3,1)$.

La ecuación general de una circunferencia es: $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$

Si A, B y C pertenecen a la circunferencia deben cumplir la ecuación, con lo que obtenemos un sistema de ecuaciones que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{c} 0^2+0^2+M\cdot 0+N\cdot 0+P=0 \\ (-1)^2+3^2+M\cdot(-1)+N\cdot 3+P=0 \\ 3^2+1^2+M\cdot 3+N\cdot 1+P=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ 10-M+3N+P=0 \\ 10+3M+N+P=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ -M+3N=-10 \\ 3M+N=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ -3M+9N=-30 \\ 3M+N=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ 10N=-40 \Rightarrow N=-4 \\ 3M+N=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ N=-4 \\ 3M-4=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} P=0 \\ N=-4 \\ 3M=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} P=0 \\ N=-4 \\ M=-2 \end{array}$$

Con lo que la ecuación general de una circunferencia es: $x^2+y^2-2x-4y=0$

b) de centro $P(3,-2)$ y radio 4.

La ecuación de la circunferencia conocido su centro y su radio es:

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=4^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=16 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4=16 \Rightarrow$$

La ecuación de la circunferencia queda: $x^2+y^2-6x+4y-3=0$

4.- Determina la ecuación reducida de:

a) la elipse de foco $F(5,0)$ y constante vale 12.

La ecuación reducida de un elipse con los focos en el eje OX es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y con los datos que tenemos sabemos que: $\begin{array}{c} 2a=12 \Rightarrow a=6 \\ c=5 \end{array}$ y como:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 36=b^2+25 \Rightarrow b^2=36-25 \Rightarrow b=\sqrt{11}$$

Tenemos que la ecuación queda: $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{11})^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

b) la parábola de foco $F(0,-3)$ y directriz $y=3$.

La ecuación reducida de una parábola con el foco en la parte negativa del eje OY es: $x^2=-4cy$

De los datos que tenemos sabemos que: $=3 \Rightarrow p=4$ la ecuación queda: $x^2=-4\cdot 3y$ o sea:

$$x^2=-12y$$

5.- Identifica las siguientes cónicas y calcula todos sus elementos característicos.

a) $x^2+y^2-2x+8y+8=0$

La ecuación parece que puede ser de una circunferencia, calculemos su centro y su radio para ver si es así:

Si el centro es el punto $P(a,b)$ tendremos que: $\begin{array}{l} -2a=-2 \Rightarrow a=\frac{-2}{-2}=1 \\ -2b=8 \Rightarrow b=\frac{8}{-2}=-4 \end{array}$ y entonces el radio:

$$R=\sqrt{1^2+(-4)^2-8}=\sqrt{1+16-8}=\sqrt{9}=3$$

Por tanto se trata de una circunferencia de centro: $P(1,-4)$ y radio 3.

b) $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$

Se trata de un hipérbola con los focos en el eje OY y vamos a calcular sus elementos. Sabemos que:

$\begin{array}{l} a^2=64 \Rightarrow a=\sqrt{64}=8 \\ b^2=36 \Rightarrow b=\sqrt{36}=6 \end{array}$ y en la hipérbola: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=8^2+6^2=100 \Rightarrow c=\sqrt{100}=10$

Con esto tenemos que los focos son $F(0,-10)$ y $F'(0,10)$ sus puntos de corte: $A(0,-8)$ y $A'(0,8)$, sus asíntotas: $\begin{array}{l} x=-\frac{6}{8}y \\ x=\frac{6}{8}y \end{array}$ o sea: $\begin{array}{l} x=-\frac{3}{4}y \\ x=\frac{3}{4}y \end{array}$ y su excentricidad: $e=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

6.- Estudia la posición relativa de la circunferencia $C: x^2+y^2+4y-1=0$ y la recta $r: x-2y-4=0$.

Para conocer su posición relativa tenemos que resolver el sistema que forman sus ecuaciones:

$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+4y-1=0 \\ x-2y-4=0 \end{array} \right.$ resolvemos por sustitución.

Despejamos la "x" y la sustituimos:

$$x=4+2y \Rightarrow (4+2y)^2+y^2+4y-1=0 \Rightarrow 16+16y+4y^2+y^2+4y-1=0 \Rightarrow 5y^2+20y+15=0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$y=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot5\cdot15}}{2\cdot5}=\frac{-20\pm\sqrt{400-300}}{10}=\frac{-20\pm10}{10} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{-10}{10}=-1 \Rightarrow x=4+2\cdot(-1)=4-2=2 \\ y=\frac{-30}{10}=-3 \Rightarrow x=4+2\cdot(-3)=4-6=-2 \end{array}$$

Por tanto, podemos decir que la recta es secante a la circunferencia pues la corta en los puntos: $P(2,-1)$ y $Q(-2,-3)$