Titulo: ***INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO***
Año escolar: 5to. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Propiedades :

*Para cualquier número real “**X**” y cualquier número positivo “**a**” :*

1) $|X| < a \Leftrightarrow -a < X < a$ *(también se cumple para ≤). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se “elimina” el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual **(X < a)**, y en la segunda se “elimina” el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha **(X > -a)**, la solución viene dada por la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales.*

2) $|X| > a \Leftrightarrow X > a \cup X < -a$ *(también se cumple para ≥). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se “elimina” el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual **(X > a)**, y en la segunda se “elimina” el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha **(X < - a)**, la solución viene dada por la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales.*

3) $|X| < |a| \Leftrightarrow X^2 < a^2$ *(también se cumple para >, ≥ y ≤). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.*

4) $|X| < -a$ *Representa al conjunto vacío (también se cumple para ≤)*

EJERCICIO 1 : *Resolver* $|4X - 1| \leq 3$

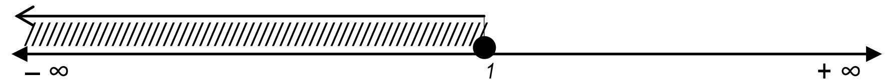
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (4X – 1 ≤ 3) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (4X – 1 ≥ – 3)

*La solución total será la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :*

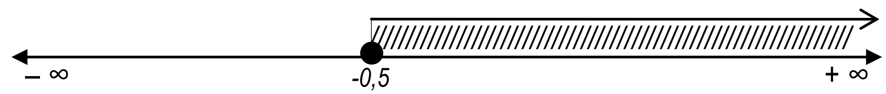
Resolviendo la primera parte: ***4X – 1 ≤ 3***

$4X \leq 3 + 1 \quad ; \quad 4X \leq 4 \quad ; \quad X \leq \frac{4}{4} \quad ; \quad \mathbf{X \leq 1}$



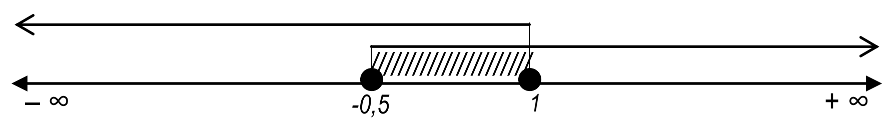
Resolviendo la segunda parte: ***4X – 1 ≥ – 3***

$4X \geq -3 + 1 \quad ; \quad 4X \geq -2 \quad ; \quad X \geq \frac{-2}{4} \quad ; \quad \mathbf{X \geq -0{,}5}$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

X = [– 0.5 , 1]

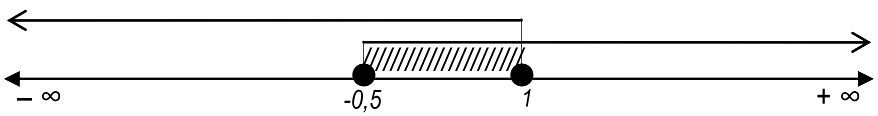
<u>En forma de conjunto:</u>

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ -0.5 \le X \le 1 \}$$

<u>¿Como comprobar estos resultados?</u>

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :



*Escojo el valor **<u>X = –1</u>** que está al lado izquierdo de "-0,5" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X - 1| \le 3 \quad ; \quad |4(-1) - 1| \le 3 \quad ; \quad |-4 - 1| \le 3$$

$|-5| \le 3$: $\mathbf{5 \le 3}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

*Escojo el valor **<u>X = 0</u>** que está entre "-0,5" y "1" (debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X - 1| \le 3 \quad ; \quad |4(0) - 1| \le 3 \quad ; \quad |0 - 1| \le 3$$

$|-1| \le 3$: $\mathbf{1 \le 3}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

*Escojo el valor **<u>X = 2</u>** que está al lado derecho de "1" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X - 1| \le 3 \quad ; \quad |4(2) - 1| \le 3 \quad ; \quad |8 - 1| \le 3$$

$|7| \le 3$: $\mathbf{7 \le 3}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

<u>EJERCICIO 2 :</u> *Resolver* $|2X + 3| > 5$

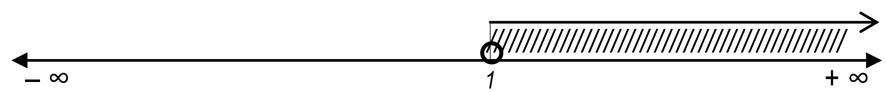
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (2X + 3 > 5) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (2X + 3 < –5).

La solución total será la **UNIÓN** *de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) :.*

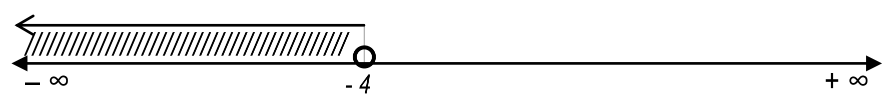
*<u>Resolviendo la primera parte: **2X + 3 > 5**</u>*

$$2X > 5 - 3 \quad ; \quad 2X > 2 \quad ; \quad X > \frac{2}{2} \quad ; \quad \mathbf{X > 1}$$



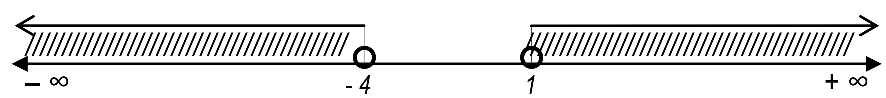
*<u>Resolviendo la segunda parte: **2X + 3 < –5**</u>*

$$2X < -5 - 3 \quad ; \quad 2X < -8 \quad ; \quad X < \frac{-8}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < -4}$$



<u>Solución Total</u>

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$X = (-\infty , -4) \cup (1 , +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; X < -4 \;\wedge\; X > 1 \}$$

¿Como comprobar estos resultados?

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :

*Escojo el valor **X = – 5** que está a la izquierda de "-4" (SI debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X + 3| > 5 \quad ; \quad |2(-5) + 3| > 5 \quad ; \quad |-10 + 3| > 5$

$|-7| > 5 \quad : \quad \mathbf{7 > 5}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

*Escojo el valor **X = 0** que está entre "- 4" y "1" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X + 3| > 5 \quad ; \quad |2(0) + 3| > 5 \quad ; \quad |0 + 3| > 5$

$|3| > 5 \quad : \quad \mathbf{3 > 5}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

*Escojo el valor **X = 2** que está a la derecha "1" (SI debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X + 3| > 5 \quad ; \quad |2(2) + 3| > 5 \quad ; \quad |4 + 3| > 5$

$|7| > 5 \quad : \quad \mathbf{7 > 5}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

EJERCICIO 3 : *Resolver* $|2X + 3| < 5$

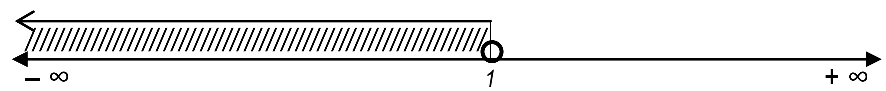
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (2X + 3 < 5) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (2X + 3 > –5).

La solución total será la **INTERSECCIÓN** *de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :*

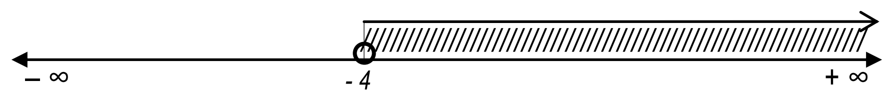
Resolviendo la primera parte: ***2X + 3 < 5***

$2X < 5 - 3 \quad ; \quad 2X < 2 \quad ; \quad X < \frac{2}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < 1}$



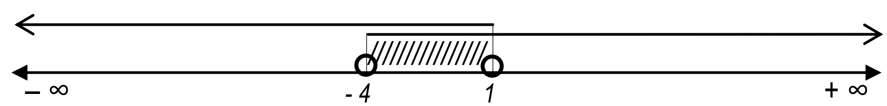
Resolviendo la segunda parte: ***2X + 3 > –5***

$2X > -5 - 3 \quad ; \quad 2X > -8 \quad ; \quad X > \frac{-8}{2} \quad ; \quad \mathbf{X > -4}$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-4 \,,\, 1)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; -4 < X < 1 \}$$

EJERCICIO 4 : *Resolver* $|X - 3| > -1$

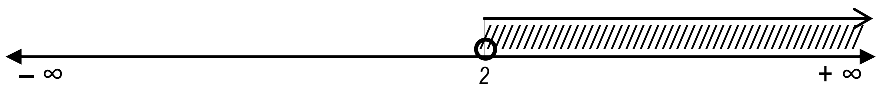
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($X - 3 > -1$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($X - 3 < 1$).

La solución total será la **UNIÓN** *de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) :.*

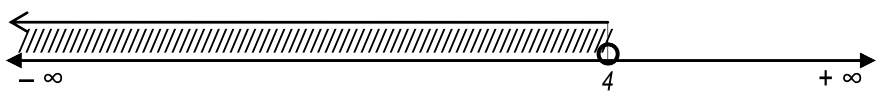
<u>Resolviendo la primera parte:</u> $\mathbf{X - 3 > -1}$

$$X > -1 + 3 \quad ; \quad \mathbf{X > 2}$$



<u>Resolviendo la segunda parte:</u> $\mathbf{X - 3 < 1}$

$$X < 1 + 3 \quad ; \quad \mathbf{X < 4}$$



<u>Solución Total</u>

El error más común que se comete en este tipo de ejercicios es creer que la solución estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales, es decir, el intervalo (2 , 4).

Para evitar cometer este error se recomienda repasar las propiedades que se encuentran al principio de esta guía, sobre todo lo apuntado en la PROPIEDAD 2 (la solución viene dada por la ***UNIÓN*** *de las dos soluciones parciales).*

En base a las aclaraciones anteriores se desprende que la solución serán TODOS LOS NÚMEROS REALES.

*Note que si superponen las dos soluciones parciales quedarán incluidos todos los valores de la recta real. Inclusive los valores que están excluidos en cada una de las soluciones parciales (**o**), están incluidas en la otra.*

<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty\, ,\, +\infty\,)}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{\, \mathbb{R}\, \}}$$

Compruebe los resultados atendiendo a lo explicado al final de los ejercicios 1 y 2.

EJERCICIO 5 : *Resolver* $|X - 3| < -1$

Al recordar la ***PROPIEDAD 4****, inmediatamente se deduce que la solución está representada por un conjunto vacío.*

El valor absoluto de cualquier número NUNCA podrá ser menor que un número negativo*. Pruebe con cualquier valor que se le ocurra y comprobará que no se cumple la desigualdad.*

EJERCICIO 6 : *Resolver* $|2X + 5| \geq |X + 4|$

Para resolver esta inecuación con valor absoluto debo tener presente la PROPIEDAD 3..

$|X| < |a| \quad \Leftrightarrow \quad X^2 < a^2$ *(también vale para >, ≥ y ≤). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.*

Luego la inecuación quedará indicada como $(2X + 5)^2 \geq (X + 4)^2$

Resolviendo los productos notables de cada miembro de la inecuación:

$(2X + 5)^2 = (2X)^2 + 2.(2X).(5) + (5)^2 = 4X^2 + 20X + 25$

$(X + 4)^2 = (X)^2 + 2.(X).(4) + (4)^2 = X^2 + 8X + 16$

$$4X^2 + 20X + 25 \geq X^2 + 8X + 16$$

Al pasar todos los términos al lado izquierdo de la inecuación :

$$4X^2 + 20X + 25 - X^2 - 8X - 16 \geq 0$$

$$3X^2 + 12X + 9 \geq 0$$

La solución de este tipo de inecuaciones está detalladamente explicada en la guía "INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO".

Solución : $X = (-\infty , -3] \cup [-1 , +\infty)$

EJERCICIO 7 : *Resolver* $\left| 1 - \frac{X}{3} \right| < 1$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (0 , 6)$$

EJERCICIO 8 : *Resolver* $|3 - 2X| < 0$

Solución : *Conjunto vacío.*

EJERCICIO 9 : *Resolver* $\left| \frac{2X-1}{X+3} \right| \leq 1$

Solución en forma de intervalo :

$$X = [-2/3 , 4]$$

EJERCICIO 10 : *Resolver* $|3 - 2X| < |X + 4|$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (-1/3 , 7)$$

EJERCICIO 11 : *Resolver* $\left| \frac{X+1}{X-2} \right| > 2$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (1 , 2) \cup (2 , 5)$$

EJERCICIO 12 : *Resolver* $\left| \frac{3X+5}{X} \right| \geq 2$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (-\infty , 5] \cup [-1 , 0) \cup (0 , +\infty)$$

EJERCICIO 13 : *Resolver* $\left| \frac{3X-1}{X+7} \right| < 3$

Solución en forma de intervalo :

X = (– 10/3 , + ∞)

EJERCICIO 14 : *Resolver* $\left| \frac{2X-1}{1+2X} \right| > 3$

Solución en forma de intervalo :

X = (- 1 , - 1/2) U (- 1/2 , -1/4)