Ejercicios de la página 40 del cuaderno de apoyo

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4} = [0/0] = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = [0/0] = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+x-3} = [0/0] = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x+\frac{3}{2})(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2(x+\frac{3}{2})} = \frac{1}{5}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = [0/0] = \lim_{x\to 0} \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2-6x+8}{x-9} = -\frac{8}{9}$

10. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^3-10x^2+27x-18} = [0/0] = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-3)(x-6)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{(x-3)(x-6)} = \frac{2}{5}$

12. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-4x+x+4} = 0$

14. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-6x+5} = [0/0] = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(x-1)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+5}{x-1} = \frac{5}{2}$

16. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = [0/0] = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{4}$

18. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^3+x^2-9x-9} = [0/0] = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{12}$

20. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-x-2} = [0/0] = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^2}{(x+1)} = \frac{16}{3}$

22. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{(x+15)}-4}{x^2-2x+1} = [0/0] = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{(x+15)}-4)(\sqrt{(x+15)}+4)}{(x^2-2x+1)(\sqrt{(x+15)}+4)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+15)-16}{(x^2-2x+1)(\sqrt{(x+15)}+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x^2-2x+1)(\sqrt{(x+15)}+4)} =$$

$$= \lim x\to 1 \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{(x+15)}+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{(x+15)}+4)} =$$

$$= \frac{2}{0} \quad (\textit{indeterminación})$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{(x+15)}+4)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{(x+15)}+4)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

24. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+6x+5} = [0/0] = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)}{(x+5)} = -\frac{1}{2}$

26. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{(x+3)}-2}{x^2-1} = [0/0] = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{(x+3)}+2)} = \frac{1}{8}$

28. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{(x+1)}-2}{x^2-2x+3} = [0/0] = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x+1)(x-3)(\sqrt{(x+1)}+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{(x+1)}+2)} = \frac{1}{16}$

30. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{(x+3)}-2}{x^2-2x+1} = [0/0] = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)^2(\sqrt{(x+3)}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)} =$

$$= \frac{1}{0} \quad (\textit{indeterminación})$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{(x+3)}+2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

32. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3+x^2-4x+4}{\sqrt{(x-1)}-1} = \frac{8}{0} \quad (\textit{indeterminación})$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3+x^2-4x+4}{\sqrt{(x-1)}-1} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3+x^2-4x+4}{\sqrt{(x-1)}-1} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

Cálculo de asíntotas:

2. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} = \dfrac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

Asíntotas verticales:

Calculo el límite en cada punto que anula al denominador. En este caso se ve fácilmente que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} (x+1) = -1$$

Por lo tanto no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

El grado del numerador es mayor que el del denominador, luego

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} = -\infty$$

y por lo tanto no hay asíntota horizontal.

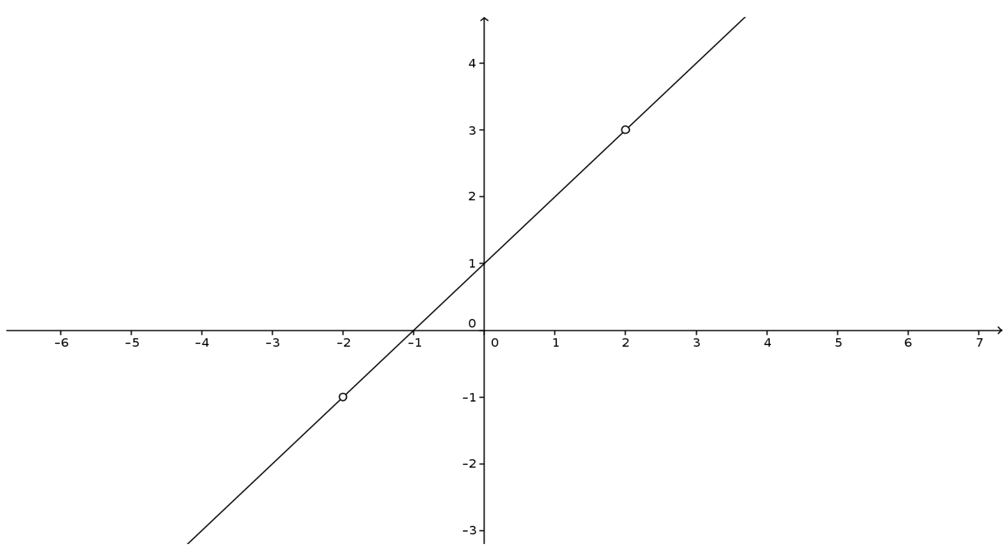
Asíntotas oblícuas:

Como el grado del numerador es uno mayor que el del denominador, hay asíntota oblícua $y = mx+n$, y al ser la función racional, es la misma en los dos lados.

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^3-4\mathrm{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x^2-4\mathrm{x}-4}{x^2-4} - x\right) = +\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$$

Por lo tanto, la función tiene por asíntota oblícua a la recta $y = x + 1$



4. $f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

Asíntotas verticales:

Calculo el límite de la función en los puntos en los que se anula el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1}(x+2) = 1$$

Por lo tanto, no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

El grado del numerador es mayor que el del denominador, luego

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} = -\infty$$

y por lo tanto no hay asíntota horizontal.

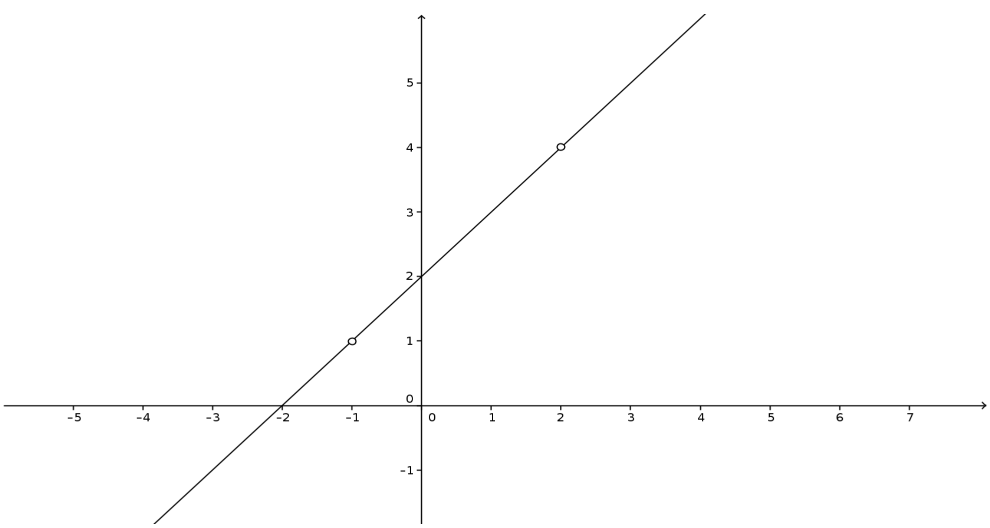
Asíntotas oblícuas:

Como el grado del numerador es uno mayor que el del denominador, hay asíntota oblícua $y = mx+n$, y al ser la función racional, es la misma en los dos lados.

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x-4}{x^2-x-2} = 2$$

Por lo tanto, la función tiene por asíntota oblícua a la recta $y = x + 2$



6. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \dfrac{x(x-1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}$

Asíntotas verticales:

Calculo el límite de la función en los puntos en los que se anula el denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{5}$$

No hay asíntota vertical en $x=1$.

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x(x-1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{0} \quad (\textit{indeterminación})$$

$$\lim_{x \to -\frac{3^-}{2}} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to -\frac{3^-}{2}} \frac{x(x-1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to -\frac{3^-}{2}} \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{3^+}{2}} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to -\frac{3^+}{2}} \frac{x(x-1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to -\frac{3^+}{2}} \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^+} = -\infty$$

Por lo tanto hay una asíntota vertical en $x=-\dfrac{3}{2}$

Asíntotas horizontales:

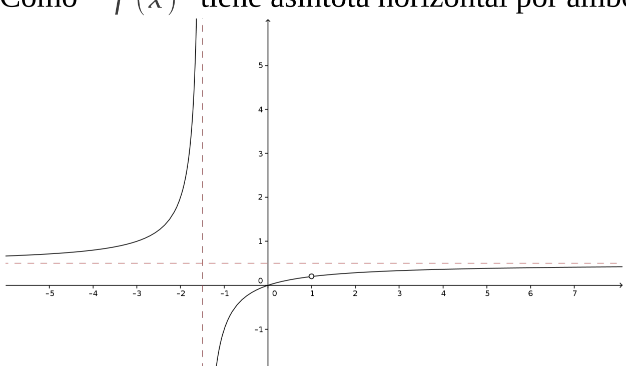
El grado del numerador es igual que el del denominador y es una función racional, luego

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{2}$$

por lo que la función tiene como asíntota horizontal a la recta $y = \dfrac{1}{2}$ por ambos lados.

Asíntotas oblícuas:

Como $f(x)$ tiene asíntota horizontal por ambos lados, no puede tener oblícua.



8. $f(x) = \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)}$

Asíntotas verticales:

Calculo el límite de la función en los puntos en los que se anula el denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2-6x+8}{x-9} = -\frac{8}{9}$$

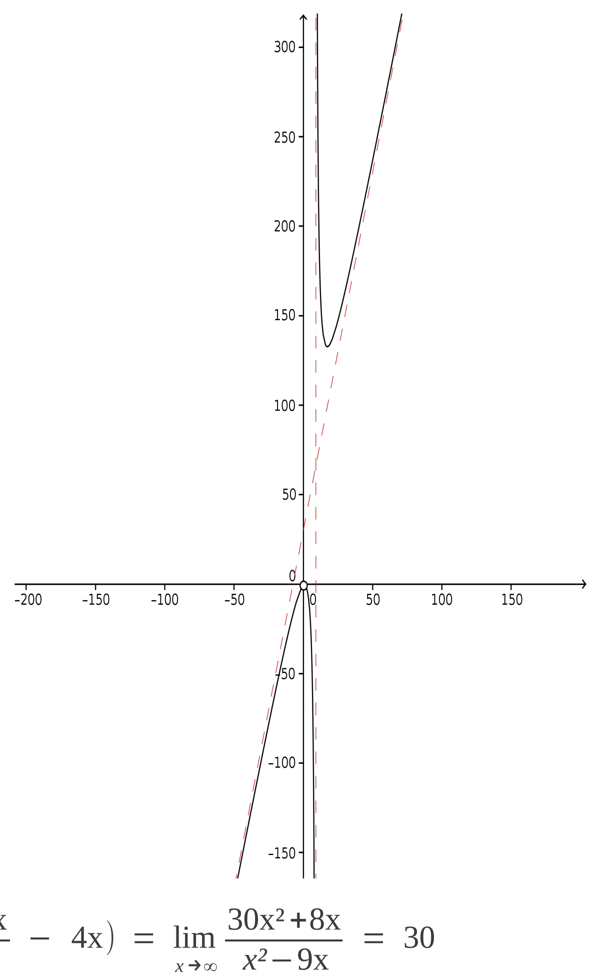
No hay asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x\to 9} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = \lim_{x\to 9} \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 9} \frac{4x^2-6x+8}{x-9} = \frac{278}{0} \quad (\textit{indeterminación})$$

$$\lim_{x\to 9^-} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = \lim_{x\to 9^-} \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{4x^2-6x+8}{x-9} = \frac{278}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = \lim_{x\to 9^+} \frac{x(4x^2-6x+8)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 9^+} \frac{4x^2-6x+8}{x-9} = \frac{278}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto hay una asíntota vertical en $x=9$



El grado del numerador es mayor que el del denominador, luego

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} = -\infty$$

y por lo tanto no hay asíntota horizontal.

Asíntotas oblícuas:

Como el grado del numerador es uno mayor que el del denominador, hay asíntota oblícua $y = mx+n$, y al ser la función racional, es la misma en los dos lados.

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-6x^2+8x}{x^3-9x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3-6x^2+8x}{x^2-9x} - 4x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{30x^2+8x}{x^2-9x} = 30$$

Por lo tanto, la función tiene por asíntota oblícua a la recta $y = 4x + 30$