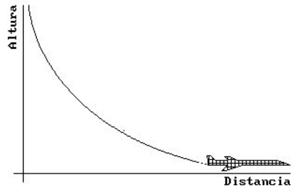


3. LÍMITES DE FUNCIONES.

3.1. Noción intuitiva de límite de una función.

El aterrizaje de un avión proporciona una visión intuitiva del concepto de límite de una función. El avión sobrevuela a lo largo de la pista (variable *x*), mientras que su altura (variable *y*) va disminuyendo hasta hacerse *0*.

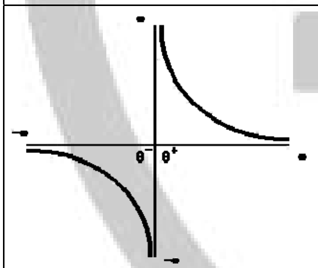
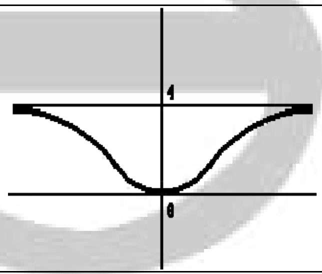
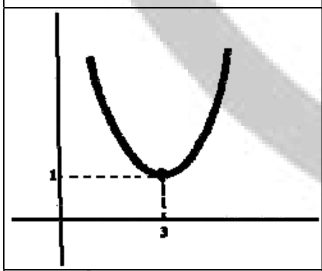
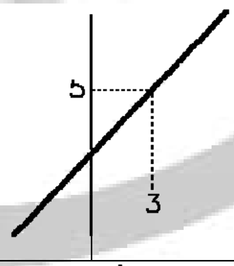
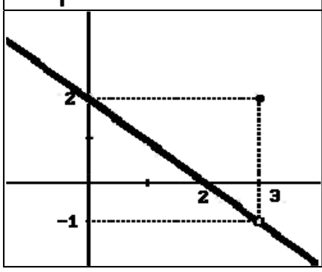
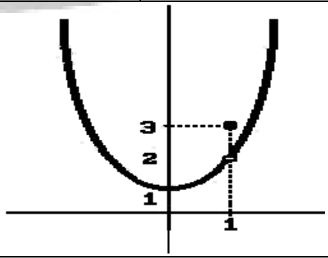
En general, algunas preguntas que nos podemos hacer con una función *f* cualquiera son:

a. Si los valores de la variable *x* se aproximan a un valor concreto x_0 (*x tiende a* x_0: $x \to x_0$), ¿qué le pasa a los valores de $f(x)$? ¿Se aproximan a algún valor? ¿Se hacen tan grandes o tan pequeños como queramos? ¿Oscilan?

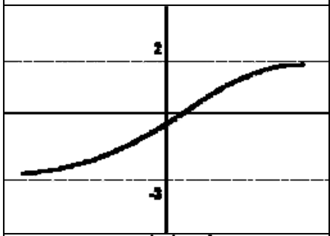
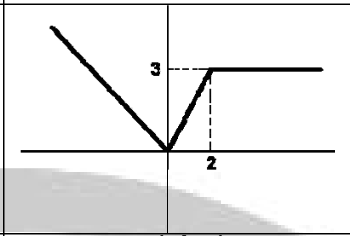
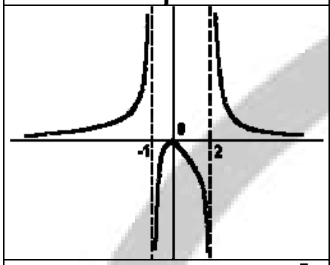
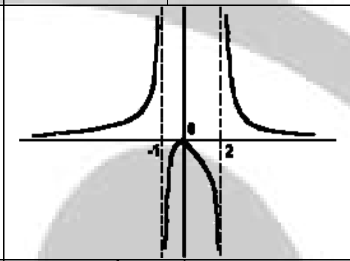
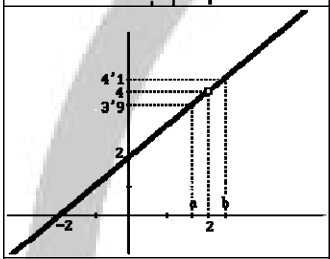
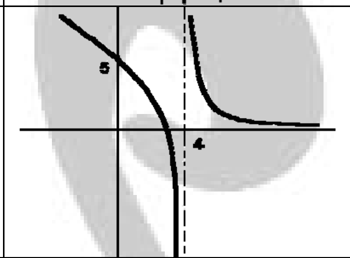
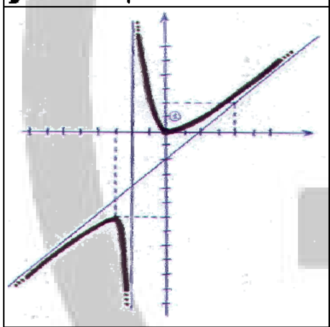
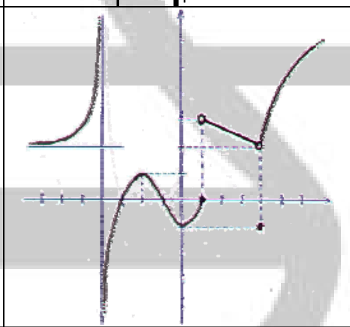
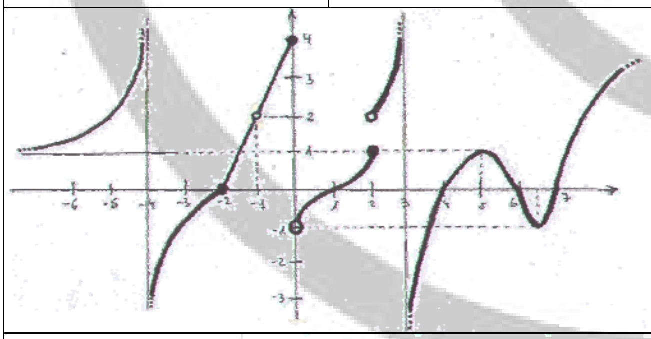
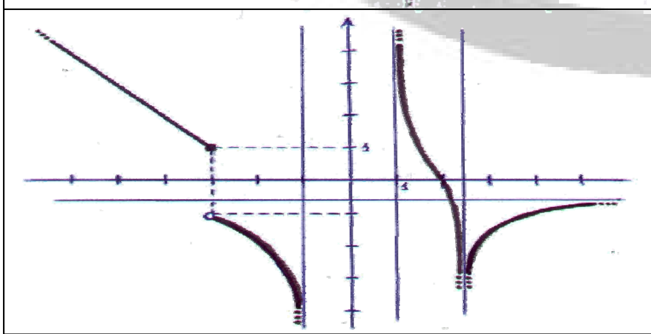
b. Si los valores de la variable x se hacen arbitrariamente grandes (*tienden a* ∞: $x \to \infty$) o pequeños (*tienden a* $-\infty$: $x \to -\infty$), ¿qué le pasa a los valores de $f(x)$? ¿Se aproximan a algún valor? ¿Se hacen tan grandes o tan pequeños como queramos? ¿Oscilan?

Estas cuestiones son las que pretendemos responder, desarrollando estrategias que nos permitan determinar, de forma relativamente cómoda, el comportamiento de las imágenes dependiendo de los valores de la variable.

De manera intuitiva se puede intentar responder a algunas cuestiones similares a las anteriores, analizando la gráfica de una función:

GRÁFICA	LÍMITES	GRÁFICA	LÍMITES
	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$		$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$		$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$
	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 3} f(x) = -1 \neq f(3) = 2$		$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$

Ejercicio: A la vista de las gráficas, calcular los límites que se plantean.

<table>
<tr><th>GRÁFICA</th><th>LÍMITES</th><th>GRÁFICA</th><th>LÍMITES</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$</td>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$</td>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$</td>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=$</td>
<td></td>
<td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"></td>
<td colspan="2">$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 6,5} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"></td>
<td colspan="2">$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$
$f(-3)$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2,5^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2,5^+} f(x)=$</td>
</tr>
</table>

3.2. Definiciones formales.

Las definiciones de límites, con todas las posibilidades que se pueden dar, son abstractas y difíciles de comprender. Vamos a escribirlas todas con el único objetivo de irnos familiarizando algo con el lenguaje matemático más complejo y para tenerlas recogidas con orden por si en el futuro a alguien le hacen falta.

3.2.1. Límite de una función en infinito.

(A) LÍMITE FINITO:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \;/\; x > M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

(B) LÍMITES INFINITOS:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists h \in \mathbb{R} \;/\; x > h \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists h \in \mathbb{R} \;/\; x > h \Rightarrow f(x) < M$$

En la práctica, los límites en ∞ se calculan igual que se hacían los límites de sucesiones.

3.2.2. Límite de una función en menos infinito.

(A) LÍMITE FINITO:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \;/\; x < M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

(B) LÍMITES INFINITOS:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists h \in \mathbb{R} \;/\; x < h \Rightarrow f(x) > M$$

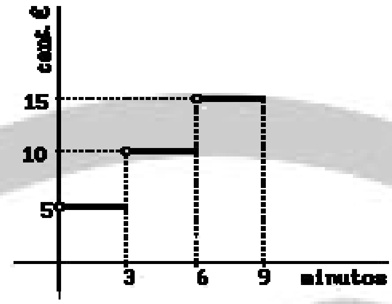
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists h \in \mathbb{R} \;/\; x < h \Rightarrow f(x) < M$$

En la práctica, los límites en $-\infty$ se calculan igual que en ∞, sin más que hacer el cambio de la variable x por *-x:* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$.

3.2.3. Límite puntual de una función.

A los extremos de la recta real tan sólo nos podemos aproximar por uno de sus lados, es decir, que a ∞ sólo nos podemos acercar por la izquierda, mientras que a $-\infty$ sólo nos podemos aproximar por la derecha. Sin embargo, a cualquier otro punto a de la recta, nos podemos aproximar por ambos lados: por su izquierda (por valores menores que *a:* $x \to a^-$) o por su derecha (mediante valores mayores que *a:* $x \to a^+$). Si tenemos en cuenta esta circunstancia, a la hora de calcular un límite puntual siempre tendremos que estudiar lo que ocurre con la función al aproximarnos por cada lado, obteniendo así los *límites laterales*. Lógicamente, si ambos límites son iguales, existirá el límite de la función en dicho punto y será igual que los laterales.

Intuitivamente, esto se ve muy bien en el siguiente ejemplo:
Consideremos la función T que asocia a cada período de tiempo de duración de una llamada telefónica su importe; si cada 3 minutos o fracción importa 0,03 €, la gráfica de T es:



¿Cómo se comporta T en el punto $x=3$? Si nos aproximamos a 3 tomando valores mayores, la función vale 10; pero si nos aproximamos a 3 con valores menores, la función vale 5. Esta situación se puede resumir diciendo que el límite de T por la derecha en el punto 3 es 10 y que el límite de T por la izquierda en el punto 3 es 5: $\lim_{x\to 3^+} T(x) = \mathbf{10}$ $\quad y \quad$ $\lim_{x\to 3^-} T(x) = \mathbf{5}$.

(A) LÍMITES FINITOS:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < a - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Obsérvese que en esta definición, se prescinde del valor de la función en el punto $x=a$. La función f puede tomar en a el valor L, otro distinto de L o incluso no existir.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = 2x$. Veamos que $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$.

Consideremos un número real positivo cualquiera suficientemente pequeño: $\varepsilon = 0{,}001$.
Debemos buscar otro número real positivo suficientemente pequeño δ, de forma que si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces tengamos que $|f(x) - 6| = |2x - 6| < 0{,}001$. Pues bien:

Si $|2x-6| < 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad -0{,}001 < 2x - 6 < 0{,}001 \quad \overset{\text{sumando } 6}{\Rightarrow} \quad 5{,}999 < 2x < 6{,}001 \quad \overset{\text{dividiendo entre } 2}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \quad 2{,}9995 < x < 3{,}0005 \quad \overset{\text{restando } 3}{\Rightarrow} \quad -0{,}0005 < x - 3 < 0{,}0005 \quad \Rightarrow \quad |x - 3| < 0{,}0005$

Por lo tanto, es posible encontrar nuestro $\delta = 0{,}0005$.

Esto se debe poder hacer para cualquier valor de $\varepsilon > 0$. Por eso vamos a razonar en general:

Si $|2x-6| < \varepsilon \;\Rightarrow\; -\varepsilon < 2x-6 < \varepsilon \;\overset{\text{sumando } 6}{\Rightarrow}\; -\varepsilon+6 < 2x < \varepsilon+6 \;\overset{\text{dividiendo entre } 2}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\; \dfrac{-\varepsilon}{2}+3 < x < \dfrac{\varepsilon}{2}+3 \;\overset{\text{restando } 3}{\Rightarrow}\; \dfrac{-\varepsilon}{2} < x-3 < \dfrac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Por lo tanto, siempre es posible encontrar nuestro δ, por ejemplo, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ejemplo 2: Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x \le 1 \\ x+3 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

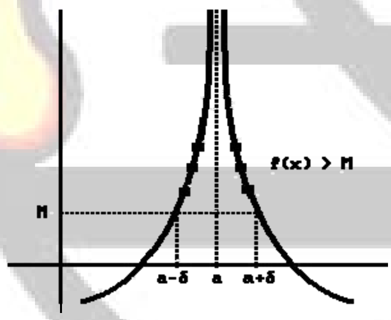
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ ya que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \varepsilon > 0$ / si $0 < 1-x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-3| = |3-3| = 0 < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4$ ya que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \varepsilon > 0$ / si $0 < x-1 < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-4| = |x-3-4| = |x-1| < \varepsilon$

(B) LÍMITES INFINITOS (también se pueden hacer las definiciones laterales):

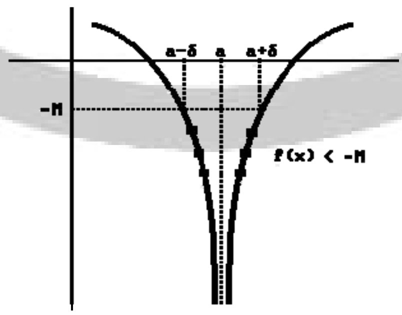
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

Intuitivamente, esto significa que, dado cualquier número real *M*, siempre podemos encontrar un entorno conveniente de a en el que los valores de la función son mayores que *M*.



$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < M$$

Intuitivamente, esto significa que, en un entorno conveniente de *a*, los valores de la función son tan pequeños como queramos.



3.3. Cálculo de límites.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

FUNCIÓN	RESULTADO	EJEMPLOS	
f polinomio	c.l.>0 $\Rightarrow\ \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-x^2-2x+4)=\infty \quad pq \quad 3>0$	
	c.l.<0 $\Rightarrow\ -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}(-7x^4+2x^3-x)=-\infty \quad pq \quad -7<0$	
$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ racional $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *indet.*	grado $p(x)$<grado $q(x)$ $\Rightarrow 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x-3}{2x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{0-0}{2+0}=0$	
	grado $p(x)$=grado $q(x)$ $\Rightarrow$ c.l. $p(x)$ / c.l. $q(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+x}{2x^2-4x+5}=\dfrac{-3}{2}$	
	grado $p(x)$>grado $q(x)$ $\Rightarrow\ \pm\infty$ según regla signos con c.l.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-6x^2+5x}{2-x}=-\infty \quad \left(\dfrac{4}{-1}<0\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+2x^2+1}{-5x^2+3x-1}=\infty \quad \left(\dfrac{-3}{-5}>0\right)$
$f(x)=a^{g(x)}$ ($a>0$ y $a\neq 1$) exponencial	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ un número.	$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{3x+1}}=e^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{1}{e^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{e}}{e}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{-2x+7}{x+2}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}=\dfrac{4}{9}$
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ $\Rightarrow$ 0 (0<a<1) $\Rightarrow\ \infty$ (a>1)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{-x^3}{-2x^2+1}}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$	$\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{2x-4}{7}}=\left[3^{\infty}\right]=\infty$
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ $\Rightarrow\ \infty$ (0<a<1) $\Rightarrow$ 0 (a>1)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3x^2}=\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-\infty}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\infty}\right]=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} 10^{\frac{x^5+2x^2}{-3x^3+2}}=\left[10^{-\infty}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\infty}\right]=0$
$f(x)$ $\downarrow$ $\log_a g(x)$ ($a>0$ y $a\neq 1$) logaritmo	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\in\begin{cases}R^+ \Rightarrow n^o\\ R_0^- \Rightarrow \nexists\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to\infty} L\left(\dfrac{-3x+1}{4-2x}\right)=L\left(\dfrac{3}{2}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{-3x+1}{4+2x}\right)=\log\left(\dfrac{-3}{2}\right)=???$
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ $\Rightarrow\ -\infty$ (0<a<1) $\Rightarrow\ \infty$ (a>1)	$\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}} x^2=-\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\log_5\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ $\Rightarrow\ \nexists\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\log_7(-3x+4)$	

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(-x)$$ (sustituir la x por $-x$, hacer las cuentas y calcular el límite en $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-6x^2+5x}{2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^3-6x^2-5x}{2+x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3x^3}=\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\infty}\right]=0$

Las funciones trigonométricas “puras” (sin componer) no tienen límite en $\pm\infty$.

$\lim_{x\to a} f(x)$ (sustituir la x por a y hacer las cuentas)

FUNCIÓN	RESULTADO	EJEMPLOS
f polinomio	Un número.	$\lim_{x\to -1}(x^3-x^2-2x+4)=(-1)^3-(-1)^2-2(-1)+4=-1-1+2+4=4$
$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ racional	$p(a)\in\mathbb{R},\ q(a)\neq 0$ $\Rightarrow$ un número.	$\lim_{x\to 2}\frac{-5x+7}{x^2-3x}=\frac{3}{2}$; $\lim_{x\to -3}\frac{-x-3}{2x+1}=\frac{-(-3)-3}{2\cdot(-3)+1}=\frac{0}{-5}=0$
	$p(a)=k\neq 0,\ q(a)=0$ $\Rightarrow$ $k/0$ $\Rightarrow$ límites laterales (dan ∞ pero hay que estudiar el signo de cada uno).	$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2-2x+1}=\left(\frac{-1}{0}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x^2-2x+1}=-\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x^2-2x+1}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2-2x+1}=-\infty$
		$\lim_{x\to 0}\frac{x+4}{x^2-3x}=\left(\frac{4}{0}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\frac{x+4}{x^2-3x}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x+4}{x^2-3x}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 0}\frac{x+4}{x^2-3x}$
	$p(a)=q(a)=0$ $\Rightarrow$ ***0/0 indet.*** $\Rightarrow$ descomponer los polinomios, <u>simplificar</u> y volver a calcular el límite.	$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+6x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-6)}{(-1)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(x-6)}{(-1)}=\frac{-5}{-1}=5$
		$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2+4x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}=\left(\frac{1}{0}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=-\infty\\ \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}$
$f(x)=a^{g(x)}$ ($a>0$ y $a\neq 1$) exponencial	$\lim_{x\to a}g(x)\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ un número	$\lim_{x\to -1}e^{-3x^2+2x-7}=e^{-12}=\frac{1}{e^{12}}$; $\lim_{x\to 2}5^{\frac{-2x+7}{x+2}}=5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$
	$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ $\Rightarrow$ 0 (0<a<1) $\Rightarrow$ ∞ (a>1)	$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$; $\lim_{x\to -2}3^{\frac{5}{(x+2)^2}}=\left[3^{\infty}\right]=\infty$
	$\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ $\Rightarrow$ ∞ (0<a<1) $\Rightarrow$ 0 (a>1)	$\lim_{x\to -3}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{-2}{(x+3)^6}}=\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-\infty}\right]=\infty$; $\lim_{x\to 4}10^{\frac{-7}{(x-4)^4}}=\left[10^{-\infty}\right]=0$
	$\nexists\lim_{x\to a}g(x)$	$\nexists\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ *ya que* $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$ *y* $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right]=\infty$
$f(x)$ $\downarrow$ $\log_a g(x)$ ($a>0$ y $a\neq 1$) logaritmo	$\lim_{x\to a}g(x)\in\left\{\begin{array}{l}R^+\Rightarrow n^o\\ R_0^-\Rightarrow\nexists\end{array}\right.$	$\lim_{x\to -1}L\left(\frac{-3x+1}{4+2x}\right)=L\,2$; $\lim_{x\to 2}\log\left(\frac{-3x-2}{4+2x}\right)=\log(-1)=???$
	$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ $\Rightarrow$ $-\infty$ (0<a<1) $\Rightarrow$ ∞ (a>1)	$\lim_{x\to 0}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$; $\lim_{x\to -3}\log_5\frac{x^2+1}{(3+x)^2}=\infty$
	$\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ ó $\nexists$ $\Rightarrow$ $\nexists\lim_{x\to a}f(x)$	$\nexists\lim_{x\to -4}\log_5\left(\frac{-3}{(x+4)^2}\right)$

Las funciones seno y coseno "puras" (sin componer) tienen límite puntual en todo su dominio.

Funciones definidas a trozos:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$	
CASO	Si las imágenes de todos los valores de *x* próximos a ***a*** se calculan mediante la misma fórmula, nos encontramos en el caso de un límite puntual de una función.
EJEMPLOS	$f(x)=\begin{cases} -3x+1 & si \quad x=1 \\ \dfrac{x^3-7x^2+6x}{1-x} & si \quad x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+6x}{1-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=5$
	$f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x\leq -1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & si \quad -1<x<2 \\ x^3 & si \quad x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{x+1}=-1$
CASO	Si las imágenes de los valores de *x* próximos a ***a*** por la izquierda se calculan mediante una fórmula y las de los valores de *x* próximos a ***a*** por la derecha mediante otra diferente, calcularemos los límites laterales por separado. Si ambos coinciden, existirá el límite en ***a*** y su valor coincidirá con el de los límites laterales. Si no coinciden o alguno de ellos no existe, no existirá el límite en ***a***.
EJEMPLOS	$f(x)=\begin{cases} 3-x & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad 1\leq x<3 \\ x+1 & si \quad x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3-x)=2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=2 \\ \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 2=2 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x+1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x) \end{cases}$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)$$	
Si la función está definida para valores tan pequeños como queramos, utilizamos la fórmula correspondiente a dichos valores y calculamos el límite en menos infinito de dicha función. En caso de no estar definida la función para valores tan pequeños como queramos, no podemos hablar de la existencia de dicho límite.	
EJEMPLOS	$f(x)=\begin{cases} -3x+1 & si \quad x<1 \\ 2^x & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(-3x+1)=\lim_{x\to \infty}(3x+1)=\infty$
	$f(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad -2\leq x<0 \\ Lx & si \quad 0\leq x<4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x)=???$
$$\lim_{x\to \infty} f(x)$$	
Si la función está definida para valores tan grandes como queramos, utilizamos la fórmula correspondiente a dichos valores y calculamos el límite en infinito de dicha función. En caso de no estar definida la función para valores tan grandes como queramos, no podemos hablar de la existencia de dicho límite.	
EJEMPLOS	$f(x)=\begin{cases} -3x+1 & si \quad x<1 \\ 2^x & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty} 2^x=\infty$
	$f(x)=\begin{cases} \cos x & si \quad -2\pi\leq x<0 \\ \operatorname{sen} x & si \quad 0\leq x<\pi \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to \infty} f(x)=???$

3.4. Operaciones y límites.

El límite (en $\pm\infty$ o puntual) de una operación de dos funciones es igual a dicha operación con los límites de cada función. Esta es la norma general que nos va a permitir calcular la mayoría de los límites, aunque nos encontraremos con problemas en algunos casos (*indeterminaciones*), que recordaremos como se resuelven. Los siguientes cuadros, resumen las distintas posibilidades:

Límites y operaciones	EJEMPLOS: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2} g(x) = -3 \end{cases}$
$\lim\big((f \pm g)(x)\big) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}\big((f+g)(x)\big) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) + \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5 + (-3) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2}\big((f-g)(x)\big) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) - \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5 - (-3) = 8$
$\lim\big((f \cdot g)(x)\big) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}\big((f\cdot g)(x)\big) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5 \cdot (-3) = -15$
$\lim\big((f / g)(x)\big) = \lim f(x) / \lim g(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}\big((f / g)(x)\big) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) / \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5 / (-3)$
$\lim\big((f^g)(x)\big) = \lim f(x)^{\lim g(x)}$	$\lim\limits_{x\to 2}\big((f^g)(x)\big) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)^{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

SUMA			EJEMPLOS
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[(f+g)(x)]$	
L_1	L_2	L_1+L_2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3-2x}{x+4} + \frac{3x^2+5x-1}{6-7x^2}\right] = -2 + \frac{-3}{7} = \frac{-17}{7}$
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{3-2x}{x+4} + \frac{2}{(x-1)^2}\right] = \left(\frac{5}{3} + \infty\right) = \infty$
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{-2x^3}{x-3} + \frac{-1}{x-4}\right] = (-\infty + 0) = -\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3-2x^2}{x+4} + \frac{3x^3+5x}{7-9x^2}\right] = [-\infty + (-\infty)] = -\infty$

RESTA			EJEMPLOS
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[(f-g)(x)]$	
L_1	L_2	L_1-L_2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3-2x}{x+4} - \frac{3x^2+5x-1}{6-7x^2}\right] = -2 - \frac{-3}{7} = \frac{-11}{7}$
L	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{3-2x}{x+4} - \frac{-2}{(x-1)^2}\right] = \left(\frac{5}{3} - (-\infty)\right) = \infty$
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{-2x^3}{x-3} - \frac{x}{x-4}\right] = (-\infty - 1) = -\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\infty - \infty$ Indeterminación	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3+2x^2}{x+1} - \frac{2x^2+x}{x-1}\right] = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-3}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3-2x^2}{x+1} - \frac{x-x^2}{x-1}\right] = (-\infty + \infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x^2+2x-3}{x^2-1} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = -\infty$

PRODUCTO			EJEMPLOS
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [(f \cdot g)(x)]$	
L_1	L_2	$L_1 \square L_2$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{-2x+1}{3x}\cdot 3^{-x}\right)=\frac{5}{-6}\cdot 9=\frac{-15}{2}$
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si L>0	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\cdot 3^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x+1}{-3x}\cdot 3^{x}\right)=\left(\frac{2}{3}\cdot\infty\right)=\infty$
		$\mp\infty$ si L<0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x-3}{-5x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\right]=\left(\frac{4}{-5}\cdot\infty\right)=-\infty$
		$0\cdot\infty$ si L=0 Indeterminación	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3+2x^2}{-x+1}\cdot\frac{2x^2+x}{x^3-1}\right]=(-\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+8x^2+3x}{-x^4+x^3+x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-4$
			$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x}{x^3-1}\cdot\frac{3+x^3}{2x+1}\right]=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+x^4+6x^2+3x}{2x^4+x^3-2x-1}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=-\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3-x^3}{2x+1}\cdot\frac{2x^4-x^2}{x^3-1}\right]=(-\infty\cdot\infty)=-\infty$

DIVISIÓN			EJEMPLOS
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [(f\ /\ g)(x)]$	
L_1	L_2	L_1/L_2 si $L_2\neq 0$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3^{-x}:\frac{-2x+1}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{x}:\frac{2x+1}{-3x}\right)=0:\frac{2}{-3}=0$
		$\pm\infty$ ó no existe si $L_1\neq 0$ y $L_2=0$ (límites laterales en límites puntuales)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{-5}{x^2-4x+4}=\left(\frac{-5}{0}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-5}{x^2-4x+4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-5}{x^2-4x+4}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{-5}{x^2-4x+4}=-\infty$
			$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+x}{2x^2-3}:\frac{x+4}{x^2-3x}\right)=\left(\frac{-1}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x^4+4x^3-3x^2}{2x^3+8x^2-3x-12}\right)=-\infty$
		0/0 (Indeterminación) si $L_1=L_2=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4+x^5}{x^2-1}:\frac{3+x^3}{2x-1}\cdot\right]=(0:0)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+3x^5-2x^4}{x^5-x^3+3x^2-3}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\infty$
			$\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2+2x^3-x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1/2)}{(-1)\cdot(x-1)}=\frac{3}{-1}=-3$
L	$\pm\infty$	0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x-3}{-5x}:\left(\frac{3}{5}\right)^{-x}\right]=\left(\frac{4}{-5}:\infty\right)=0$
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$ si L>0	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3^{-x}:\frac{x-2}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{x}:\frac{-x-2}{-3x}\right)=\left(\infty:\frac{1}{3}\right)=\infty$
		$\mp\infty$ si L<0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}:\frac{4x-3}{-2x}\right]=\left(\infty:(-2)\right)=-\infty$
		$\pm\infty$ ó no existe si L=0 (límites laterales en límites puntuales)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^5}{x+1}:\frac{4x-3}{-2x^2}\right]=(\infty:0)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-4x^7}{4x^2+x-3}\right]=-\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞/∞ Indeterminación	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}:\frac{-3}{x^4}\right)=\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{-6x^2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{-6}\right)=0$

POTENCIA			EJEMPLOS
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[(f^{g})(x)]$	
$L_1>0$	L_2	$(L_1)^{L_2}$	$\lim\limits_{x\to -1}(-2x+1)^{3^x} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$
L>1	∞	∞	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x+1}\right]^{3x-4} = \left(2^{\infty}\right) = \infty$
	$-\infty$	0	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{x-2}\right]^{-4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-3x}{-x-2}\right]^{-4x^2} = \left(3^{-\infty}\right) = 0$
1	$\pm\infty$	1^{∞} Indeterminación	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x}{3x-2}\right]^{4x^2} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{3x}{3x-2}-1\right]^{4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{3x-2}\right]^{4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{3x-2}{2}}\right]^{4x^2\cdot\frac{3x-2}{2}\cdot\frac{2}{3x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x^2\cdot\frac{2}{3x-2}\right)} = \left(e^{\infty}\right) = \infty$
0<L<1	∞	0	$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x+1}{2x+3}\right]^{\frac{1}{x^2}} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right] = 0$
	$-\infty$	∞	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{7x-9}\right]^{-3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-5x}{-7x-9}\right]^{-3x^2} = \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{-\infty}\right] = \infty$
0	L>0	0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]^{\frac{3x+1}{2x}} = 0^{\frac{3}{2}} = 0$
	L<0	$\pm\infty$ o no existe (límites laterales en límites puntuales)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]^{\frac{3x+1}{-x}} = \left(0^{-3}\right) = \infty$
	L=0	0^{0} Indeterminación	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x-5}{2x^2+3}\right]^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-x-5}{2x^2+3}\right]^{\frac{1}{x^2}} = \left[0^{0}\right]$
	∞	0	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-2x+2}{3}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = \left(0^{\infty}\right) = 0$
	$-\infty$	∞	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2-1}\right]^{-x} = \left(0^{-\infty}\right) = \infty$
L<0	$\pm\infty$	No existe	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[(-1)^{\infty}\right] = ???$
∞	L>0	∞	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^3-4}{2x^2+3}\right]^{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4}{2x^2+3}\right]^{\frac{x^2+1}{x^2}} = \left(\infty^{1}\right) = \infty$
	L<0	0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4}{2x^2+3}\right]^{\frac{x+1}{-x}} = \left(\infty^{-1}\right) = 0$
	L=0	∞^{0} Indeterminación	$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]^{x-1} = \left(\infty^{0}\right)$
	∞	∞	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+3}{x-1}\right]^{x} = \left(\infty^{\infty}\right) = \infty$
	$-\infty$	0	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+3}{x-1}\right]^{-x} = \left(\infty^{-\infty}\right) = 0$

3.5. Cálculo de indeterminaciones.

Aunque en los ejemplos anteriores ya han aparecido algunas indeterminaciones y las hemos resuelto al igual que hacíamos en las sucesiones, vamos a recordar detenidamente los pasos que hay que seguir para resolver las más sencillas.

En primer lugar, recordemos que una indeterminación aparece cuando intentamos calcular el límite de una operación y lo hacemos realizando los límites de cada uno de los elementos de la operación y, posteriormente, haciendo la operación con el valor de dichos límites. Así, nos podemos encontrar las siguientes:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \;;\; \left(\frac{0}{0}\right) \;;\; (\infty-\infty) \;;\; (0\cdot\infty) \;;\; \left(1^{\infty}\right) \;;\; \left(0^{0}\right) \;;\; \left(\infty^{0}\right)$$

El criterio general para resolverlas es volver al comienzo y realizar la operación primero, para posteriormente calcular el límite (este proceso nos va a servir en todos los casos, salvo cuando la operación es la potencia, donde la cosa es más complicada). Después de seguir ese camino, normalmente transformaremos las diferentes indeterminaciones en una del siguiente tipo:

(A) *Indeterminación* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *provocada por el cociente de dos polinomios:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Para resolverla dividimos todos los términos del numerador y del denominador entre x elevada a la mayor potencia del denominador (también puede ser del numerador, pero suele ser más cómoda la interpretación con la del denominador).

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x^3+7}{3x^3-4x+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x^3}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{8}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-5+\frac{7}{x^3}}{3-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\frac{0-5+0}{3-0+0}=\frac{-5}{3}$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+5}{3x^3-8x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{8x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{5}{x^3}}{3-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{3-0+0}=\frac{0}{3}=0$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^3+11}{7x^4-3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^5}{x^4}-\frac{5x^3}{x^4}+\frac{11}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-\frac{5}{x}+\frac{11}{x^4}}{7-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\left(\frac{+\infty}{7}\right)=+\infty$$

Analizando los ejemplos, descubrimos la siguiente regla:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\pm\infty & \text{si grado n}^{\text{dor}} > \text{grado d}^{\text{dor}}\ (+\text{ ó }-\text{ según regla signos con coef. líderes})\\ \dfrac{p}{q} & \text{si grado n}^{\text{dor}} = \text{grado d}^{\text{dor}}\ \left(p\text{=coef. líder }P(x);\ q\text{=coef. líder }Q(x)\right)\\ \boldsymbol{0} & \text{si grado n}^{\text{dor}} < \text{grado d}^{\text{dor}}\end{cases}$$

(B) *Indeterminaciones producidas por la suma, diferencia, producto, cociente o potencia de cocientes de polinomios.*

Se resolverán operando dichas fracciones algebraicas.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{x^2-2}+\dfrac{7x-x^2}{2x^2-1}\right)=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)+\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{3}{1}+\dfrac{-1}{2}=\dfrac{5}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x-x^2}{x-1}\right]=(-\infty+\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{-x^3+2x^2+2x-3}{x^2-1}\right]=\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3+2x^2}{-x+1}\cdot\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}\right]=(-\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^4-2x^3+6x^2+3x}{-x^4+x^3+x-1}=\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)=\dfrac{-4}{-1}=4$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^4+x^5}{x^6-1}:\dfrac{3+x}{2x^2-1}\right]=(0:0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+4x^6-x^5-2x^4}{x^7+3x^6-x-3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{2}{1}=2$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^4+x^5}{x^2-1}:\dfrac{3+x^3}{2x-1}\right]=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6+3x^5-2x^4}{x^5-x^3+3x^2-3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\infty$

(C) *Indeterminación* $(\infty-\infty)$ *producida por una expresión irracional (con raíces).*

Se resolverá multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada (signo central cambiado) del $\infty-\infty$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-5x+7}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}=\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2-5x+7}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2-5x+7}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2-5x+7}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2-5x+7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{2x+\sqrt{4x^2-5x+7}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}-\frac{7}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{5-0}{2+\sqrt{4-0+0}}=\frac{5}{4}$$

(D) *El número e* (EULER).

Consideremos la función definida por $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Entonces:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e=\mathbf{2.71828182845}...$ (lo podemos y debemos comprobar empíricamente con la calculadora).

Y podemos generalizar lo anterior de forma que, dada una función $g(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, también podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e$.

Este hecho nos permite resolver la indeterminación 1^{∞}, como vamos a comprobar en el siguiente *ejemplo:*

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{\frac{x^2-1}{x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\left(1^{\infty}\right)=$ (dividimos $5x-3$ entre $5x+4$ y reescribimos la fracción)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{5x+4}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+4}{-7}}\right)^{\frac{5x+4}{-7}\cdot\frac{-7}{5x+4}\cdot\frac{x^2-1}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7x^2+7}{5x^2+4x+10x+8}\right)}=e^{\frac{-7}{5}}$$

Otra forma de resolver un ejercicio del mismo tipo que el anterior sería:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2}{3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\left(1^{\infty}\right)=$ (sumamos y restamos 1 a la fracción, realizando la resta)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)^{\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}\cdot\frac{x^2}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{6x-3}\right)}=\left(e^{\infty}\right)=\infty$$

NOTA:
Las indeterminaciones 0^0 e ∞^0 requieren de técnicas más complejas (desconocidas de momento) para resolverlas, por lo que no las discutiremos aquí.

Ejercicio 1: Consideremos las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

Calcula los siguientes límites:

	LÍMITE	RESULTADO		LÍMITE	RESULTADO
1	$\lim_{x\to 0} p(x)$	3	2	$\lim_{x\to 1} p(x)$	-2
3	$\lim_{x\to -2} p(x)$	13	4	$\lim_{x\to 1/3} p(x)$	$4/3$
5	$\lim_{x\to -\infty} p(x)$	∞	6	$\lim_{x\to \infty} p(x)$	$-\infty$
7	$\lim_{x\to 0} q(x)$	$\sqrt{7}$	8	$\lim_{x\to 1} q(x)$	$2\cdot\sqrt{2}$
9	$\lim_{x\to -2} q(x)$	$\sqrt{17}$	10	$\lim_{x\to 1/3} q(x)$	$\sqrt{62}/3$
11	$\lim_{x\to -\infty} q(x)$	∞	12	$\lim_{x\to \infty} q(x)$	∞
13	$\lim_{x\to 0} r(x)$	$\nexists$	14	$\lim_{x\to 1} r(x)$	$\nexists$
15	$\lim_{x\to -2} r(x)$	$\sqrt[4]{7}$	16	$\lim_{x\to 1/3} r(x)$	$\nexists$
17	$\lim_{x\to -\infty} r(x)$	∞	18	$\lim_{x\to \infty} r(x)$	$\nexists$
19	$\lim_{x\to 0} s(x)$	0	20	$\lim_{x\to 1} s(x)$	$\sqrt[3]{2}$
21	$\lim_{x\to -2} s(x)$	$\sqrt[3]{14}$	22	$\lim_{x\to 1/3} s(x)$	0
23	$\lim_{x\to -\infty} s(x)$	∞	24	$\lim_{x\to \infty} s(x)$	∞
25	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$-4/3$	26	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$-1/2$
27	$\lim_{x\to -2} f(x)$	-8	28	$\lim_{x\to 1/3} f(x)$	-1
29	$\lim_{x\to -\infty} f(x)$	-2	30	$\lim_{x\to \infty} f(x)$	-2
31	$\lim_{x\to 0} g(x)$	$\nexists\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} -3/x=-\infty \\ \lim_{x\to 0^-} -3/x=\infty\end{cases}$	32	$\lim_{x\to 1} g(x)$	-3
33	$\lim_{x\to -2} g(x)$	$3/2$	34	$\lim_{x\to 1/3} g(x)$	-9

LÍMITE	RESULTADO	LÍMITE	RESULTADO
35 $\lim_{x\to -\infty} g(x)$	0	36 $\lim_{x\to\infty} g(x)$	0
37 $\lim_{x\to 0} h(x)$	-1	38 $\lim_{x\to 1} h(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty \end{cases}$
39 $\lim_{x\to -2} h(x)$	$-5/3$	40 $\lim_{x\to 1/3} h(x)$	$-5/3$
41 $\lim_{x\to -\infty} h(x)$	$-\infty$	42 $\lim_{x\to\infty} h(x)$	∞
43 $\lim_{x\to 0} j(x)$	0	44 $\lim_{x\to 1} j(x)$	$-1/3$
45 $\lim_{x\to -2} j(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim_{x\to -2^+} \frac{-x^2+2x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^-} \frac{-x^2+2x}{x^2-4} = \infty \end{cases}$	46 $\lim_{x\to 1/3} j(x)$	$-1/7$
47 $\lim_{x\to -\infty} j(x)$	-1	48 $\lim_{x\to\infty} j(x)$	-1
49 $\lim_{x\to 0} k(x)$	e^{-4}	50 $\lim_{x\to 1} k(x)$	e^{-3}
51 $\lim_{x\to -2} k(x)$	$e^{-6} = 1/e^6$	52 $\lim_{x\to 1/3} k(x)$	$e^{-11/3}$
53 $\lim_{x\to -\infty} k(x)$	0	54 $\lim_{x\to\infty} k(x)$	∞
55 $\lim_{x\to 0} l(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} 2^{1/x} = \infty \\ \lim_{x\to 0^-} 2^{1/x} = 0 \end{cases}$	56 $\lim_{x\to 1} l(x)$	2
57 $\lim_{x\to -2} l(x)$	$2^{-1/2} = \sqrt{1/2}$	58 $\lim_{x\to 1/3} l(x)$	8
59 $\lim_{x\to -\infty} l(x)$	1	60 $\lim_{x\to\infty} l(x)$	1
61 $\lim_{x\to 0} m(x)$	$2/3$	62 $\lim_{x\to 1} m(x)$	$4/9$
63 $\lim_{x\to -2} m(x)$	$32/243$	64 $\lim_{x\to 1/3} m(x)$	$(2/3)^{10/9} = \sqrt[9]{(2/3)^{10}}$
65 $\lim_{x\to -\infty} m(x)$	0	66 $\lim_{x\to\infty} m(x)$	0
67 $\lim_{x\to 0} n(x)$	1	68 $\lim_{x\to 1} n(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} = 0 \end{cases}$
69 $\lim_{x\to -2} n(x)$	$e^{-2/3} = \sqrt[3]{1/e^2}$	70 $\lim_{x\to 1/3} n(x)$	$e^{-3/8} = \sqrt[8]{1/e^3}$
71 $\lim_{x\to -\infty} n(x)$	1	72 $\lim_{x\to\infty} n(x)$	1

LÍMITE		RESULTADO	LÍMITE		RESULTADO
73	$\lim\limits_{x\to 0} a(x)$	$L2$	74	$\lim\limits_{x\to 1} a(x)$	$L3$
75	$\lim\limits_{x\to -2} a(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} L(x+2) = -\infty \\ \nexists \lim\limits_{x\to -2^-} L(x+2) \end{cases}$	76	$\lim\limits_{x\to 1/3} a(x)$	$L\left(\frac{7}{3}\right)$
77	$\lim\limits_{x\to -\infty} a(x)$	$\nexists$	78	$\lim\limits_{x\to \infty} a(x)$	∞
79	$\lim\limits_{x\to 0} b(x)$	$-\infty$	80	$\lim\limits_{x\to 1} b(x)$	$\log(1/4) = -2\cdot\log 2$
81	$\lim\limits_{x\to -2} b(x)$	0	82	$\lim\limits_{x\to 1/3} b(x)$	$\log(1/36) = -2\cdot\log 6$
83	$\lim\limits_{x\to -\infty} b(x)$	∞	84	$\lim\limits_{x\to \infty} b(x)$	∞
85	$\lim\limits_{x\to 0} c(x)$	$-2\cdot L2$	86	$\lim\limits_{x\to 1} c(x)$	$-L3$
87	$\lim\limits_{x\to -2} c(x)$	$\nexists \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) = \infty \\ \nexists \lim\limits_{x\to -2^-} L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \end{cases}$	88	$\lim\limits_{x\to 1/3} c(x)$	$-L(21/5)$
89	$\lim\limits_{x\to -\infty} c(x)$	$\nexists$	90	$\lim\limits_{x\to \infty} c(x)$	∞
91	$\lim\limits_{x\to 0} d(x)$	$\nexists$	92	$\lim\limits_{x\to 1} d(x)$	$\nexists$
93	$\lim\limits_{x\to -2} d(x)$	$\nexists$	94	$\lim\limits_{x\to 1/3} d(x)$	$\nexists$
95	$\lim\limits_{x\to -\infty} d(x)$	$\nexists$	96	$\lim\limits_{x\to \infty} d(x)$	∞

Ejercicio 2. Calcula los siguientes límites:

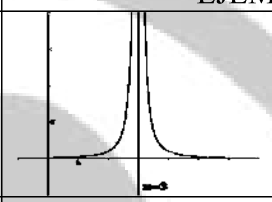
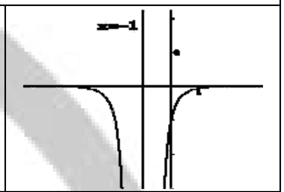
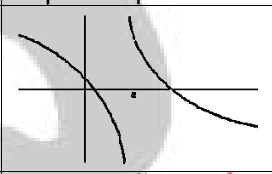
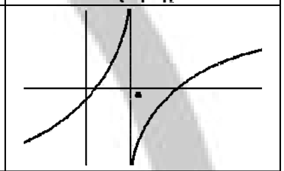
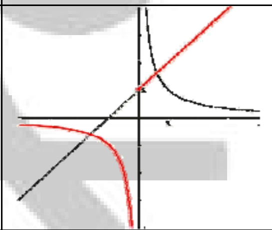
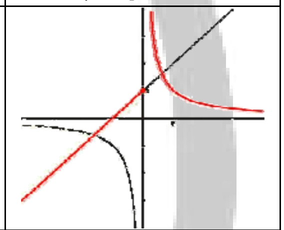
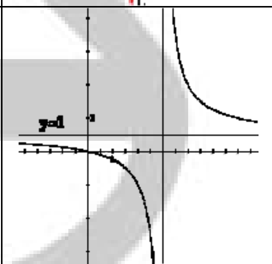
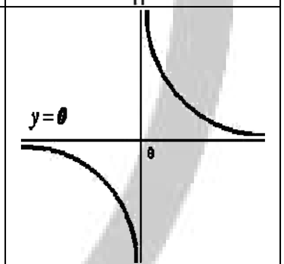
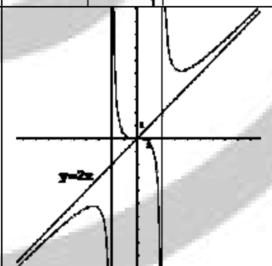
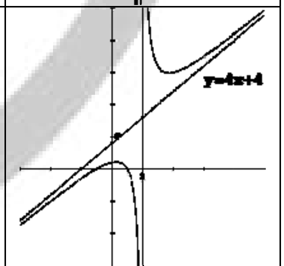
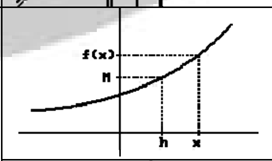
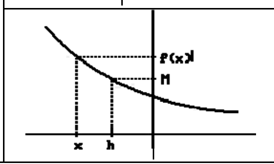
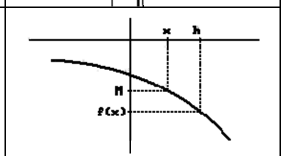
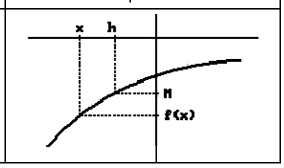
LÍMITE		RESULTADO	LÍMITE		RESULTADO
1	$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-5x^2}{x+3}$		2	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^4-1}{x^2-1}$	
3	$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(1+x)^2-1}{x^2}$		4	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-5}{(x-1)\cdot(x-3)^2}$	
5	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-5}{(x-1)\cdot(x-3)^2}$		6	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-2}{x^3}$	
7	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$		8	$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$	
9	$\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}$		10	$\lim\limits_{x\to 3} (x-2)^{\frac{x}{(x-3)^2}}$	
11	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$		12	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$	

3.6. Ramas infinitas de una función. Asíntotas y ramas parabólicas.

(A) Todas las situaciones planteadas anteriormente al calcular un límite, proporcionan información muy útil para la representación gráfica de una función.

Se dice que una función f tiene una *rama infinita*, cuando el valor de la variable o el valor de las imágenes o ambas crecen infinitamente. Si algunas de estas ramas se aproximan cada vez más a alguna recta, diremos que ésta es una *asíntota* de la función.

(B) Tipos de ramas infinitas:

TIPOS	*NOMBRE*	EJEMPLOS	
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	$x=a$ *Asíntota vertical de ramas convergentes*		
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$	$x=a$ *Asíntota vertical de ramas divergentes*		
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$	$x=a$ *Asíntota vertical con una única rama a la izquierda ó a la derecha*		
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ó ambos finitos (iguales o distintos)	$y=L$ *Asíntota horizontal* Puede haber 2 A.H.		
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-mx\right]=n$	$y=m\cdot x+n$ *Asíntota oblicua* Puede haber 2 A.O.		
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ó $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-mx\right]=\pm\infty$	*Rama parabólica*	 	 

(C) *Ejemplos de asíntotas:*

	ASÍNTOTAS VERTICALES: Posibles en los puntos problemáticos $\lim_{x\to k^{\pm}} f(x)=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=k}$
Polinomios	NO TIENEN, porque no tienen puntos problemáticos
Racionales	$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{-x^2+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{(-1)\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2}{-2}=-1 \quad\Rightarrow\quad x=1$ NO es A.V. de $f(x)=\frac{2x-2}{-x^2+1}$ $\lim_{x\to -1}\frac{2x-2}{-x^2+1}=\left(\frac{-4}{0}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to -1^+}\frac{2x-2}{-x^2+1}=-\infty\\ \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-2}{-x^2+1}=\infty\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=-1$ es A.V. de $f(x)=\frac{2x-2}{-x^2+1}$
Irracionales – Índice par	Asíntotas del radicando, cuando exista el límite: $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{2x-2}{-x^2+1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{2\cancel{(x-1)}}{(-1)\cancel{(x-1)}(x+1)}}=\sqrt{\frac{2}{-2}}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad x=1$ NO es A.V. de $f(x)=\sqrt{\frac{2x-2}{-x^2+1}}$ $\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{2x-2}{-x^2+1}}=\left(\frac{-4}{0}\right)=\lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{2x-2}{-x^2+1}}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=-1$ es A.V. de $f(x)=\sqrt{\frac{2x-2}{-x^2+1}}$
Irracionales – Índice impar	Asíntotas del radicando: $f(x)=\sqrt[3]{-3x+7}$ no tiene porque el radicando no tiene y $g(x)=\sqrt[5]{\frac{1}{x}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\sqrt[5]{\frac{1}{x}}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt[5]{\frac{1}{x}}=\infty\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=0$ es A.V.
Exponenciales	Posibles en los puntos problemáticos (del exponente): $\lim_{x\to -2} e^{\frac{1}{x+2}}=\left(e^{\frac{1}{0}}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to -2^+} e^{\frac{1}{x+2}}=\left(e^{\infty}\right)=\infty\\ \lim_{x\to -2^-} e^{\frac{1}{x+2}}=\left(e^{-\infty}\right)=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=-2$ es A.V. de $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$ $\lim_{x\to 3} 2^{\frac{x^2-9}{x-3}}=\left(2^{\frac{0}{0}}\right)=\lim_{x\to 3} 2^{\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}}=2^6=64 \quad\Rightarrow\quad x=3$ NO es A.V. de $g(x)=2^{\frac{x^2-9}{x-3}}$
Logarítmicas	Posibles en los puntos donde el argumento vale 0: $\lim_{x\to 0}\ln x=(\ln 0)=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad\Rightarrow\quad x=0$ es A.V. de $f(x)=\ln x$ $\lim_{x\to 3}\ln\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=\left[\ln\left(\frac{0}{0}\right)\right]=\lim_{x\to 3}\ln\left(\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}\right)=\ln 6 \quad\Rightarrow\quad x=3$ NO es A.V. de $g(x)=\ln\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$
Trigonométricas	-El seno y el coseno NO tienen asíntotas verticales. -La tangente y la secante tienen infinitas asíntotas verticales: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$ -La cotangente y la cosecante tienen infinitas asíntotas verticales: $x=k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$
Definidas a trozos	Posibles en los puntos problemáticos de cada fórmula: $f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 2\\ x^2-3x & x>2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \text{ y } 0\le 2 \Rightarrow x=0 \text{ es una A.V. de } f(x)\\ \text{No tiene porque es un polinomio}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x<1\\ \frac{1}{x} & x\ge 1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\text{No tiene porque es un polinomio}\\ x=0 \text{ punto problemático, pero } 0\not\ge 1 \ \left[\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1\right]\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f$ *NO tiene A.V.* $h(x)=\begin{cases}-3x+2 & x<-1\\ x^2-5x & -1\le x<1\\ 2x-3 & x\ge 1\end{cases} \quad\Rightarrow$ *No tienen porque son polinomios, luego f NO tiene A.V.*

	ASÍNTOTAS HORIZONTALES: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = k}$
Polinomios	NO TIENEN porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$ siempre
Racionales	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-2}{-x^2+1} = \left(\frac{\infty}{-\infty}\right) = 0$ pq grado(n^{dor}) < grado(d^{dor}) $\Rightarrow$ $y = 0$ es A.H. de f En $-\infty$ el comportamiento es similar: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{-x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x-2}{-x^2+1}\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$ es A.H. de f $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^2-2}{2x^2+x} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \frac{-4}{2} = 2$ pq grado(n^{dor}) = grado(d^{dor}) $\Rightarrow$ $y = 2$ es A.H. de f $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^3-x}{-5x^2+7} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) = \infty$ pq grado(n^{dor}) > grado(d^{dor}) $\Rightarrow$ f NO tiene A.H.
Irracionales – Índice par	Si el radicando tiene, cuando exista el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x^2-2}{x^2+1}} = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$ es A.H. de f $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x-2}{-x+1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow f$ NO tiene A.H.
Irracionales – Índice impar	Si el radicando tiene: $f(x) = \sqrt[3]{-3x+7}$ no tiene porque el radicando no tiene y $g(x) = \sqrt[5]{\frac{2x-1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[5]{\frac{2x-1}{x}} = \sqrt[5]{2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[5]{\frac{2x-1}{x}} = \sqrt[5]{2} \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt[5]{2}$ es A.H.
Exponenciales	$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x+2}} = \left(e^{\frac{1}{\infty}}\right) = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1$ es A.H. de $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-9}{x-3}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\infty}{\infty}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-9}{x-3}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\infty}{-\infty}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty}\right] = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$ es A.H. de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-9}{x-3}}$
Logarítmicas	$\nexists \lim\limits_{x\to-\infty} Lx$ y $\lim\limits_{x\to\infty} Lx = \infty \Rightarrow f(x) = Lx$ no tiene A.H. $\lim\limits_{x\to-\infty} L\left(\frac{x-9}{x-3}\right) = L1 = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} L\left(\frac{x-9}{x-3}\right) = L1 = 0 \Rightarrow y = 0$ es A.H. de $g(x) = L\left(\frac{x-9}{x-3}\right)$
Trigonométricas	Ninguna función trigonométrica "pura" (sin componer con otra función) tiene asíntotas horizontales.
Definidas a trozos	Hay si el primer o el último trozo son fórmulas que tengan A.H.: $f(x) = \begin{cases} Lx & x \le 2 \\ x^2 - 3x & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nexists \lim\limits_{x\to-\infty} Lx \Rightarrow \textit{No hay A.H. de } f(x) \\ \textit{No tiene porque es un polinomio} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ \frac{x+1}{x} & x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0 \textit{ es A.H. de } f \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \textit{ es A.H. de } f \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} -3x+2 & x < -1 \\ x^2 - 5x & -1 \le x < 1 \\ 2x-3 & x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow$ *No tienen porque son polinomios, luego f NO tiene A.H.*

Por último veamos cómo se calcula, en dos ejemplos, una asíntota oblicua:

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad A.V. \quad x^2+1\neq 0 \ \text{ siempre} \quad \Rightarrow \quad \text{No hay}$$

$$\Rightarrow \quad A.H. \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No hay}$$

$$\Rightarrow \quad A.O. \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^3+x}=2 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^3}{x^2+1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x^2+1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=2x} \\ \left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{-x^3-x}=2 \\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^3}{x^2+1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x^2+1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=2x} \end{cases}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=x}\ A.O. \\ \text{Análogamente cuando } x\to-\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=x}\ A.O. \end{cases}$$

(D) *Ejercicio 1:* Calcula las asíntotas verticales y horizontales de las funciones siguientes.

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	ASÍNTOTAS		FUNCIÓN	ASÍNTOTAS	
	Verticales	Horizontales		Verticales	Horizontales
1 $p(x)$			2 $q(x)$		
3 $r(x)$			4 $s(x)$		
5 $f(x)$	$x=-3$	$y=2$	6 $g(x)$	$x=0$	$y=0$
7 $h(x)$	$x=1$		8 $j(x)$	$x=-2$	$y=-1$
9 $k(x)$		$y=0$	10 $l(x)$	$x=0$	$y=1$
11 $m(x)$		$y=0$	12 $n(x)$	$x=-1$; $x=1$	$y=1$
13 $a(x)$	$x=-2$		14 $b(x)$	$x=0$	
15 $c(x)$	$x=-2$		16 $d(x)$	$x=\sqrt[3]{5}$	

Ejercicio 2: Calcula las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de las funciones siguientes:

1. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$
2. $g(x)=\frac{1}{x-1}$
3. $h(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$
4. $i(x)=\frac{x^2-5x+1}{x^2-1}$
5. $j(x)=\sqrt{x^2-1}$
6. $k(x)=\frac{1}{x^2+1}$
7. $l(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
8. $m(x)=\frac{x^2}{x+1}$
9. $n(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$
10. $\tilde{n}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
11. $q(x)=\frac{3x^3}{x^2+4}$
12. $r(x)=\frac{3x^3}{x^2-4}$

3.7. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada).

2º Como ayuda para desarrollar y completar algunos apartados:

-Apuntes del profesor Jesús Escudero Martín del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca).
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/