LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. Necesidad de los números complejos

Resolución de la ecuación $x^2-6x+13=0$

Cuando resolvemos esta ecuación queda:

$$.x = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Es evidente que no hay ningún nº real para el que su cuadrado sale -1, con lo que en 1777 Leonard Euler designó a i como $\sqrt{-1}$, llamándosele unidad imaginaria, con lo que la solución de la anterior ecuación sería $3 \pm 2i$

DEF: Se llama UNIDAD IMAGINARIA a $i = \sqrt{-1}$.

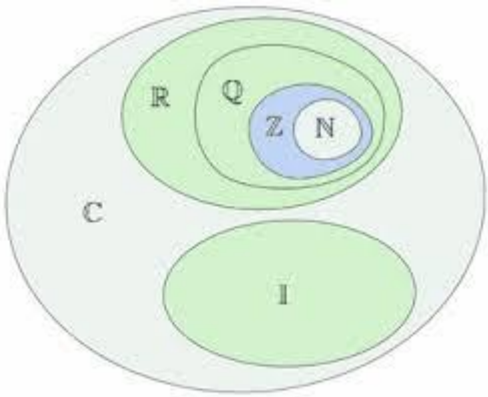
CONSECUENCIA: $i^2=-1$

2. Números complejos en forma binómica

DEF: Se llama número complejo en forma binómica, a la expresión $z=a+bi$, en donde a = Re z se llama parte real del complejo y b = Im z se llama parte imaginaria del complejo.

EJEMPLO: Si z= 3-4i, entonces Re z = 3 y Im z = -4 (OJO no -4i)

NOTA: Si b = 0 el número complejo que da reducido a z= a , que es un número real , lo que trae como consecuencia que los números reales son un subconjunto de los números complejos.



NOTA: Si a= 0, el número complejo que da reducido a z= bi , que se llama número imaginario puro.

NOTA: Dos números complejos sólo son iguales si coinciden su parte real y su parte imaginaria.

CONSECUENCIA: Si a+bi = 3- 4i, entonces obligatoriamente a tiene que ser 3 y b, 4.

DEF: Se llama complejo conjugado de z a $\bar{z}$ y es aquel que tiene la misma parte real que z pero parte imaginaria opuesta.

Ejemplo : Si z= 3-4i $\rightarrow \bar{z}$=3+4i

3. Operaciones con números complejos en forma binómica

- SUMA/RESTA: Se realiza sumando las partes reales y las partes imaginarias.
  - (3-5i)+(2+7i) =5+2i
- PRODUCTO : Se aplica la propiedad distributiva y se tiene en cuenta que : $i^2=-1$
  - (3-5i)(2+7i) =6+21i-10i -35i^2=[como $i^2=-1$] = 41+11i
- COCIENTE : Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador y se vuelve a aplicar que $i^2=-1$

- $\frac{1+2i}{3-i}=\frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+6i+i+2i^2}{9-i^2}$ =[como $i^2=-1$]= $\frac{1+7i}{10}=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$

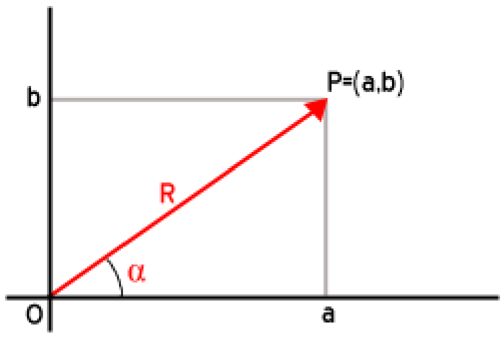
- POTENCIAS DEL Nº i : Las potencias del nº i se repiten cada cuatro ya que : $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^2\, i = -i$, $i^4=i^2\, i^2=(-1)(-1) = 1$, con lo que $i^5=i^4\, i = i$, con lo que el proceso vuelve a empezar . Para hallar una potencia del nº i hay, por tanto, que dividir el exponente entre cuatro sustituyéndolo por el resto de la división.
  - i^{123} = [123÷4↦resto =3] = $i^3=-i$

- POTENCIAS DE NÚMEROS COMPLEJOS: Se desarrolla el binomio mediante el binomio de Newton y se aplican las potencias del nº i.
  - $(2+3i)^3=2^3+3\ 2^2\ 3i+3\cdot2\cdot(3i)^2+(3i)^3= 8+36i+6\cdot9i^2+27i^3 = 8+36i-54-27i=-46+9i$

4. Representación de un nº complejo

DEF: Se llama AFIJO al punto que representa al nº complejo .

Para obtenerlo, basta representar la parte real en el eje OX y la parte en el eje OY



DEF: Se llama MÓDULO de un nº complejo a la distancia del afijo al origen.

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$=\sqrt{(Re\ z)^2+(Im\ z)^2}$$

DEF: Se llama ARGUMENTO de un nº complejo al ángulo que forma el segmento OP con la parte positiva del eje OX medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{Im\ z}{Re\ z}$$

NOTA : Se deduce del dibujo que :

- $a = Rez = r \cos \alpha$
- $b = Im\ z = r\ sen\ \alpha$

NOTA : A la hora de calcular el ángulo con el arco tangente , hay que tener en cuenta el cuadrante en el que está el afijo.

DEF : Se llama nº complejo en FORMA POLAR a $z=r_\alpha$ siendo el r el módulo de z y α el argumento .

EJEMPLO : (PASO DE BINÓMICA A POLAR)

$z=4+4\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{(Re\ z)^2+(Im\ z)^2} = \sqrt{(4)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$tg\ \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \rightarrow\rightarrow\ \alpha = arc\ tg\ \sqrt{3} = 60º$

En forma polar $z=4_{60}$

EJEMPLO : (PASO DE BINÓMICA A POLAR)

$z= 3_{30º} \rightarrow z=3 \cos 30º+3\ sen\ 30º\ i = \sqrt{3} + \frac{3}{2} i$

5. Operaciones con números complejos en forma polar

- PRODUCTO: $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$
  - $2_{30} \cdot 4_{150} = 8_{180} = 8cos180º + 8\,sen180i = -8$
- COCIENTE: $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$
  - $\frac{6_{90}}{2_{45}} = 3_{45} = 3cos45 + 3sen45i = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$
- POTENCIA: $(r_\propto)^n = (r^n)_{n\propto}$
  - $(5_{150})^3 = (5^3)_{450} = 125_{90} = 125cos90 + 125sen90i = 125i$

- RAÍCES: $\sqrt[n]{r_\propto} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\propto+360k}{n}}\ siendo\ k = 0, \dots, (n-1)$
  - $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{180+360k}{3}} = 1_{60+120k}$, con k =0,1,2, es decir , $z_1 = 1_{60}$, $z_2 = 1_{180}$, $z_3 = 1_{300}$.

Con esto, podemos entender el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA , que dice que toda ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces , ya sean reales o complejas.

EJERCICIOS

1) Resolver en C la ecuación $z^2 + 6z + 25 = 0$.
2) Realizar las siguientes operaciones en forma binómica
   a. $\frac{(1+i)^2}{4+i}$
   b. $\frac{2+i}{(1+i)^2}$
   c. $(i^5 + i^{-12})^3$

3) CALCULAR RAZONADAMENTE: $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots\ldots\ldots + i^{4000}$.

4) Determina a para que el producto $(-2+4i)(3+ai)$ sea un nº imaginario puro.

5) Hallar x para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un nº imaginario puro.

6) Determinar un nº complejo que coincida con su conjugado.

7) Comprobar que los complejos 2+3i y2-3i verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$.

8) Buscar el valor (o valores de a) en $\frac{(a-1)+3i}{2+(a-1)i}$ para que dicho cociente tenga como parte real 1.

9) Calcula x para que el módulo del cociente $\frac{1+3i}{1+xi}$ sea $\sqrt{5}$.

10) Dado el nº complejo $2 - 2\sqrt{3}\, i$.,calcular :

   a. Su cuarta potencia.
   b. Sus raíces cuartas.

11) Hallar la potencia $(-1+i)^{30}$ y dar el resultado en forma binómica.

12) Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $(1+i)z^4 +16+16i=0$ y dejar los resultados en forma polar.

13) Calcular el valor de **a** para que el siguiente producto de complejos sea un nº imaginario puro. $(\mathbf{a}_0 + \mathbf{2}_{90})(\mathbf{4}_{270} + \mathbf{3}_{180})$

14) El producto de un nº complejo de módulo 5 por otro de argumento 60º nos da como resultado el nº complejo $-6 +6\sqrt{3}i$. Hallar el argumento del 1º y el módulo del 2º.

15) Hallar el mínimo valor de $n \in N$ para el cual Z^n sale un nº real positivo siendo $Z=(1+i)(-2+2i)(1+\sqrt{3}i)$

16) Calcular las soluciones reales y complejas (en forma binómica) de la siguiente ecuación $Z^3 +8i= 0$

17) Resolver: $z^6 +64i = 0$ y obtener sus soluciones reales y complejas dejándolas en forma polar.

18) Los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero cuyo incentro es el origen de coordenadas. Sabiendo que z_1 es $1+i$, calcular z_2 y z_3.

19) Se considera el complejo $z =1+\sqrt{3}i$, se efectúa un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 30º .Hallar el complejo z' transformado de z en el citado giro.