# PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

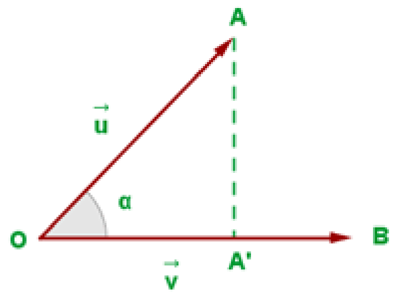
El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman** si los vectores son no nulos y **cero** si uno de los dos vectores es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ son no nulos} \quad ; \quad \alpha = \widehat{\vec{u}\,\vec{v}} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$$

- Como $|\vec{u}|, |\vec{v}|\ y \cos(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}})$ son números reales el producto escalar de dos vectores es un número real que puede ser positivo, negativo o nulo.
- El **producto escalar** es **nulo** en el caso de que los vectores sean **perpendiculares** u **ortogonales** ya que entonces $\cos(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}) = \cos 90° = 0$

## Interpretación geométrica del producto escalar

> El valor absoluto del producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.




En la figura se representan dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$. Al proyectar el vector $\vec{u}$ sobre la dirección del vector $\vec{v}$, se obtiene el vector $\overrightarrow{OA'}$ cuyo módulo coincide con la medida del segmento $\underline{OA'}$.

Se cumple:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA'}}{|\vec{u}|} \qquad \overline{OA'} = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

Teniendo en cuenta:

$$\overline{OA'} = |\text{proy de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}| = |\vec{u}_{\vec{v}}|$$

Entonces $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\,cos\alpha = |\vec{v}||proy\ de\ \vec{u}\ sobre\ \vec{v}| = |\vec{v}|\,.\,|\vec{u}_{\vec{v}}|$

$$|proy\ de\ \vec{u}\ sobre\ \vec{v}| = |\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{|\vec{u}\,.\,\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

### Ejemplo

Hallar la proyección del vector $\vec{u}$ = (2, 1) sobre el vector $\vec{v}$ = (−3, 4).

$$P(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|2\cdot(-3)+1\cdot 4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \left|-\frac{2}{5}\right|$$

## Propiedades del producto escalar

**1 Conmutativa**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

**2 Homogénea**

$$k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}$$

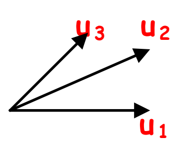
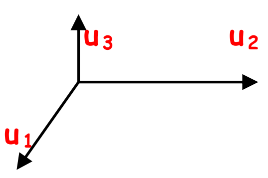
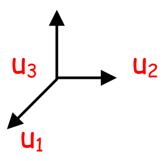
**3 Distributiva del producto escalar respecto de la suma en $V^3$**

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

**4 El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.**

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} > 0$$

## Algunas bases especiales

| Base normada | Base ortogonal | Base ortonormal |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Vectores unitarios<br>$\lvert\vec{u_1}\rvert = \lvert\vec{u_2}\rvert = \lvert\vec{u_3}\rvert = 1$ | Vectores ortogonales<br>$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \vec{u}_1.\vec{u}_3 = \vec{u}_2.\vec{u}_3 = 0$ | Vectores unitarios<br>y ortogonales $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ |

# Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base cualquiera del espacio $V^3$ y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera. Como cada vector se descompone de modo único en función de los vectores de la base, se tiene:

$$\vec{u} = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 + z\,\vec{u}_3 \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = x'\,\vec{u}_1 + y'\,\vec{u}_2 + z'\,\vec{u}_3$$

Aplicando las propiedades del producto escalar, resulta:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 + z\,\vec{u}_3)(x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3) =$$

$$= x\,x'\,(\vec{u}_1\,.\,\vec{u}_1) + x\,y'\,(\vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2) + x\,z'\,(\vec{u}_1\,.\,\vec{u}_3) + y\,x'(\vec{u}_2\,.\,\vec{u}_1) + y\,y'(\vec{u}_2\,.\,\vec{u}_2) +$$

$$+ y\,z'\,(\vec{u}_2\,.\,\vec{u}_3) + z\,x'(\vec{u}_3\,.\,\vec{u}_1) + z\,y'(\vec{u}_3\,.\,\vec{u}_2) + z\,z'(\vec{u}_3\,.\,\vec{u}_3)$$

Esta expresión se simplifica en el caso de que la base sea de ciertos tipos:

- Si la base **B** es **normada** (vectores unitarios)

$$\begin{cases} \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_1 = |\vec{u}_1|.|\vec{u}_1|\cos 0 = \mathbf{1} = \vec{u}_2.\vec{u}_2 = \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_3 \quad \text{ya que } \cos 0 = 1 \\ \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2 = \vec{u}_2.\vec{u}_1;\ \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_3 = \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_1;\ \vec{u}_2.\vec{u}_3 = \vec{u}_3.\vec{u}_2 \quad \text{ya que } \cos 90 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z' + (x\,y' + yx')(\vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2) + (x\,z' + z\,x')\,(\vec{u}_1\,.\,\vec{u}_3) +$$
$$+ (y\,z' + z\,y')\,(\vec{u}_2\,.\,\vec{u}_3)$$

- Si la base **B** es **ortogonal** (vectores perpendiculares)

$$\begin{cases} \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_1 = |\vec{u}_1|.|\vec{u}_1|\cos 0 = |\vec{u}_1|^2;\ \vec{u}_2.\vec{u}_2 = |\vec{u}_2|^2;\ \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_3 = |\vec{u}_3|^2 \quad ;\ \cos 0 = 1 \\ \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2 = |\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|\cos 90 = \mathbf{0} = \vec{u}_2.\vec{u}_1 = \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_3 = \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_1 = \vec{u}_2.\vec{u}_3 = \vec{u}_3.\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x'\,|\vec{u}_1|^2 + y\,y'\,|\vec{u}_2|^2 + z\,z'\,|\vec{u}_3|^2$$

- Si la base **B** es **ortonormal** (vectores unitarios y perpendiculares)

$$\begin{cases} \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_1 = |\vec{u}_1|.|\vec{u}_1|\cos 0 = \mathbf{1} = \vec{u}_2.\vec{u}_2 = \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_3 \\ \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2 = |\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|\cos 90 = \mathbf{0} = \vec{u}_2.\vec{u}_1 = \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_3 = \vec{u}_3\,.\,\vec{u}_1 = \vec{u}_2.\vec{u}_3 = \vec{u}_3.\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

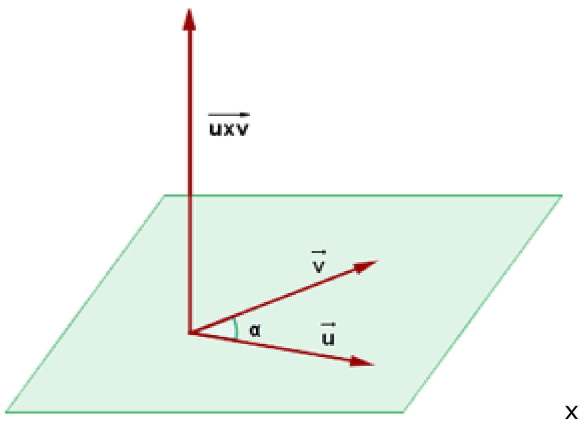
# PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** que se designa por $\vec{u} \times \vec{v}$ o $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y que se obtiene del siguiente modo:

1º Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores **no nulos** y **no proporcionales** $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector de:

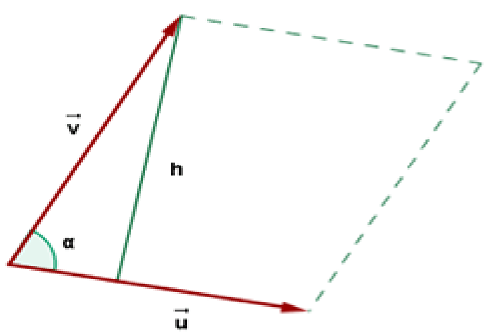
- **Módulo** es igual a: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \, sen\, \alpha$
- **Dirección** es **perpendicular** a los dos vectores
- **Sentido** igual al avance de un **sacacorchos** al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

2º Si $\vec{u} = 0$ ó $\vec{v} = 0$ ó $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales se tiene que $\vec{u} \times \vec{v} = \mathbf{0}$




## Interpretación geométrica del producto vectorial

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.




$$\text{sen} \propto = \frac{h}{|\vec{v}|} \rightarrow h = |\vec{v}|.\,\text{sen}\,\alpha$$

El área del paralelogramo es el producto de la base por la altura

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}||\vec{v}| \,\text{sen}\,\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

## Propiedades del producto vectorial

**1. Anticonmutativa**

$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

**2. Homogénea**

$(k\,\vec{u}) \times \vec{v} = k\,(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$

**3. Distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores**

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

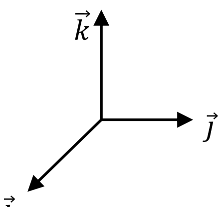
**4. El producto vectorial de dos vectores paralelos en igual al vector nulo.**

$\vec{u} \parallel \vec{v} \rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}$

**5. El producto vectorial $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.**

## Expresión analítica del producto vectorial

Sea $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de $V^3$.




$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$

Aplicando la definición de producto vectorial

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}\,; \quad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}\,; \quad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}\,; \quad \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}\,; \quad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$$

Siendo nulos todos los productos de un vector consigo mismo

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera

$$\vec{u} = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 + z\,\vec{u}_3 \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = x'\,\vec{u}_1 + y'\,\vec{u}_2 + z'\,\vec{u}_3$$

Su producto vectorial será:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) \times \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) =$$

$$= x\,x'\,(\vec{i} \times \vec{i}) + x\,y'\,(\vec{i} \times \vec{j}) + x\,z'\,\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + y\,x'(\vec{j} \times \vec{i}\,) + y\,y'(\vec{j} \times \vec{j}) +$$

$$+ y\,z'\,\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) + z\,x'\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) + z\,y'\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + z\,z'(\vec{k} \times \vec{k})$$

Y sustituyendo los productos entre los vectores de la base se llega a:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Esta expresión se puede escribir como el siguiente determinante de orden 3

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

**Ejemplos**

1.- Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y $\vec{v}$ = (−1, 1, 2).

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} + 5\vec{j} - \overrightarrow{3k}$$

2.-Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el **producto vectorial** de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es **ortogonal** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \qquad (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6+2+4 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \qquad (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2-2+4 = 0$$

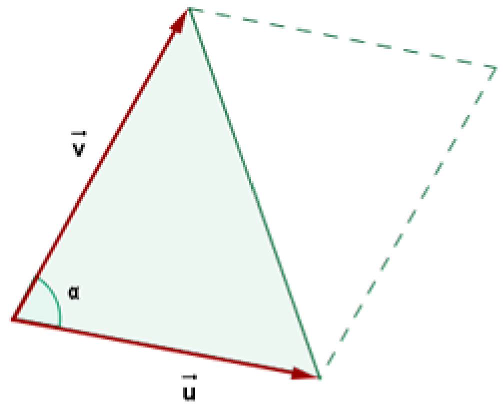
El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

3.-Dados los vectores $\vec{u} = (3,1,-1)$ y $\vec{v} = (2,3,4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\,u^2$$

### Área de un triángulo




$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

### Ejemplo

4.-Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-4, 2, -2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

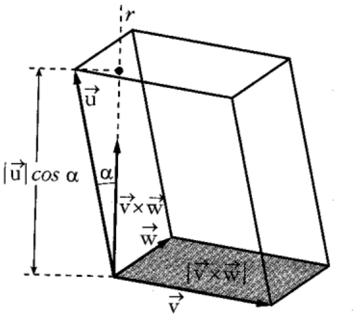
$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

# PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

El **producto mixto** de tres vectores libres del espacio $V^3$, $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ es un número real que se designa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ y que se obtiene del siguiente modo:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

## Interpretación geométrica del producto mixto




Consideremos los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura:

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})| = |\vec{u}|\,|\vec{v}\times\vec{w}||\cos\alpha|$$

Como $|\vec{u}||\cos\alpha| = h$ es la altura del paralelepípedo construido sobre los tres vectores y como $|\vec{v}\times\vec{w}|$ es el área de la base resulta:

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ = Área de la base . h = V

El **valor absoluto del producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

## Expresión analítica del producto mixto

Sea $B=\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ una base ortonormal de $V^3$, $\vec{u}=(x,y,z)$, $\vec{v}=(x',y',z')$ y $\vec{w}=(x'',y'',z'')$ tres vectores libres del espacio: aplicando las expresiones analíticas del producto vectorial y del producto escalar, se obtienen las del producto mixto:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\,.(\vec{v}\times\vec{w}) = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}).\left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}\vec{\imath}+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\vec{k}\right) =$$

$$= x\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

# Propiedades del producto mixto

Las propiedades del producto mixto se deducen de las propiedades de los determinantes

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si y solo si, $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son **linealmente dependientes**

4. $[a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

5. $[\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}]$

## Ejemplos

**1**.- Calcular el **producto mixto** de los vectores:

$\vec{u} = (2, -1, 3) \quad \vec{v} = (0, 2, -5) \quad \vec{w} = (1, -1, -2)$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2, -1, 3) \cdot (-9, -5, -2) = -18 + 5 - 6 = -19$$

**2**.- Halla el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

$$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

## Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

3.- Obtener el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} u^3$$