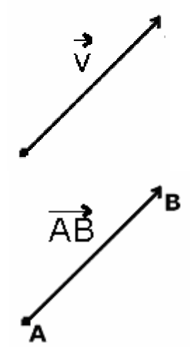
TEMA 8.- GEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS AFINES Y MÉTRICOS

1.- VECTORES EN EL PLANO. OPERACIONES.

Concepto de vector

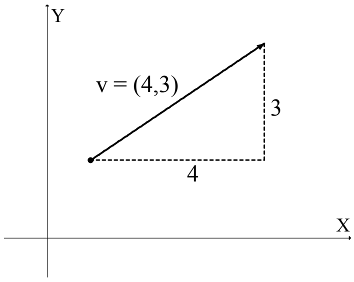
Un vector es un segmento con un origen y un extremo.

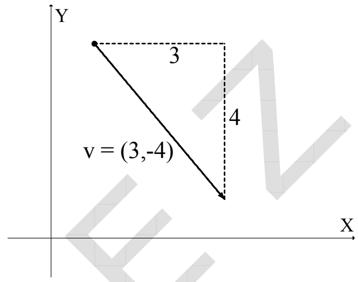


Componentes de un vector

Cualquier vector $\vec{v}$ tiene dos componentes (v_1 , v_2)

Ejemplos:





Módulo de un vector

Dado un vector $\vec{v} = (v_1 , v_2)$, el módulo del vector se representa por $|\vec{v}|$ y, aplicando el teorema de Pitágoras, podemos deducir que

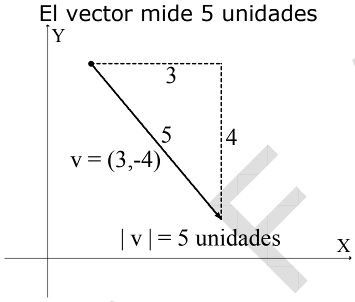
$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

El módulo de un vector nos indica lo que mide dicho vector, es decir, la distancia del origen al extremo

Ejemplo: Si $\vec{v} = (3,-4)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

El vector mide 5 unidades



Los vectores que miden 1 se llaman unitarios

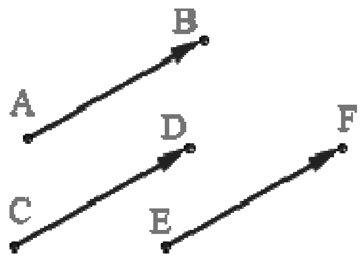
Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes o iguales cuando tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.

Si $\vec{u} = (u_1 , u_2)$ y $\vec{v} = (v_1 , v_2)$

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \leftrightarrow \quad (u_1 , u_2) = (v_1 , v_2) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

Los vectores dibujados son equipolentes, pues tienen el mismo módulo, dirección y sentido



Vector nulo

Es el vector $\vec{0} = (0 , 0)$. El vector nulo tiene módulo 0 y el origen coincide con el extremo.

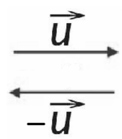
Por tanto, el vector nulo está formado por un solo punto

Vector opuesto

Dado un vector $\vec{u} = (u_1 , u_2)$, su vector opuesto es $\boxed{-\vec{u} = (- u_1 , - u_2)}$

Ejemplo: El opuesto de (3,-5) es (-3,5)

Interpretación geométrica del opuesto



Operaciones con vectores

Suma de vectores

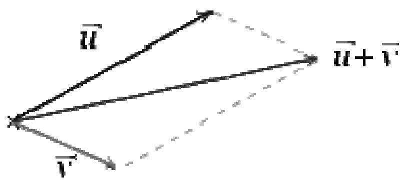
Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\boxed{\overrightarrow{u+v} = (u_1 + v_1\ ,\ u_2 + v_2)}$$

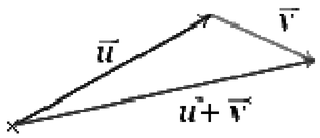
Ejemplo: (2,7) + (3,4) = (2+3 , 7+4) = (5,11)

<u>Cálculo gráfico de la suma de vectores</u>

Fíjate que se puede hacer de dos formas



Método del paralelogramo



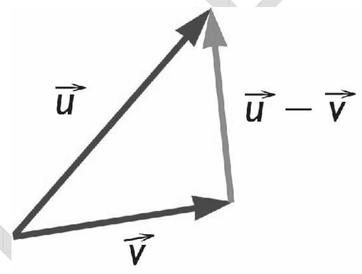
Resta de vectores

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\boxed{\overrightarrow{u-v} = (u_1 - v_1\ ,\ u_2 - v_2)}$$

<u>Ejemplo</u>: (3,8) - (7,2) = (3 - 7 , 8 - 2) = (-4,6)

<u>Cálculo gráfico de la resta de vectores</u>



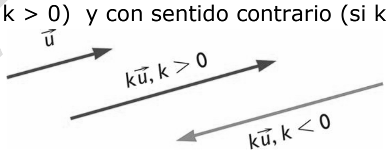
Producto de un escalar por un vector

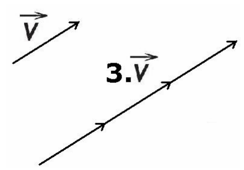
Si $k \in R$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ $\boxed{\overrightarrow{k.v} = (k.\,v_1\ ,\ k.\,v_2)}$

Ejemplos: 3.(2,5) = (6,15) -2.(1,-7) = (-2,14)

<u>Interpretación geométrica</u>:

$\overrightarrow{k.v}$ // $\vec{v}$ con el mismo sentido que $\vec{v}$ (si k > 0) y con sentido contrario (si k < 0)





Vectores paralelos

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son vectores no nulos

$$\vec{u} \ // \ \vec{v} \ \leftrightarrow \ \vec{u} = k\,\vec{v}\text{ , con } k \in R \ \leftrightarrow \begin{cases} u_1 = k\,v_1 \\ u_2 = k\,v_2 \end{cases} \leftrightarrow \ \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}\ .$$

Es decir, $\vec{u}$ // $\vec{v}$ cuando sus componentes son proporcionales

Base de vectores en el plano

Una base de vectores en el plano es un conjunto formado por dos vectores no nulos y no paralelos. B = { $\vec{u}$, $\vec{v}$ }

Cualquier vector del plano, $\vec{w}$, se puede expresar en función de los vectores de la base de la forma:

$$\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}\ .$$

En este caso, $\vec{w}$ = (x,y) en la base B

(x,y) son las componentes del vector $\vec{w}$ en la base B.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, se dice que la base B es ortogonal.

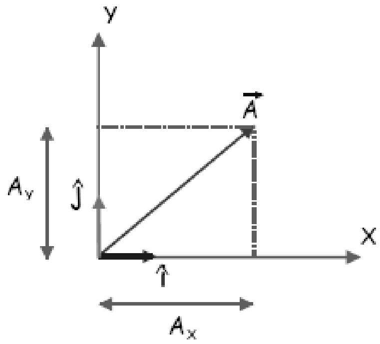
Si además son unitarios la base B se llama base ortonormal.

Los vectores $\vec{i}$ = (1,0) , $\vec{j}$ = (0,1) son vectores perpendiculares y unitarios, luego B = { $\vec{i}$, $\vec{j}$ } es una base ortonormal del plano.

Esta es la base canónica del plano.

Cualquier vector se puede expresar en función de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ de la forma:

$\vec{A} = (A_x , A_y) = A_x.(1,0) + A_y.(0,1) \rightarrow \vec{A} = A_x.\ \vec{i} + A_y.\ \vec{j}$



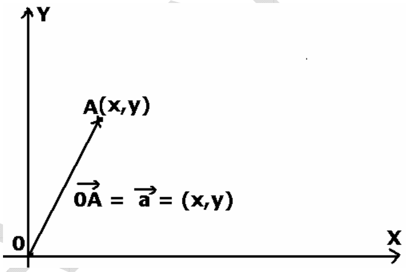
Ejemplos:

$\vec{u} = (3 , 7) = 3.\ \vec{i} + 7.\ \vec{j}$,

$\vec{v} = (0 , -5) = 0.\ \vec{i} + (-5).\ \vec{j} = -5\ \vec{j}$

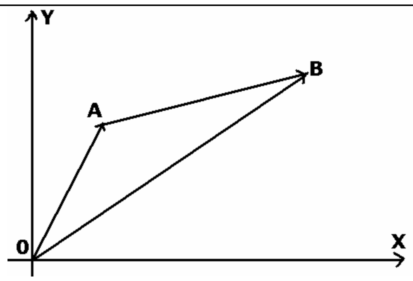
Vector de posición de un punto

Cualquier punto del plano A(x,y) lleva asociado el vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, llamado vector de posición del punto A .



Observa que $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ = (x,y) .Es decir, las componentes del vector de posición coinciden con las coordenadas del punto A

Vector determinado por dos puntos

Fórmula para el vector $\overrightarrow{AB}$	Demostración
Dados dos puntos $A(a_1 , a_2)$, $B(b_1 , b_2)$, entonces $\boxed{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2)}$	 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 , b_2) - (a_1 , a_2) = (b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2)$

Observa que la distancia entre los puntos A y B es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

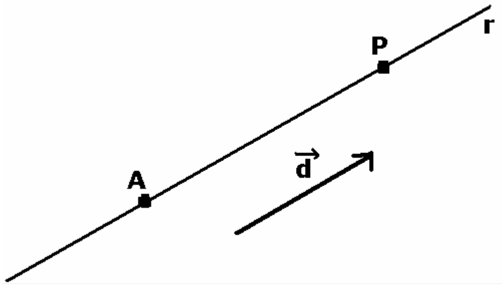
Ejemplo: Si A(3,4) , B(-1,7) , entonces $\overrightarrow{AB}$ = (-1-3 , 7-4) = (-4,3); d(A,B) = | $\overrightarrow{AB}$ | = $\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Ejercicios del libro: Pág 183 : 11, 12 y 16   Pág. 189: 2   Pág.209: 51

2.- ECUACIONES DE LA RECTA.

Sea r una recta en el plano, $A(a_1,a_2)$ un punto de la recta conocido y $\vec{d} = (d_1,d_2)$ cualquier vector no nulo paralelo a la recta.

El vector $\vec{d}$ se llama **vector director** de la recta. La recta que pasa por el punto A y tiene vector de dirección $\vec{d}$ se suele representar por: $r(A, \vec{d})$



Podemos obtener las siguientes ecuaciones de la recta:

Tipos de ecuaciones	Demostración
Ecuación vectorial: $\boxed{(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(d_1,d_2)}$	Si P(x,y) es un punto (variable) de la recta, entonces $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{d}$ Luego $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{d} \rightarrow \vec{p} - \vec{a} = \lambda \vec{d} \rightarrow \vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{d} \rightarrow (x,y) = (a_1,a_2) + \lambda(d_1,d_2)$
Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \end{cases}}$	Igualando componentes en la ecuación anterior se obtiene: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \end{cases}$
Ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2}}$	Despejando λ e igualando obtenemos: $\dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2}$
Ecuación implícita o general: $\boxed{ax + by + c = 0}$ Un vector director de la recta es $\vec{d} = (-b,a)$	Quitando denominadores nos queda: $d_2(x - a_1) = d_1(y - a_2)$ $\rightarrow d_2x - d_1y + d_1a_2 - d_2a_1 = 0$ Le llamamos $a = d_2$, $b = -d_1$, $c = d_1a_2 - d_2a_1$; $ax + by + c = 0$
Ecuación canónica o segmentaria: $\boxed{\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1}$ p, q corresponden a los puntos de corte de la recta con los ejes X e Y, respectivamente	Si a, b, c son no nulos, la ecuación anterior podemos transformarla: $ax + by = -c \rightarrow \dfrac{ax}{-c} + \dfrac{by}{-c} = 1 \rightarrow$ $\dfrac{x}{-c/a} + \dfrac{y}{-c/b} = 1$ Llamamos $p = -c/a$, $q = -c/b$, nos queda: $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$
Ecuación punto-pendiente: $\boxed{y - a_2 = m(x - a_1)}$ $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ es la pendiente de la recta Un vector director es $\vec{d} = (1,m)$	Si en la ecuación continua de la recta $d_1 \neq 0$, podemos despejar $y - a_2 = \dfrac{d_2}{d_1}(x - a_1)$; llamamos $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ Nos queda la ecuación $y - a_2 = m(x - a_1)$ $\vec{d} = (d_1,d_2) \parallel (1, \dfrac{d_2}{d_1}) = (1,m)$
Ecuación explícita: $\boxed{y = mx + n}$ $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ es la pendiente de la recta Un vector director es $\vec{d} = (1,m)$	Si en la ecuación anterior efectuamos el paréntesis y despejamos la y: $y = mx - ma_1 + a_2$ Llamamos $n = -ma_1 + a_2$; $y = mx + n$ $\vec{d} = (d_1,d_2) \parallel (1, \dfrac{d_2}{d_1}) = (1,m)$

Punto medio de un segmento

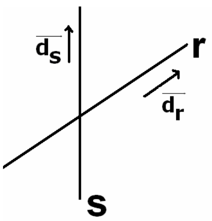
Fórmula para el punto medio	Demostración
 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ $\rightarrow$ $\boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)}$ Observa que B es el simétrico de A respecto de M	$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM} \rightarrow \vec{b} - \vec{a} = 2(\vec{m} - \vec{a}) = 2\vec{m} - 2\vec{a} \rightarrow$ $2\vec{m} = \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \rightarrow \vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ Luego $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Ejercicios del libro: Pág. 190: 4 a) b) Pág 193 : 1a), 2 Pág. 206: 7b) y 14 Pág. 209: 52

3.- POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS.

Sean r y s dos rectas del plano: $r(A\,;\,\overrightarrow{d_r})$, $s(B\,;\,\overrightarrow{d_s})$

Rectas secantes

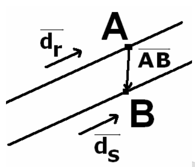


Se cumple: 1) $\overrightarrow{d_r} \;\#\; \overrightarrow{d_s}$ 2) $m_r \neq m_s$ 3) Si $\begin{cases} r: ax+by+c=0 \\ s: a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de las rectas es compatible determinado (tiene solución única).

El punto de corte de las rectas se calcula resolviendo el sistema

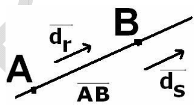
Rectas paralelas



Se cumple: 1) $\overrightarrow{d_r} \;//\; \overrightarrow{d_s} \;\#\; \overrightarrow{AB}$ 2) Si $\begin{cases} r: ax+by+c=0 \\ s: a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de las rectas es incompatible (no tiene solución)

Rectas coincidentes



Se cumple: 1) $\overrightarrow{d_r} \;//\; \overrightarrow{d_s} \;//\; \overrightarrow{AB}$ 2) Si $\begin{cases} r: ax+by+c=0 \\ s: a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de las rectas es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Ejercicios del libro: Pág 199 : 1 Pág. 207: 26, 27 y 28

4.- PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Definición: Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, se define su producto escalar de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)}$$, donde $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ el ángulo que va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$

Propiedades más importantes del producto escalar:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (Propiedad conmutativa)

2) $(a\,\vec{u})\cdot(b\,\vec{v}) = (ab)(\vec{u}\cdot\vec{v})$, donde $a, b \in R$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ (Propiedad distributiva)

4) Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2}$

5) $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Ejercicios del libro: Pág 176 : 1, 2 y 3 Pág. 178: 4 a) b)

5.- ÁNGULOS EN EL PLANO

Ángulo entre dos vectores: $\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)}$ (α es el ángulo cuyo coseno es $\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$).

Si N es un número, para calcular arccos N con la calculadora pulsamos SHIT cos N

Ángulo entre dos rectas: Es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores.

Se calcula con la fórmula: $\boxed{\left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\left(\frac{|\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}|}{|\vec{d_r}|\cdot|\vec{d_s}|}\right)}$.

Si r // s ó r y s son coincidentes, entonces el ángulo es 0º

Si se conocen las pendientes de las rectas r y s , m_r y m_s , el ángulo que forman r y s también se puede calcular por la fórmula:

$$\boxed{\left(\widehat{r,s}\right) = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r\cdot m_s}\right|\right)}$$

Ejercicios del libro: Pág 208 : 30, 31 y 32 Pág. 209: 65

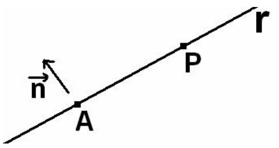
6.- PERPENDICULARIDAD DE VECTORES Y RECTAS

Vectores perpendiculares: Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ no nulos: $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Observa que un vector perpendicular a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es $\vec{u}\,' = (-u_2, u_1)$, pues $\vec{u} \cdot \vec{u}\,' = -u_1u_2 + u_1u_2 = 0$

Rectas perpendiculares: Dadas dos rectas del plano, r y s: $r \perp s \leftrightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 0 \leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Ecuación normal de la recta



$A(a_1, a_2)$ un punto de la recta

$\vec{n} = (a, b)$ vector normal de la recta.

$\boxed{\text{Ecuación normal de r: } a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0}$

Observa que si nos dan la recta r en forma implícita r: $ax + by + c = 0$, entonces $\vec{d} = (-b, a)$ es un vector director de la recta y, por tanto, $\vec{n} = (a, b)$ es un vector normal de la recta.

Demostración

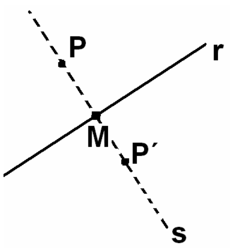
Si P(x,y) es un punto (variable) de la recta, entonces:

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$, luego $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$(a, b) \cdot (x - a_1, y - a_2) = 0$

$a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0$

Simétrico de un punto respecto de una recta



El punto simétrico de P respecto de r es el punto P´ que cumple $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$ (M es el punto medio de PP´)

Para calcular el punto simétrico P´:

1º) Hallamos la ecuación de la recta s (s es la recta perpendicular a r que pasa por el punto P)

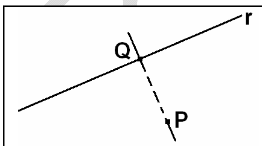
2º) Calculamos el punto de corte, M, de las rectas r y s (resolviendo el sistema con las ecuaciones de r y s)

3º) Usando que M es el punto medio de P y P´, podemos hallar P´

Ejercicios del libro: Pág 193 : 3 Pág. 197: 3 y 4 Pág. 207: 19 y 20 Pág. 209: 48 Pág. 210: 71 y 74

7.- DISTANCIAS EN EL PLANO

Distancia de un punto a una recta



$d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

Fórmula para la distancia de un punto a una recta

Si $P(x_0, y_0)$, r: $ax + by + c = 0 \rightarrow \boxed{d(P, r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

Observación: Si $P \in r$, entonces $d(P,r) = 0$

Distancia entre dos rectas

- Si r y s son secantes o coincidentes, entonces la distancia es 0

- Si son paralelas, se toma un punto de una de las rectas y se calcula su distancia a la otra recta

Ejercicios del libro: Pág 208 : 35 a) , 37, 38, 39, 42, 43 y 44 Pág. 209: 55 y 57