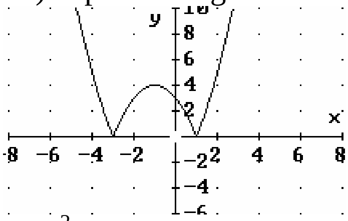
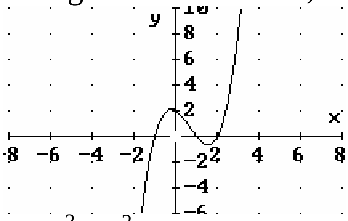
RELACIÓN DE PROBLEMAS

1) Encontrar los extremos absolutos de $y=2x^2-6x+4$ definida en [0, 3]. *Sol. Máx 4 en $x=0$ y $x=3$; mín -1/2 en $x=1,5$.*
2) Hallar dos números positivos cuya suma sea 40, sabiendo que su producto es máximo. *Sol.: 20 y 20*
3) Hallar dos números positivos cuya suma sea 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo. *Sol.: 12 y 6*
4) Hallar dos números positivos cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno por el cubo del otro sea máximo. *Sol.: 18 y 6*
5) ¿Cuál es el número positivo que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? *Sol.: 5*
6) Encontrar un número tan que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. *Sol: 0,5*
7) Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3.600 m^2 de superficie. Calcular las dimensiones para que el coste sea mínimo. *Sol.: 60m x 60m*
8) Una persona desea construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Para ello dispone de 1.000 m de tela metálica. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el terreno vallado sea lo mayor posible? *Sol.: 250x500*
9) Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 800 ptas/m y la de los otros 100 ptas/m, hallar el área del mayor campo que puede cercarse con 288.000 pesetas. *Sol.: 115.200 m^2*
10) ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de área máxima de entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa? *Sol:* $\sqrt{50}\ x\ \sqrt{50}$
11) De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro, hallar las dimensiones de los lados del que tenga área máxima. *Sol.: 4, 4 y 4 cm*
12) Dividir un segmento de 60 centímetros en dos partes, con la condición de que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima. *Sol: 30+30*
13) Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener dos centímetros cada uno y los laterales, un centímetro. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. *Sol: 10x5*
14) Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima. *Sol:* $r=\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}},\ h=\frac{40}{\sqrt[3]{100\pi}}$
15) Hallar los puntos de la curva $y^2=4x$ cuya distancia al punto (4,0) es mínima. *Sol:* $(2, \sqrt{8})$ y $(2, -\sqrt{8})$
16) La función $f(x)=x^3+px^2+q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en $x=2$. Hallar p y q. *Sol.:* $p=-3$, $q=7$
17) Hallar a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo en el punto $M(0,4)$ y un mínimo en $M'(2,0)$ *Sol.:* $a=1$, $b=-3$, $c=0$, $d=4$
18) Hallar el valor de a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto de inflexión en $P(-2,6)$ con tangente en él paralela a la recta $8x+y+10=0$, y tome, además, el valor -2 para $x=0$. *Sol.:* $a=1$, $b=6$, $c=4$, $d=-2$
19) Hallar a, b, c y d en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que dicha función pase por el punto $P(-1,1)$ y tenga un punto de inflexión con tangente horizontal en $Q(0,-2)$. *Sol.:* $a=-3$, $b=0$, $c=0$, $d=-2$

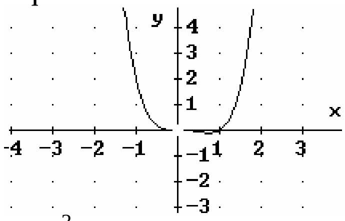
20) Representar gráficamente las siguientes funciones, de las que se da la solución:



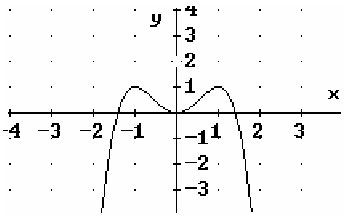
$y=|x^2+2x-3|$



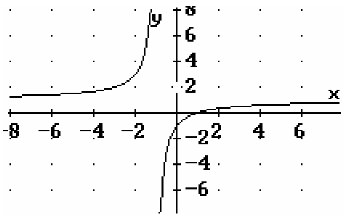
$y=x^3-2x^2-x+2$



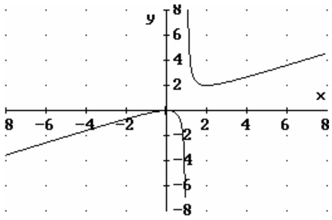
$y=x^3(x-1)$



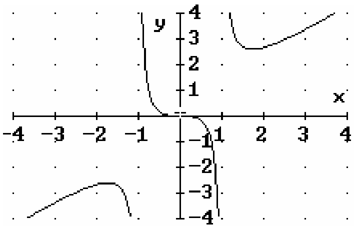
$y=-x^4+2x^2$



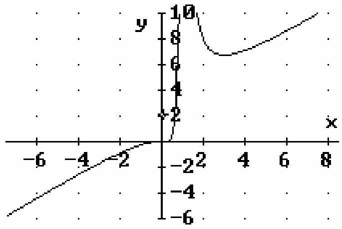
$y=\dfrac{x-1}{x+1}$



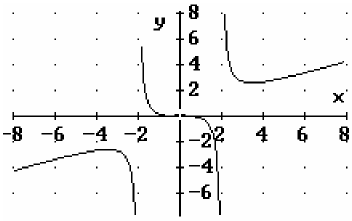
$y=\dfrac{x^2}{2x-2}$



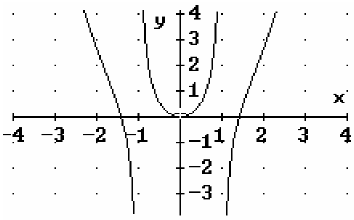
$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$



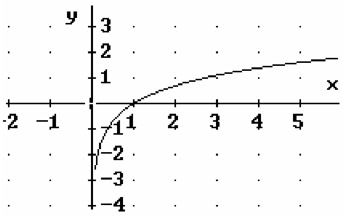
$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$



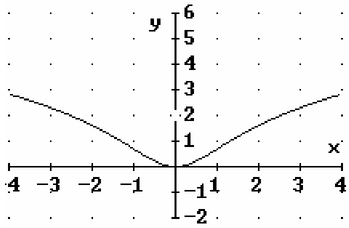
$y=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$



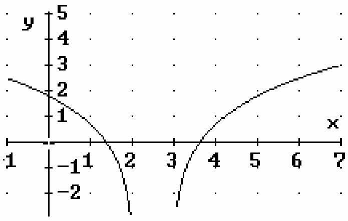
$y=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}$



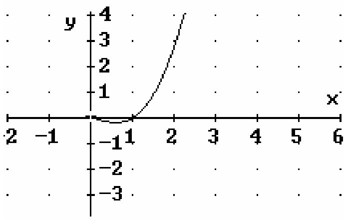
$y=\ln x$



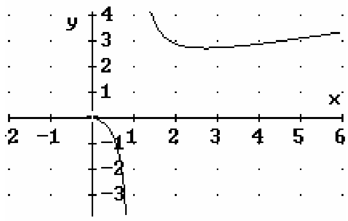
$y=\ln(x^2+1)$



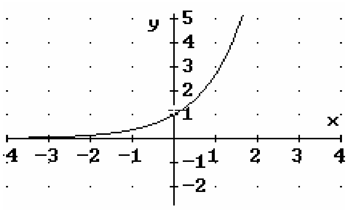
$y=\ln(x^2-5x+6)$



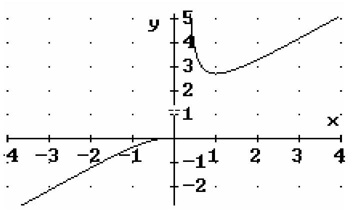
$y=\begin{cases} x^2\ln x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



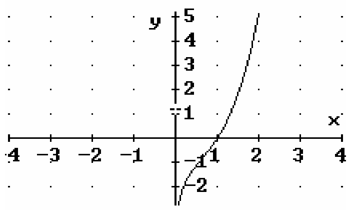
$y=\begin{cases} \dfrac{x}{\ln x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



$y=e^x$

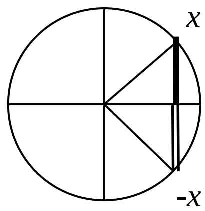


$y=xe^{1/x}$

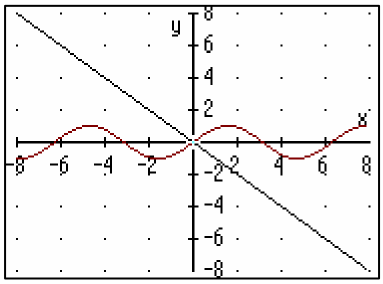


$y=e^x\ln x$

Dibujar la gráfica de: $y = x + \text{sen } x$



1. **Dominio.** Dom(f) = R
2. **Par/Impar.** $f(-x) = -x + \text{sen }(-x) = -x - \text{sen } x = -f(x) \Rightarrow$
   $\Rightarrow$**IMPAR** (en la figura se señalan sen x y sen(-x))
3. **Periodicidad.** $\left.\begin{array}{l} f(x) = x + \text{sen } x = x + \text{sen }(x+2\pi) \\ f(x+k) = x + k + \text{sen }(x+k) \end{array}\right\} \Rightarrow$ ∄ k/ $f(x)=f(x+k)$ $\Rightarrow$ No es periódica
4. **Intersecciones con los ejes. OX:** $y = 0 \Rightarrow$ x + sen x = 0 $\Rightarrow$ sen x = $-x$ $\Rightarrow$ x = 0 (es el único corte entre las gráficas de $y = -x$ y de $y = \text{sen } x$, como se ve en la ilustración adjunta) $\Rightarrow$ Corta en (0,0)

   OY: x = 0 $\Rightarrow$ y = 0 $\Rightarrow$ (0,0)
5. **Asíntotas. <u>AH</u>:** $\lim\limits_{x\to\infty}(x + \text{sen } x) = \infty$, porque, si bien ∄ $\lim\limits_{x\to\infty} \text{sen } x$ (esta función oscila indefinidamente entre -1 y +1, por mucho que x se aleje de 0), para valores muy grandes o muy negativos de x, resulta que $x + \text{sen } x \approx x$, ya que sen x lo máximo que puede valer es 1, y lo mínimo, -1, con lo que el error que se comete al aproximar x + sen x por x cuando $x\to\infty$ es despreciable.
   <u>AV</u>: No tiene, porque Dom(f) = R (las asíntotas verticales están en puntos donde existe discontinuidad asintótica, y esta función es continua en todo R).
   <u>AO</u>: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \text{sen } x}{x}$, Aunque ∄ $\lim\limits_{x\to\infty} \text{sen } x$, un teorema dice que el límite de una función que tiende a 0 por otra función que esté acotada, vale 0. Y sen x es una función acotada entre los valores -1 y +1. Entonces: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \text{sen } x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x} + \dfrac{\text{sen } x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\text{sen } x\right)$ = 1+0=1, puesto que 1/x tiende a 0 y sen x está acotada, como se ha dicho.
   $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \text{sen } x - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \text{sen } x$, que no existe $\Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.
6. **Monotonía / Extremos relativos.** Como $f'(x) = 1 + \cos x$, dividimos en intervalos Dom(f) mediante:
   a) Puntos de discontinuidad de f': No tiene
   b) Puntos críticos: $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

	…	-3π	$(-3\pi, -\pi)$	$-\pi$	$(-\pi, \pi)$	π	(π, 3π)	3π	…
f'	…	0	+	0	+	0	+	0	…
f	…	?	↗	?	↗	?	↗	?	

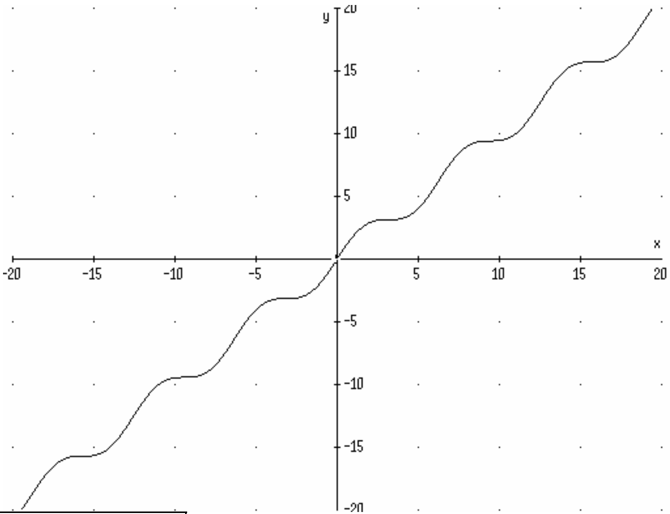
   No tiene extremos relativos, pero, como la derivada vale 0 en ellos, la tangente es horizontal en los puntos de la forma $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$: $(-3\pi, -3\pi)$, $(-\pi, -\pi)$, (π, π), (3π, 3π), … (las imágenes de estos valores de x se han calculado en la fórmula de la función: y = x + sen x).
7. **Curvatura / Puntos de Inflexión.** $f''(x) = -\text{sen } x$. Dividimos en intervalos Dom(f) mediante:
   a) Discontinuidades de f', f'': No hay

b) Puntos que anulan f'': $x = k\pi, k \in Z$

	…	-2π	$(-2\pi, -\pi)$	$-\pi$	$(-\pi, 0)$	0	$(0, \pi)$	π	…
f''	…	0	-	0	+	0	-	0	…
f	…	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	…

Todos los puntos de la forma ($k\pi$, $k\pi$) son puntos de inflexión (como antes, las imágenes se han calculado en la fórmula de la función $y = x + \text{sen } x$).

8. Gráfica.



EJEMPLOS DE EXÁMENES

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 8 de Abril de 2002

Análisis

1) Hallar el dominio de $y = \sqrt{-3x^2 + 4x - 1}$ *(2 puntos)*

2) Decir si la siguiente función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:

$$y = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1}$$ *(1 punto)*

3) Estudiar la continuidad de la función $y = \dfrac{2 - x}{2x^2 - 10x + 12}$ *(3 puntos)*

4) Calcular: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{\sqrt{3x - 2} - 2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 2x} \right)^{3x}$ *(2 + 2 puntos)*

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 28 de Mayo de 2002

Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, dando el valor de a para que sea continua en $x = 0$ y clasificando las discontinuidades: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *(2 puntos)*

2) Hallar los extremos absolutos de $y = -x^2 - 2x + 3$ en [0, 2] *(1 punto)*

3) Dar las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x) = x^3 - 1$ paralelas a $y = 3x$ *(1 punto)*

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2}$; $y'' = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

EXAMEN RESUELTO

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 20 de Mayo de 2003

Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, dando el valor de a para que sea continua en $x = 1$ y clasificando las discontinuidades: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2}, & \text{si } x<1\\ x^2+a, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ *(1 punto)*

2) Dar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2-x$ paralela a $y = 3x-2$ *(1 punto)*

3) Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$ *(1 punto)*

4) Derivar: $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$ *(1 punto)*

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

SOLUCIONES

1) Todas las funciones habituales, es decir, las *algebraicas*, que son las polinómicas, racionales (cociente de polinomios) y las irracionales (raíces de polinomios), y las *transcendentes*, que son las exponenciales (base constante y exponente variable), logarítmicas y trigonométricas, son *continuas en su dominio*. También, la suma, resta, producto, cociente y combinaciones (composiciones) de funciones continuas son, a su vez, continuas en el dominio resultante.

Las funciones *definidas a trozos*, como la del enunciado, no figura entre las que hemos enumerado. Este tipo de funciones se define, normalmente, utilizando funciones habituales, con las que coincide en diferentes intervalos. El estudio de continuidad se hace estudiando la función con la que se define en cada intervalo, excluyendo de dichos intervalos los puntos que separan uno de otro, que se estudian por separado. Según esto, el estudio de la continuidad de la función que nos dan es como sigue:

- Zona $(-\infty, 1)$: Aquí, nuestra función f coincide con $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ que, al ser racional, es continua en su dominio, es decir, en $\mathbb{R}-\{2\}$. O sea, que en cualquier valor de x es continua, salvo en $x = 2$. Pero $2 \notin (-\infty, 1)$, es decir, que cuando $x = 2$ f no tiene nada que ver con $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$, por lo que f es continua en todos los puntos de $(-\infty, 1)$.
- Zona $(1, +\infty)$: (Observar que $x = 1$ ha sido excluido de la zona, y se estudiará aparte). Aquí, f coincide con $y = x^2 + a$, que, al ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, independientemente de lo que valga a. De modo que es continua en $(1, +\infty)$, que es sólo una parte de R.
- $x = 1$: Las tres condiciones que una función f debe cumplir para ser continua en $x = a$ son: 1) Que exista $f(a)$; 2) Que exista $\lim_{x\to a} f(x)$; 3) Que ambos valores coincidan. Comprobémoslas para $x = 1$.

  En primer lugar, $\exists f(1) = 1 + a$, ya que cuando $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + a$. Luego la primera condición se cumple, independientemente de lo que valga a.

En segundo lugar, para estudiar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ hemos de separar el análisis de dicho límite por la derecha y por la izquierda, ya que según por donde esté *x*, a la derecha o a la izquierda de 1, la definición de *f* es distinta. De modo que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x}{x-2} = 1; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+a\right) = 1+a$$

El límite completo existe si, y sólo si los dos límites laterales existen y coinciden. Luego para que exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ debe cumplirse que $1 = 1+a \iff a = 0$.

Entonces, si $a = 0$, $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. Y como $f(1) = 1+a = 1+0 = 1$ coincide con dicho resultado, se cumplirá también la tercera condición de continuidad, con lo que *f* será continua en $x = 1$.

En resumen, si $a = 0$, *f* es continua en las tres zonas, es decir, en todo R.

2) Buscamos una recta tangente a $f(x) = x^2-x$ paralela a $y = 3x-2$, es decir, con pendiente 3. La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ vale, según la *interpretación geométrica de la derivada*, $f\,'(a)$. Para saber el punto de tangencia $(a, f(a))$, buscamos $a/\ f\,'(a) = 3$. Como $f\,'(x) = 2x-1$, lo anterior es: $2a - 1 = 3 \iff 2a = 4 \iff a = 2$. Como $f(2) = 4-2 = 2$, el punto de tangencia es $(2, 2)$. Conocido un punto de la recta tangente y su pendiente, usando la forma punto-pendiente, la ecuación de la tangente es: $y - 2 = 3(x - 2) \iff y = 3x - 6 + 2 \iff y = 3x - 4$.

3) Si en $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$ sustituimos x por 1, obtenemos la indeterminación 1^∞. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-(2x+1)}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-2x-1}{2x+1}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{2x+1}} = e^0 = 1$$

4) Como $y = \ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}} = \ln(x-2)^3 - \ln\sqrt{2x-1} = 3\ln(x-2) - \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$, derivando:

$$y' = 3\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-1} = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)} = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

5) Para dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comenzaremos hallando sus derivadas.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[3x^2(x-1)-2x^3\right]}{(x-1)^4} = \frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - (x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2\left[(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)\right]}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

a) Dominio. $\mathbb{R}-\{1\}$, ya que $x = 1$ anula el denominador.

b) Par/Impar. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{[(-1)(x+1)]^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $\Rightarrow$ Ni par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes. **OX**: $y=0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$, que es válido porque no anula al denominador $\Rightarrow$ (0, 0).
OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

d) Asíntotas. **Asíntotas Horizontales**: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntotas Verticales: Como sólo las hay en puntos de discontinuidad asintótica, y el único punto de discontinuidad es $x = 1$ (ver dominio), éste es el único que hay que investigar: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \Rightarrow$ La recta de ec. $x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntotas Oblicuas: $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$$

Por tanto, $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

e) Monotonía / Extremos relativos. Dividimos en intervalos Dom(f) = $\mathbb{R}-\{1\}$ por:
   a) Puntos de discontinuidad de $f\,'$: $x = 1$
   b) Puntos críticos: $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
$f\,'$	+	0	+	$\nexists$	–	0	+
f	↗	?	↗	$\nexists$	↘	mín	↗

Como $f(3) = 27/4$, las coordenadas del mínimo relativo son (3, 27/4)

f) Curvatura / Puntos de Inflexión. Dividimos en intervalos Dom(f) = $\mathbb{R}-\{1\}$ por:
   a) Puntos de disc. de $f\,'$: $x=1$
   b) Puntos de disc. de $f\,''$: $x=1$
   c) Ptos que anulan $f\,''$: $6x = 0 \Leftrightarrow x=0$

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
$f\,'$	–	0	+	$\nexists$	+
f	$\cap$	P.I.	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

Las coordenadas del punto de inflexión son (0, 0).

g) Gráfica.