PROPIEDADES FUNCIONES PRINCIPALES

1.- FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea a un número real positivo no nulo distinto de 1. Se llama función exponencial real de base a, a la función:

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = a^x \end{array}$$

Propiedades:

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) La función exponencial es siempre positiva.

d) La función exponencial es siempre estrictamente creciente o decreciente, según el valor de a.
   - Si $0 < a < 1$ la función es estrictamente decreciente.
   - S $a > 1$ la función es estrictamente creciente.

e) Si $0 < a < 1$:
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

f) Si $a > 1$:
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

   De estos dos últimos apartados se deduce que la función exponencial no está acotada superiormente pero si inferiormente por 0.

g) La función exponencial es continua en todo $\mathbb{R}$.

La representación gráfica de 2^x y $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ nos permite ver las dos posibilidades.

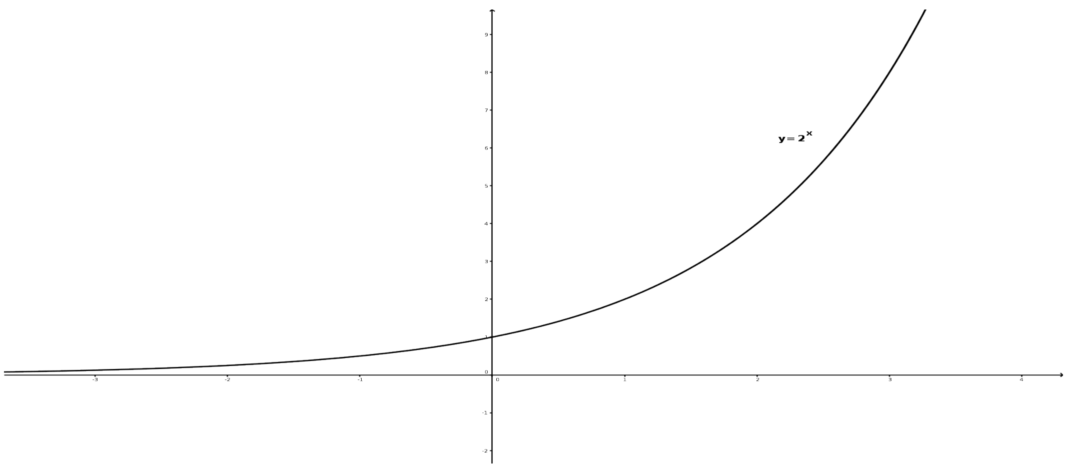

Figura 1: Representación gráfica de la función $f(x) = 2^x$

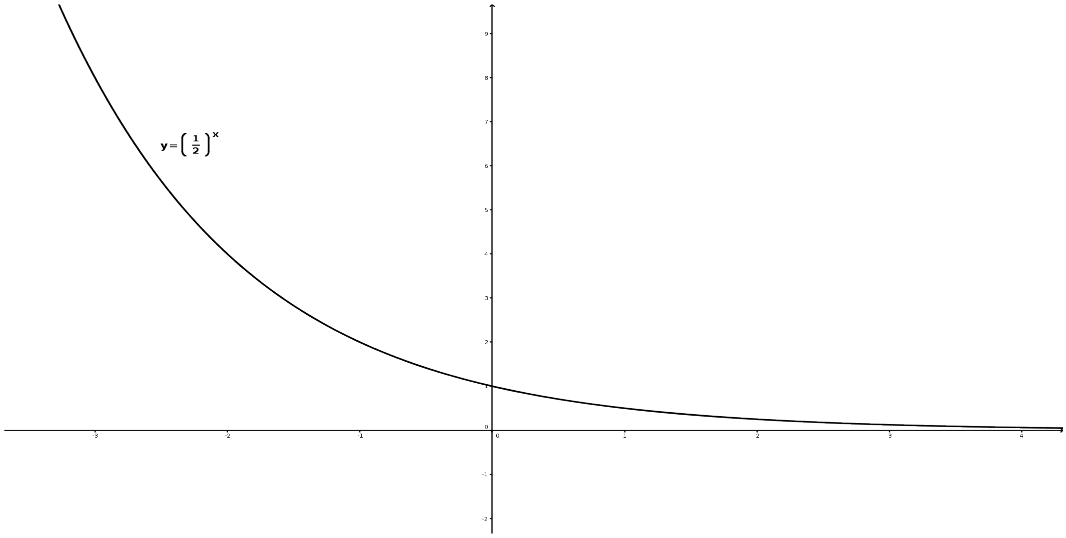

Figura 2: Representación gráfica de la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

2.- FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número real positivo no nulo distinto de 1. Se llama función logarítmica real en base a, a la función:

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = log_a x \end{array}$$

Propiedades:

a) $log_a 1 = 0$

b) $log_a a = 1$

c) Si $0 < a < 1$ tenemos:
- $log_a x > 0$ si $x < 1$
- $log_a x < 0$ si $x > 1$

d) Si $a > 1$ tenemos:
- $log_a x < 0$ si $x < 1$
- $log_a x > 0$ si $x > 1$

e) Si $0 < a < 1$ la función es estrictamente decreciente.

f) Si $a > 1$ la función es estrictamente creciente.

g) La función logarítmica siempre es continua.

h) La función logarítmica no está acotada ni inferior ni superiormente.

i) Si $0 < a < 1$:
- $\lim\limits_{x \to 0^+} log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a x = -\infty$

j) Si $a > 1$:
- $\lim\limits_{x \to 0^+} log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a x = +\infty$

La representación gráfica de $log_2 x$ y $log_{\frac{1}{2}} x$ nos permite ver las dos posibilidades.

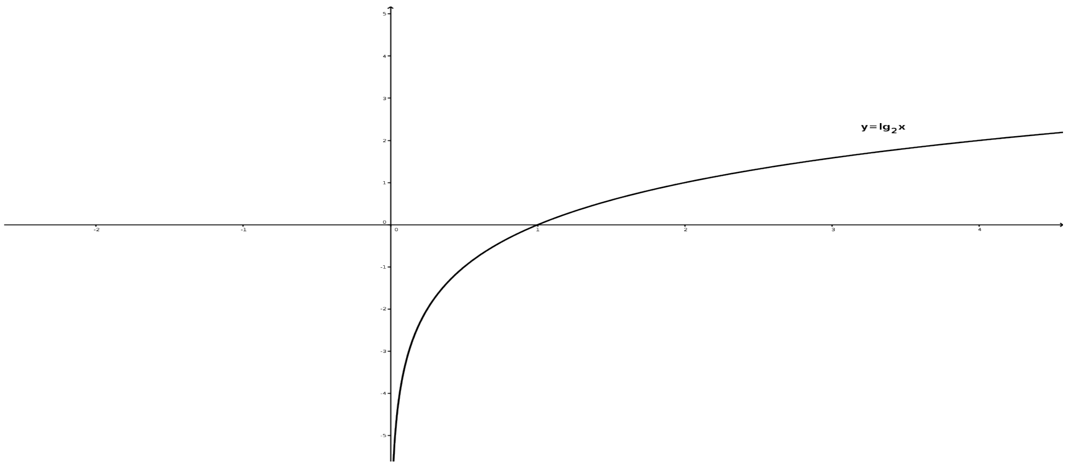

Figura 3: Representación gráfica de la función $f(x) = log_2 x$

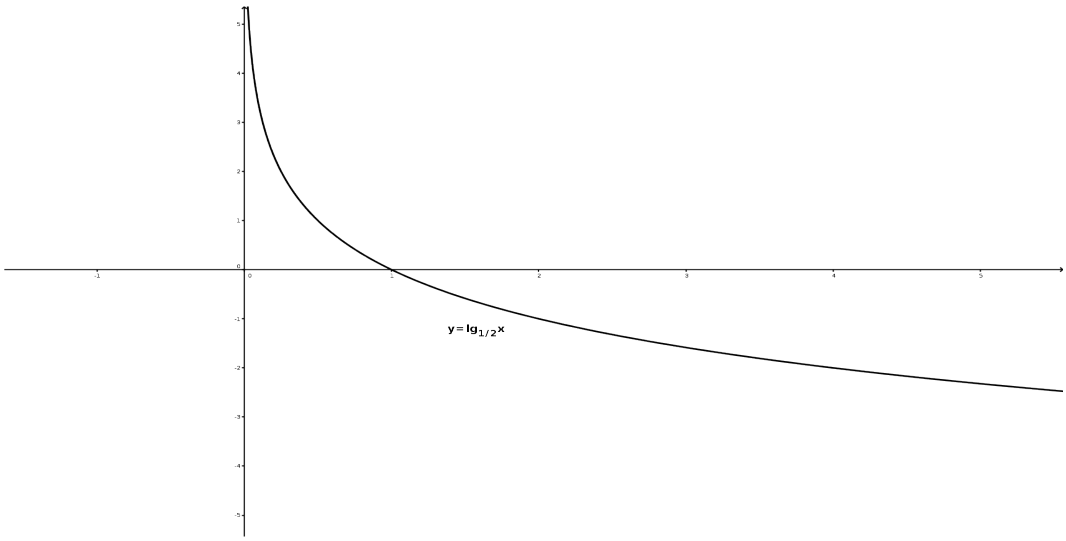

Figura 4: Representación gráfica de la función $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

3.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- *FUNCIÓN SENO*

Se llama función seno a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = senx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x el seno del ángulo cuya medida en radianes es x.
Propiedades:

a) El dominio de la función seno es $\mathbb{R}$.
b) El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, ya que el valor máximo que puede tomar el seno es 1 y el mínimo es -1.

c) La función seno es periódica y su periodo es 2π. En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, 2\pi)$.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, 2\pi)$.

d) La función seno es positiva en el intervalo $(0, \pi)$ y negativa en $(\pi, 2\pi)$.

e) La función seno se anula en los puntos $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

f) La función seno es continua en todo $\mathbb{R}$.

g) La función seno es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

h) La función seno es estrictamente decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

i) La función seno presenta un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un mínimo en $\frac{3\pi}{2}$

- ***FUNCIÓN COSENO***

Se llama función coseno a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = cosx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x.
Propiedades:

a) El dominio de la función coseno es $\mathbb{R}$.

b) El recorrido de la función coseno es $[-1, 1]$, ya que el valor máximo que puede tomar el coseno es 1 y el mínimo es -1.

c) La función coseno es periódica y su periodo es 2π. En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, 2\pi)$.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, 2\pi)$.

d) La función coseno es positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

e) La función coseno se anula en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

f) La función coseno es continua en todo $\mathbb{R}$.

g) La función coseno es estrictamente creciente en $[\pi, 2\pi]$.

h) La función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.

i) La función coseno es una función par y por tanto es simétrica respecto del eje Y.

j) La función coseno presenta máximos en $x = 0$ y $x = 2\pi$, y un mínimo en $x = \pi$.

- ***FUNCIÓN TANGENTE***

Se llama función tangente a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = tgx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x la tangente del ángulo cuya medida en radianes es x.
Como la función tangente viene definida por el siguiente cociente $tgx = \frac{senx}{cosx}$ el dominio de la función será el formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador. Ese conjunto D es:

$$D = \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Propiedades:

a) El dominio de la función tangente es **D**.
b) El recorrido de la función tangente es $\mathbb{R}$.
c) La función tangente es periódica y su periodo es π. En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, \pi)$.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, \pi]$, pero para conservar el método seguido para las dos funciones anteriores lo haremos en $[0, 2\pi)$.
d) La función tangente es positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
e) La función tangente se anula en los puntos $x = k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.
f) La función tangente es continua en todos los punto de su dominio y presenta una discontinuidad de salto infinito en lo que no están en él.
g) La función tangente es estrictamente creciente en todo intervalo en el que está definida la función.
h) La función tangente es una función impar y por tanto es simétrica respecto del origen.
i) La función tangente no presenta ni máximos, ni mínimos.

- ***FUNCIÓN COSECANTE***

Se llama función cosecante a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = cosecx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x la cosecante del ángulo cuya medida en radianes es x.
Como la función cosecante viene definida por el siguiente cociente $cosecx = \dfrac{1}{senx}$ el dominio de la función será el formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador. Ese conjunto D es:

$$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Propiedades:

a) El dominio de la función cosecante es **D**.
b) El recorrido de la función cosecante es $\mathbb{R} - (-1, 1)$.
c) La función cosecante es periódica y su periodo es 2π, lo mismo que el seno de la que es inversa.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, 2\pi]$.
d) La función cosecante tiene el mismo signo que la función seno.
e) La función cosecante no se anula en ningún punto.
f) La función cosecante es continua en todos los punto de su dominio y presenta una discontinuidad de salto infinito en lo que no están en él.
g) La función cosecante es estrictamente creciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.
h) La función cosecante es estrictamente decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
i) La función cosecante es una función impar y por tanto es simétrica respecto del origen.

j) La función cosecante presenta un máximo en $x = \frac{3\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \frac{\pi}{2}$.

- ***FUNCIÓN SECANTE***

Se llama función secante a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = secx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x la secante del ángulo cuya medida en radianes es x.
Como la función secante viene definida por el siguiente cociente $secx = \frac{1}{cosx}$ el dominio de la función será el formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador. Ese conjunto D es:

$$D = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Propiedades:

a) El dominio de la función secante es **D**.
b) El recorrido de la función secante es $\mathbb{R} - (-1, 1)$.
c) La función secante es periódica y su periodo es 2π, lo mismo que el coseno de la que es inversa.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, 2\pi]$.
d) La función secante tiene el mismo signo que la función coseno.
e) La función secante no se anula en ningún punto.
f) La función secante es continua en todos los punto de su dominio y presenta una discontinuidad de salto infinito en lo que no están en él.
g) La función secante es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
h) La función secante es estrictamente decreciente en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
i) La función secante presenta un máximo en $x = \pi$ y un mínimo en $x = 0$ y en $x = 2\pi$.

- ***FUNCIÓN COTANGENTE***

Se llama función cotangente a la aplicación f definida por,

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & f(x) = ctgx \end{array}$$

es decir, la función que asocia a cada número real x la cotangente del ángulo cuya medida en radianes es x.
Como la función cotangente viene definida por el siguiente cociente $tgx = \frac{cosx}{senx}$ el dominio de la función será el formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador. Ese conjunto D es:

$$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}\}$$

Propiedades:

a) El dominio de la función cotangente es **D**.
b) El recorrido de la función cotangente es $\mathbb{R}$.

c) La función cotangente es periódica y su periodo es π. En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, \pi)$.
Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, \pi]$, pero para conservar el método seguido para las demás funciones lo haremos en $[0, 2\pi)$.

d) La función cotangente tiene el mismo signo que la tangente.

e) La función cotangente se anula en los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$.

f) La función cotangente es continua en todos los punto de su dominio y presenta una discontinuidad de salto infinito en lo que no están en él.

g) La función cotangente es estrictamente decreciente en todo intervalo en el que está definida la función.

h) La función cotangente es una función impar y por tanto es simétrica respecto del origen.

i) La función cotangente no presenta ni máximos, ni mínimos.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

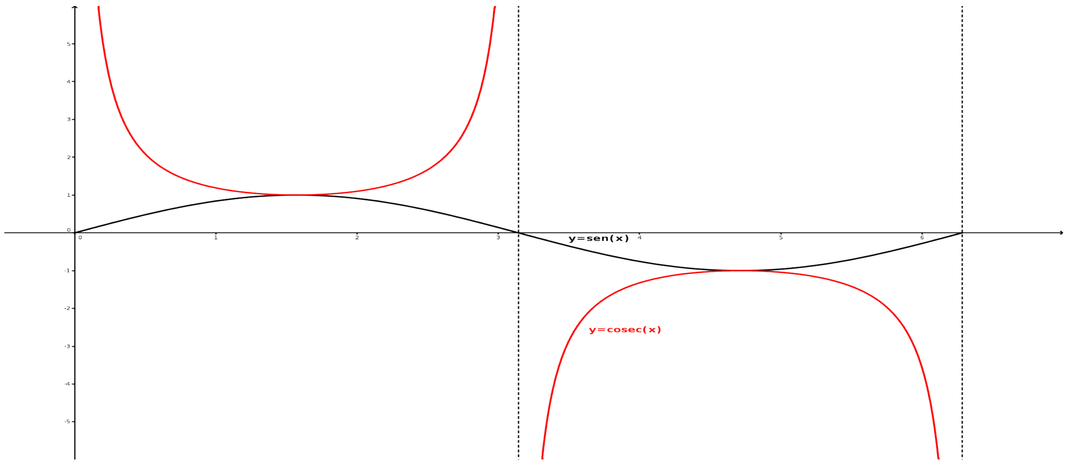

Figura 5: Representación gráfica de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = cosecx$

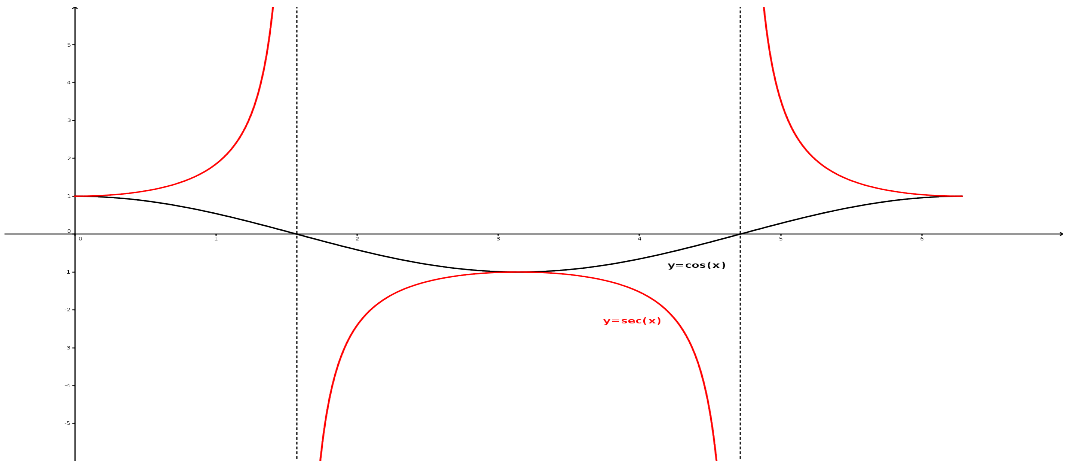

Figura 6: Representación gráfica de las funciones $f(x) = cosx$ y $f(x) = secx$

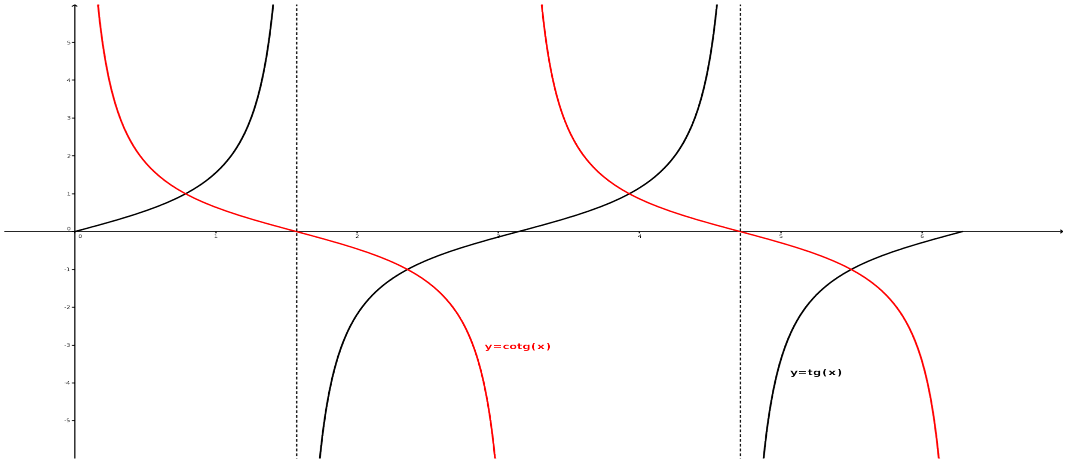

Figura 7: Representación gráfica de las funciones $f(x) = tgx$ y $f(x) = ctgx$