

■ **Razón y proporción.**

■ **Razón.**

- **Razón** entre dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$.
- Sus términos son antecedente y consecuente.

■ **Proporción.**

- Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

- Se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d**".
- **a**, **b**, **c** y **d** son los términos de la proporción. Llamamos **extremos** al 1^{er} y 4^o términos y **medios** al 2^o y 3^{er} términos.
- La *constante de proporcionalidad* es el cociente entre un antecedente y un consecuente.

■ **Propiedades de las proporciones.**

- Propiedad fundamental de las proporciones.

En cualquier proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

- Otras propiedades.

Si intercambiamos los medios o los extremos obtenemos otra proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{cases} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$$

Si intercambiamos los antecedentes con los consecuentes obtenemos otra proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

En la proporción: $\frac{21}{3} = \frac{35}{5}$

$$21 \cdot 5 = 3 \cdot 35 \Rightarrow 105 = 105$$

$$\frac{21}{3} = \frac{35}{5} \begin{cases} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{35}{21} \\ \rightarrow \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\frac{21}{3} = \frac{35}{5} \rightarrow \frac{3}{21} = \frac{5}{35}$$

Si sumamos o restamos a cada antecedente, su consecuente, obtenemos otra proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Si en varias razones iguales sumamos todos los antecedentes y todos los consecuentes, obtenemos otra razón de la misma constante.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\frac{21}{3} = \frac{35}{5} \rightarrow \frac{24}{3} = \frac{40}{5}$$

$$\frac{21}{3} = \frac{35}{5} = \frac{56(21+35)}{8(3+5)}$$

■ **Cuarto proporcional.**

- Al término que forma proporción con otros tres, a , b y c se le llama **cuarto proporcional**.
- Basándonos en la prop. fundamental:
- Para calcular un extremo, multiplicamos los medios y dividimos por el otro extremo.
- Para calcular un medio, multiplicamos los extremos y dividimos por el otro medio.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{x}; \quad x = \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

La cuarta proporcional de 3, 4 y 6 es 8.

■ **Medio proporcional.**

- Una proporción en la que los medios son iguales se llama proporción **continua**.
- Las que no son continuas se llaman **discretas**.
- En una proporción continua un medio es **media proporcional** de sus extremos.
- Para calcular la media proporcional se halla la raíz cuadrada del producto de los extremos.
- El cuarto término de una proporción continua es la **tercera proporcional**. Para calcularla, dividimos el cuadrado del segundo término entre el primero.

$\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ es una proporción continua.

6 es la media proporcional de 3 y 12.

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \rightarrow x = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

La media proporcional de 4 y 9 es 6.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

2 es la tercera proporcional de 8 y 4.

■ Magnitudes proporcionales.

■ **Magnitudes directamente proporcionales.**

- Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra magnitud queda multiplicada o dividida por ese mismo número.
- Si dos magnitudes son directamente proporcionales se cumple que:
 - La razón formada por dos cantidades de una magnitud es igual a la razón formada por las cantidades correspondientes de la otra magnitud.
 - Las razones formadas por cantidades de ambas magnitudes son iguales. (De una y otra magnitud).

Azúcar (Kg)	1	2	3	4
Coste (€)	1'5	3	4'5	6

$$\frac{1}{1'5} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4'5} = \frac{4}{6} = k$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4'5}$$

■ **Resolución de problemas: reducción a la unidad.**

- Se aplica el siguiente procedimiento:
 - Se calcula la cantidad de una magnitud correspondiente a la unidad de la otra magnitud. (constante de proporcionalidad).
 - Con el valor de la unidad, se calcula el valor deseado.

■ **Resolución de problemas: regla de tres directa.**

- Si disponemos de dos magnitudes directamente proporcionales y conocemos una cantidad de la primera y la cantidad correspondiente de la segunda y queremos calcular la cantidad que le corresponde a otra conocida de cualquiera de las dos magnitudes, planteamos una regla de tres simple directa.

<u>1ª magnitud</u>	<u>2ª magnitud</u>
a	b
c	x

- Establecemos la proporción y resolvemos aplicando la propiedad fundamental.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x} \rightarrow x = \frac{c \cdot b}{a}$$

■ **Magnitudes inversamente proporcionales.**

- Dos magnitudes son ***inversamente proporcionales*** cuando el producto de los valores correspondientes (de una y otra magnitud) son iguales.
- Si dos magnitudes son ***inversamente proporcionales***, la razón que existe entre dos valores de la primera magnitud es la inversa de la razón que existe entre los valores correspondientes de la segunda.
- Si dos magnitudes son ***inversamente proporcionales*** y a la cantidad **a** de la primera magnitud le corresponde la cantidad **b** de la segunda, si multiplicamos **a** por un número, la cantidad correspondiente de la segunda magnitud se obtiene dividiendo **b** por ese número.
- Ejemplo: Consideramos las magnitudes velocidad y tiempo que emplea un automóvil en recorrer una distancia de 720 Km.

Velocidad (km/h)	60	90	120	180
Tiempo (horas)	12	8	6	4

Para comprobar que son magnitudes inversamente proporcionales multiplicamos los antecedentes por los consecuentes:

$$60 \cdot 12 = 90 \cdot 8 = 120 \cdot 6 = 180 \cdot 4 = 720$$

Luego la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

Si tomamos dos cantidades de la velocidad, 60 y 120, la razón de éstas es:

$$\frac{60}{120}$$

La razón correspondiente a los tiempos respectivos (12 y 5) es:

$$\frac{12}{6} \text{ y su inversa } \frac{6}{12}$$

Las razones $\frac{60}{120}$ y $\frac{6}{12}$ son razones iguales porque se cumple que $60 \cdot 12 = 120 \cdot 6$

$$\begin{array}{l} 60\text{km/h} \text{ ----- } 12 \text{ horas} \\ 2 \cdot 60\text{km/h} \text{ ----- } 12 : 2 \text{ horas} \end{array}$$

■ **Resolución de problemas: regla de tres inversa.**

- **a** y **b** son dos cantidades correspondientes a dos magnitudes inversamente proporcionales.
- Supongamos ahora que **c** es otra cantidad de una de las magnitudes y nos piden calcular la cantidad **x** correspondiente de la otra magnitud.
- Este tipo de problemas se llaman problemas de **regla de tres simple inversa**.
- Si la cantidad **x** que nos piden corresponde a la segunda magnitud, el problema se puede representar en una tabla de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{1ª magnitud} \qquad \qquad \qquad \text{2ª magnitud} \\ \mathbf{a} \text{ ----- } \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \text{ ----- } \mathbf{x} \end{array}$$

y se lee de la misma manera que en la regla de tres simple directa.

- Recordemos que las razones correspondientes a cada magnitud son inversas.
- Para calcular **x** seguimos estos pasos:

1º Calculamos la razón inversa de la 1ª magnitud.

$$\frac{c}{a}$$

2º Expresamos la razón directa de la segunda magnitud.

$$\frac{b}{x}$$

3º Igualamos las razones anteriores.

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$$

4º Calculamos **x**

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x} \rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$$

■ **Proporcionalidad compuesta.**

■ ***Proporcionalidad compuesta.***

- Una proporcionalidad es compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes proporcionales.

■ ***Resolución de problemas: regla de tres compuesta.***

- Cuando consideramos más de dos magnitudes dependientes unas de otras, debemos decidir la relación entre ellas, es decir, si son directa o inversamente proporcionales dos a dos, considerando invariables las demás.

- Debemos comparar la magnitud de la que queremos calcular una cantidad con las demás.

- Cuando nos dan las cantidades correspondientes a varias magnitudes relacionadas y queremos hallar el valor que corresponde a una de ellas, nos encontramos con un problema de regla de tres compuesta.

- Antes de resolverlo tenemos que decidir, comparando las magnitudes, si son directas o inversamente proporcionales.

- Después seguimos los siguientes pasos:

1º Calculamos las **razones directas** de las *magnitudes directamente proporcionales*.

2º Calculamos las **razones inversas** de las *magnitudes inversamente proporcionales*.

3º *Multiplicamos* las razones obtenidas en 1º y 2º.

4º *Igualamos* el producto anterior a la **razón directa de la incógnita** con lo que tendremos una proporción.

5º Calculamos **x** en la proporción para resolver el problema.

✚ **EJEMPLO**

- El *número de días* que se tarda en hacer un muro depende del *número de obreros*, del *número de horas* que éstos trabajan y de la *longitud del muro*.
Tenemos por tanto, cuatro magnitudes y la primera de ellas depende de las otras tres.
Podemos indicar con una **D** o una **I** cómo son las magnitudes número de obreros, número de horas y longitud del muro con respecto a número de días.

Nº de días – Nº de obreros **I**
Nº de días – Nº de horas **I**
Nº de días – Longitud del muro **D**

En tres días, 4 obreros trabajando 8 horas diarias hicieron un muro de 48 metros. ¿Cuántos días tardarán 6 obreros trabajando 10 horas diarias para construir un muro de 150 m?

Días	I Obreros	I Horas	D Longitud
3	4	8	48
x	6	10	150

La magnitud directamente proporcional es la longitud. Su razón directa es $\frac{48}{150}$

Las dos magnitudes inversamente proporcionales son el número de obreros y el número de horas. Sus razones inversas son.

$$\frac{4}{6} \rightarrow \frac{6}{4}$$
$$\frac{8}{10} \rightarrow \frac{10}{8}$$

Multiplicamos las razones obtenidas

$$\frac{48}{150} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{8} = \frac{2.880}{4.800}$$

Igualamos con la razón directa de la incógnita y calculamos **x**

$$\frac{3}{x} = \frac{2.880}{4.800} \rightarrow x = \frac{4.800 \cdot 3}{2.880} = 5 \text{ días.}$$