AUTODIDACTA
Revista on-line
E-mail: accionsindical@anpebadajoz.es
Revista de la Educación en Extremadura
D.L: en trámite I.S.S.N.: en trámite
SINDICATO ANPE EXTREMADURA

# EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE NÚMERO

Mª Remedios Macías Hernández
*Licenciada en Matemáticas y en Ciencias Estadísticas*
*Jefe del Departamento de Matemáticas del IES "Ramón Carande"*
*(Jerez de los Caballeros, Badajoz)*

## 1-. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la Historia de la Humanidad hemos necesitado contar objetos y seres, representar medidas reales con símbolos, etc…, a medida que las necesidades de las Sociedades humanas se iban haciendo mayores. Cada cultura concibió unos u otros sistemas de numeración y símbolos para expresarlos, que se fueron desarrollando a lo largo de la Historia, perpetuándose algunos, perdiéndose otros.

El estudio de los conjuntos numéricos y su formalización, dentro de la Aritmética y Álgebra Elementales, constituye uno de los apartados más importantes para la posterior construcción del "edificio matemático". Pero no fue hasta el s. XVIII en adelante cuando se produjo un intento de fundamentación lógico-matemática de todos los conjuntos numéricos conocidos por el hombre: con los trabajos de Peano, Cantor, Cauchy, Gauss, Euler, Krönecker y Dedekind se construyó definitivamente la "Aritmética Elemental"

Habitualmente, presentamos los diferentes conjuntos de números de una manera didáctica. Construimos los conjuntos y los dotamos de unas propiedades. Luego, planteamos un problema tal que su solución es la construcción de un nuevo conjunto que amplíe el anterior, respetando su estructura y propiedades, de manera que contenga un subconjunto isomorfo al inicial. Comenzamos con el conjunto de los números naturales, que es un semianillo abeliano. La ecuación $x+a=b$ con $a>b$ no tiene solución. Ampliamos con el conjunto de los números enteros, que es un anillo conmutativo con elemento unidad.

La ecuación $ax=b$ con $a$ no divisor de $b$ no tiene solución. Aparece el conjunto de los números racionales, que tiene estructura de cuerpo. Y resulta que el número □que todos conocemos, o el número 2 que es la diagonal del cuadrado de lado 1, no están en ese conjunto. Se amplía con los números irracionales, formando el conjunto de los reales. Y por último, este conjunto no soluciona la ecuación $x^2+1=0$. Realizamos la última ampliación, apareciendo el conjunto de los números complejos.

En este tema, vamos a ver la evolución histórica que ha habido del número. Y no coincide con la didáctica. En ambas comenzaremos por el número natural, ya que éste surge debido de la necesidad humana de contar. Desde que el hombre se puede considerar como tal, ha existido dicha necesidad. Pero a partir de aquí todo lo demás es diferente. El número cero surge mucho después que otros, las fracciones aparecen antes que los negativos, etc. Para ver esta evolución histórica, repasaremos los descubrimientos que han realizado las civilizaciones más importantes, en orden cronológico.

En la segunda parte del tema trataremos las sucesivas ampliaciones del concepto de número y veremos que problemas resuelve cada una de ellas.

## 2-. CONCEPTO PRIMITIVO DE NÚMERO NATURAL

El concepto de "número" se desarrolló muy lentamente, a lo largo de la evolución de la mente humana, tras un proceso de abstracción natural, que estaba íntimamente ligado a la vida diaria en todos sus aspectos.

Antiguamente, se definía la matemática como la ciencia del número, la magnitud y la forma. Estos conceptos comenzaron a desarrollarse primero a partir de diferencias y contrastes entre elementos del entorno del hombre primitivo, y luego a partir de semejanzas.

El primer procedimiento aritmético de la historia comenzó con el artificio que llamamos *correspondencia biunívoca miembro a miembro*. Este procedimiento permitía a cualquier persona la posibilidad de comparar dos conjuntos, aunque no tuviesen la misma naturaleza. Se evitaba así contar de forma abstracta, ya que no se sabía.

Más tarde, el proceso dialéctico ascendente de pensamiento constató que entre conjuntos con el mismo número de elementos hay ciertas igualdades y semejanzas. Por ejemplo, el hombre diferenció entre un "lobo" y "muchos lobos", para más adelante establecer relaciones o equivalencias entre "un lobo", "un arco", "un guerrero", etc. Momento en el cual tiene su génesis el concepto de "unidad".

De la misma forma se percataron de la relación existente entre pares de objetos relacionados: las manos y los pies, el hombre y la mujer, el día y la noche, la vida y la muerte…, proceso que culminó con el concepto de "par" y "dos". Parece ser que durante milenios los únicos números concebidos por la mente humana eran el "uno", el "dos", hablando a continuación de "multitud", según indican numerosos estudios antropológicos del lenguaje de algunas tribus primitivas.[1]

## 3-. LENGUAJE Y ESCRITURA NUMÉRICA PRIMITIVOS

La escritura numérica apareció incluso antes que la escritura normal, y antes que el lenguaje hablado para cada número. Sobre el 40.000 a.C. se produjo el nacimiento de la cultura de los números, es decir, la mente humana llegó a ese punto en que abstrajo la idea numérica. Llegados a cierto punto del desarrollo de esa conciencia global de "número", apareció la necesidad de expresarla de algún modo, y sobre todo, de mantener en el tiempo los resultados de operaciones fácilmente recordables por transmisión oral.

En un principio, el hombre utilizó para "contar" objetos de la propia naturaleza, mediante reiteración. Los dedos de la mano pueden utilizarse fácilmente para representar conjuntos de hasta 5 ó 10 elementos (dependiendo de sí se usan una o las dos manos) y hasta 20 añadiendo los dedos de los pies[2]. Cuando los dedos eran insuficientes, se recurrían a otros métodos, como era usar montones de piedras, de conchas o de cualquier otro elemento.

Los montones eran grupos de cinco o diez piedras, lo cual significaba que empezaban a utilizar, sin saberlo, un sistema quinario o decimal, como consecuencia

---

[1] Ver, por ejemplo, Ifrah, G. *Historia de las Cifras*.
[2] Numerosas teorías antropomórficas indican que el modo de contar de 5 en 5 o de 10 en 10 desplazaron a otro (binario, ternario, sexagesimal, …) por la realidad biológica del hombre. No obstante, vestigios de sistemas antiguos, como el vigesimal, aparecen p.e. en el Francés: *Quatre-vingth.*

de contar con una o dos manos. Pero estos montones eran un método efímero de conservar información. Así que comenzaron a realizar muescas en huesos. Está comprobado que el hueso o pedazo de madera tallado, es el método más utilizado en la historia de la *contabilidad*. Los restos más antiguos datan del 35.000 - 20.000 a.C. (*Hombre de Cromañon*)**.**

*Ejemplo*. En una tribu primitiva, para "contar" el rebaño de ovejas se procedía así: por cada oveja que salía de la cueva ponían una piedra en un montón; para comprobar que a la vuelta estaban todas, iban quitando una piedra por cada oveja que entraba. Si al final no quedaba piedra alguna, estaban todas. En otro caso, sabían las unidades por separado de ovejas que faltaban, aunque todavía no sabían expresar el número de ovejas ni cuántas faltaban. Tuvo que ser así, comparando cantidades, como el hombre comenzó a construir el concepto de número

Más adelante, el hombre aprendió a contar de dos en dos, de tres en tres, etc., utilizando piedras en otros montones, que simbolizaban unidades de orden superior (2, 3, etc.). Era la primera semilla de los "sistemas de numeración".

La representación simbólica de los números naturales, se presupone que surgió antes del nacimiento de las palabras para "representarlos", seguramente porque es más fácil contar muescas en un palo que establecer una frase para identificar un número concreto. Los símbolos que representan a los números no han sido siempre los mismos, como iremos viendo a lo largo del tema. La invención de la escritura numérica, que ayudó al hombre a sustituir y perpetuar el concepto abstracto de número por signos convencionales fue diferente en cada cultura.

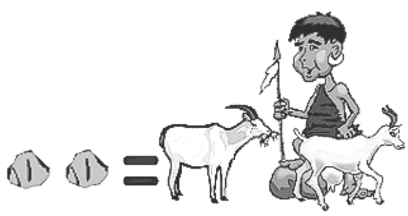
Otros estudios indican igualmente que el concepto de número "ordinal" precedió al de "cardinal": el arte de contar pudo aparecer también en conexión con rituales religiosos primitivos, donde el Dios era el Ser Supremo, ocupando el primer lugar en el Universo.

**Un paréntesis: ¿Qué es calcular?**

Veamos a un pastor de cabras primitivo:

Habíamos dicho que para saber si seguía teniendo la misma cantidad de cabras, iba comparándolas con piedrecillas.

Este mismo sistema, lo vinieron usando los pastores romanos de los primeros tiempos. Como todos sabemos, los romanos hablaban en latín y, en ese idioma, piedra se dice **calculus,** de donde viene la palabra **cálculo**.



Por eso, calcular significa contar con piedras. Hoy en día ya no se calcula con piedras, sino con números.

### *3.1-. Los Sumerios*

La primera escritura conocida apareció poco antes de finales del IV milenio en el país de Sumer, situado en la baja Mesopotamia, entre las cuencas inferiores de los ríos Tigris y Eufrates. La escritura se realizaba en tablillas de arcilla, que eran el "papel" de la época.

Esas tablillas se utilizaban para realizar anotaciones de cantidades asociadas a diversas clases de mercancías, siendo las primeras actas contables que se conocen.

Los sumerios contaban utilizando la base 60 (sistema sexagesimal) en lugar de la base quinaria o decimal. Todavía quedan restos de esa base, por ejemplo en la forma de medir un ángulo o en la medida del tiempo.

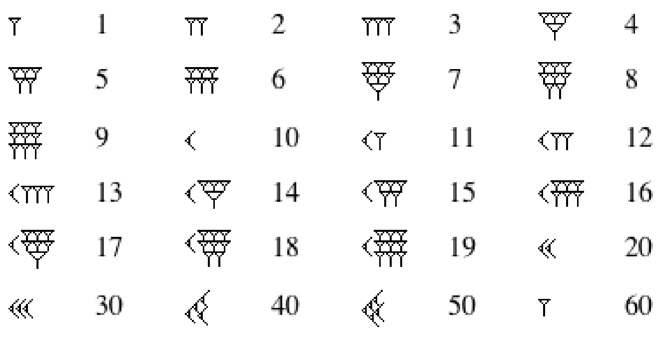
La utilización de la base 60 implicaba el conocimiento de 60 signos y palabras distintas para nombrar a los números del 1 al 60 (todavía no se conocía el cero). Esto se resolvía usando el 10 como unidad auxiliar. Así, se tenían diez palabras para los números del 1 al 10. El sistema da nombre a los múltiplos de 10 hasta el 60 incluido. El 60 implica un nuevo orden.

Del 60 se alcanza el 600. Del 600 al 3600. Y así sucesivamente. La forma de obtener las unidades del sistema eran 1 – 10 – 60 (10x6) – 600 (10x6x10) – 3600 (10x6x10x6) – 36000 (10x6x10x6x10)...

Pero, ¿cómo se escribían estos números que ya tenían nombre?. Los sumerios asignaron a cada numero de la serie anterior (1, 10, 60, 600, 3600, 36000, 216000) un símbolo. Al principio, entre los años 3.200 – 3.100 a.C. las cifras se representaban mediante unos símbolos dispuestos verticalmente. A parir de la primera mitad del III milenio a.C. cambiaron a una disposición horizontal. Y en el siglo XXVII a.C. apareció la **escritura cuneiforme**, debido simplemente a un cambio en el instrumento de escritura.

El sistema se basaba en el principio aditivo. Los nueve primeros números naturales se representan repitiendo el signo de la unidad tantas veces como sea preciso; los números 20, 30, 40 y 50 repitiendo el de las decenas; los números 120, 180, etc. repitiendo el signo de la sesentena, y así sucesivamente.

Era bastante usual que esta forma de escritura exigiera repeticiones desmesuradas de signos. Así, para representar el número 3599 se empleaban 26 cifras. Por tanto, surgió el método sustractivo, representando, por ejemplo el 9 como 10 – 1. Apareció un nuevo signo que equivalía a nuestro signo menos actual.




*Representación por muescas (Sumerios)*

### *3.2-. Los Semitas*

Por semitas, entendemos varios pueblos diferentes, como los acadios, los asirios, los babilonios y otros más. Cuando estos pueblos (por el orden en que los hemos nombrado) llegaron a Sumeria, se produjo un cambio en los sistemas de numeración. Se produjeron tres etapas fundamentales, debido a que los semitas utilizaban un sistema decimal.

La primera etapa corresponde a una asimilación por los acadios de la cultura sumeria, adoptando el sistema sexagesimal. En la segunda etapa, se produce la convivencia de los sistemas sexagesimal y decimal. Y en la tercera etapa, se elimina por completo el sistema sexagesimal.

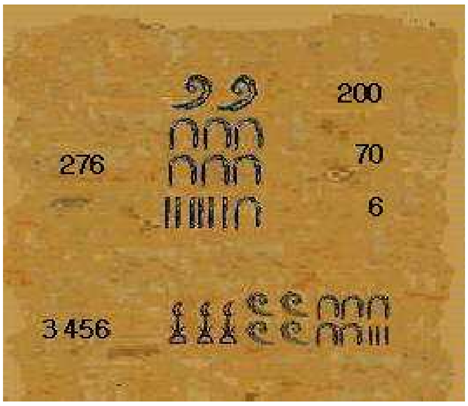
A pesar de lo dicho anteriormente, en la época babilónica, los eruditos utilizaban un sistema de numeración posicional muy parecido al nuestro. Sólo se diferenciaba en que la base usada era la 60. Es difícil determinar con precisión cuando se produjo, pero en esta época apareció el primer **cero**, para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto rango. Cada vez que faltaba una potencia de 60, representaban mediante este símbolo la ausencia de la misma, en lugar del espacio vacío. El símbolo tenía la significación de vacío, pero todavía no estaba pensado en el sentido de *nada*.

### *3.3-. Los Egipcios*

Casi al mismo tiempo que en Mesopotamia, los egipcios inventaron un sistema de numeración, hacia el 3.000 a.C. Aunque había contacto con los sumerios, el sistema que se desarrolló no fue tomado de ellos, sino que es autóctono de los egipcios.

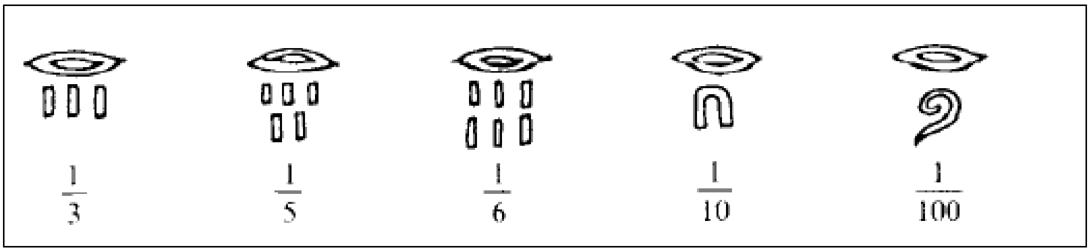
El sistema es decimal, aditivo mediante jeroglíficos, no posicional, pudiendo representar números superiores a $10^6$. De hecho, poseían jeroglíficos para representar el 1 y las seis primeras potencias de 10.

Esta notación era una manera de representar por escrito la forma de contar que tenían desde épocas arcaicas. Consistía en escribir los números por alineación o acumulación de objetos (piedras, conchas, guijarros, etc.) asociados cada uno de ellos al orden de la unidad utilizada. El “palo” representaba la unidad; el “arco” la decena; el “lazo” la centena; etc.



*Ejemplos de numeración egipcia.*

Los hombres de la edad de piedra no representaron las fracciones, ya que no tenían necesidad de ellas. Fue en la *Edad del Bronce*, al adquirir algunos pueblos un nivel cultural más elevado, cuando apareció dicha necesidad. En los jeroglíficos egipcios encontramos inscripciones que representan **fracciones** unitarias, aquellas cuyo numerador es 1. Para representarlas se utilizaba un jeroglífico con forma de "óvalo" situado encima del número que actúa como denominador. Algunas fracciones, como ½ ó ¼, tenían símbolos especiales.



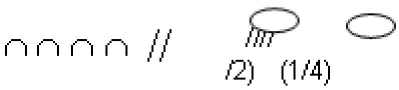
*Ejemplos de fracciones egipcias.*

En el *Papiro de Ahmes* aparece una tabla para convertir fracciones de la forma "2/n" (n>5) y "n/10" (n=1,2…9) en suma de fracciones unitarias y de la fracción "2/3". Consideraban que las fracciones de la forma "m/n" (m<n) eran parte de un proceso incompleto, y tendían a reducirlas en todo caso.

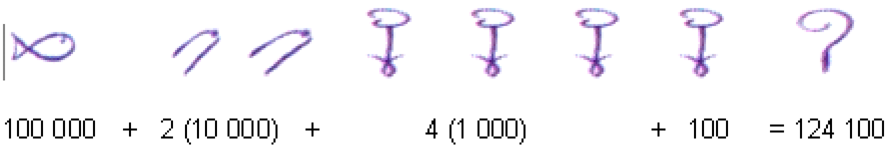
Ejemplos.

i. Expresar los números 33, 57


ii) Expresar el número 42, 75 = > se expresa en número mixto 42 ½ ¼

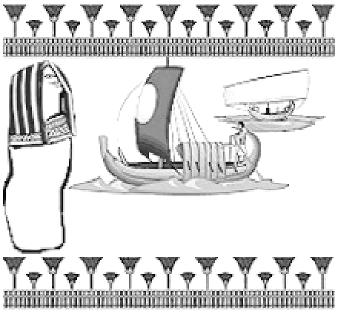



iii) Expresar el número 124 100



**Un paréntesis. ¿Qué es un número fraccionario?**

En esta explicación, nos va a ayudar nuestro amigo el **UNO** egipcio. Todos los años, en mi país, el Antiguo Egipto (ya sabes... el de las pirámides y los faraones) a mediados de año, hacia el mes de julio, el río crecía y crecía; traía tanta agua desde el interior de África que inundaba todas las tierras de labranza por las que cruzaba camino del mar Mediterráneo.



Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría por toda la gente. La razón está en que, gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía arrastrando en sus aguas.

En esas fechas el faraón enviaba a los ***agrimensores*** (señores que medían los campos), que ayudados de una cuerda con nudos a una misma distancia, repartían los terrenos entre los campesinos.

A estos medidores de cuerda les asaltó un gran problema: Había veces que, al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda. Los campos no podían medir lo que ellos quisieran. Las cuerdas eran unidades de medida y ellos tenían que verificar que cada campo tenía un determinado número de cuerdas por cada lado.

### *3.4-. Los Griegos (600 a.C.)*

*3.4.1-. La Numeración Ática*

El auge de la civilización Griega en el Mediterráneo, surgida en estrecho contacto con los pueblos del norte del África y el Asia menor, sirvió de vehículo transmisor hacia las culturas de occidente. Los griegos aprendieron de los egipcios y de los fenicios, tomaron el diez como número básico, su sistema de numeración era literal usando letras del alfabeto como símbolos para los números.

El primer sistema de numeración utilizado por los griegos se llamó Ático y fue desarrollado hacia el año 600 a. C., era de carácter aditivo en base diez. Para representar la unidad y los números hasta el 4, empleaban trazos verticales repetitivos, para el 5, 10 y 1000, su representación era la letra correspondiente a la inicial de cada cifra, 5 (pente), 10 (deka), 1000 (khiloi). Los símbolos de 50, 500, 5000, los obtenían por el principio multiplicativo, añadiendo el signo de 10, 100, 1000, al de 5, como se observa en la Figura.


***SISTEMA DE NUMERACIÓN GRIEGA ÁTICA***

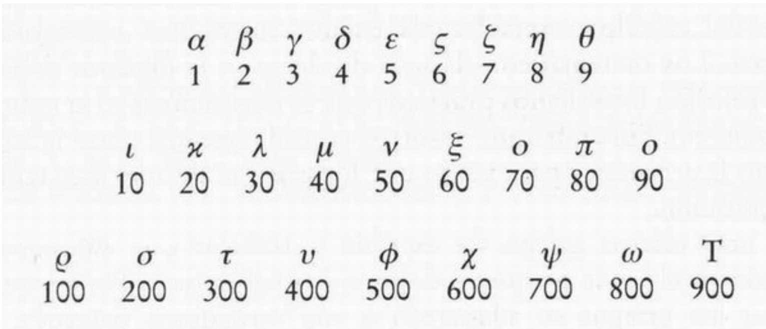
Exceptuando a la unidad, los símbolos que sirven para representar el 5 y las potencias de 10 corresponden a la inicial del nombre griego que sirve para nombrarlas, o es una combinación de esas letras numerales. Es lo que se llama el principio de *acrofonía*. Los símbolos 50, 500, 5.000 y 50.000 se denotan mediante signos que siguen el principio multiplicativo.

Ejemplo. Representación del número 3737


*3.4.2. La Numeración Jónica o Alfabética.*

El sistema Jónico o Alejandrino de numeración empleaba las 27 letras minúsculas del alfabeto, lo mismo que algunos símbolos, como se muestra en la Figura; para escribir unas cifras numéricas los números parecían palabras y las palabras tenían un valor numérico.

Este sistema literal era muy poco flexible, por lo que resultaba bastante complicado hacer operaciones aritméticas en griego, razón por la cual no tuvieron una adecuada manera de representar los números, y les impidió hacer mayores progresos en el cálculo matemático·



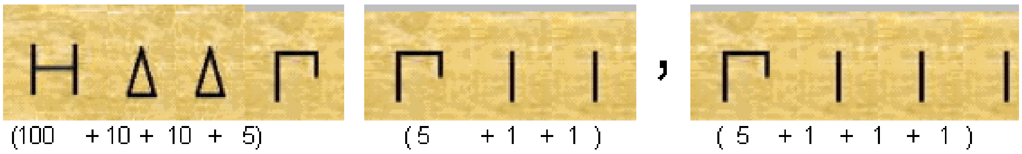
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ε | ς | ζ | η | θ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ι | ϰ | λ | μ | ν | ξ | ο | π | ο |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| ϱ | σ | τ | υ | ϕ | χ | ψ | ω | Τ |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

***SISTEMA DE NUMERACIÓN GRIEGA JÓNICA***

Los griegos también utilizaban **fracciones**. Comenzaron, al igual que los egipcios, con fracciones unitarias, escribiendo el número y a continuación un acento o señal ***diacrítica***. Poco después comenzaron a usar fracciones de cualquier tipo. Establecieron la equivalencia de fracciones, a partir de las proporciones. Esto surgió debido al interés de convertir un rectángulo de lados *a* y *b* en un cuadrado, para lo que se precisaba resolver $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$

Uno de los fundamentos del pitagorismo era explicar todas las cosas por medio de las propiedades de los números naturales y de sus razones. Todo esto se vino abajo cuando descubrieron que había elementos, como la diagonal de un cuadrado de lado 1, que no eran medibles. A esos números se les llamó inconmensurables. Posteriormente, Euclides, en el *Libro X de Los Elementos* realiza una clasificación de los números inconmensurables o irracionales.

*Ejemplo.* El sistema de numeración griego también manejó las cifras fraccionarias, estas se representaban en la parte superior derecha (a modo de exponente) con una comilla para el numerador y dos comillas para el denominador, las cifras se colocaban seguidas. Un ejemplo para este tipo de operación es 125,87, Esta cifra se expresa en número mixto = > 125 7/8




### *3.5-. Los Romanos*

Las cifras romanas, al igual que algunos sistemas de numeración precedentes, no permitieron a sus usuarios realizar cálculos. Ello es debido a que son abreviaturas destinadas a anotar y retener números.

Inicialmente, la numeración romana se regía por el *principio de adición*. Posteriormente complicaron el sistema introduciendo una regla: *todo signo numérico colocado a la izquierda de una cifra de valor superior se resta*. Así consiguieron no repetir más de tres veces el mismo signo.

Las cifras romanas nacieron mucho antes que la civilización romana. Provenían de los etruscos, y en general, de pueblos itálicos. Y estas, a su vez, tenían su origen en las griegas.

Si nos fijamos, la cifra más alta es M que representa 1.000. Para representar números grandes, surgieron varias iniciativas. La que más importancia tuvo fue la que consistía en multiplicar por 1.000 toda expresión numérica que tuviese encima una barra horizontal.


Ejemplos:

i) Expresar el número 2349

**MMCCCXLIX** = 2 (1 000) + 3 (100) + (50 – 10) + (10 - 1) = 2349

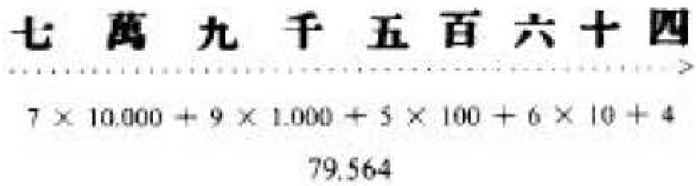
ii) Expresar el número 550 010

**$\overline{\text{DL}}$ X** = 1 000 (500 + 50) + 10 = 550 010

### *3.6-. Los Chinos*

El pueblo chino también invento su propio sistema de numeración hacia el año 1500 a. C., era un sistema híbrido que combinaba el principio aditivo con el multiplicativo en base diez, y se debía tener en cuenta el orden de escritura, ya fuera vertical (abajo hacia arriba) u horizontal (de izquierda a derecha). Emplea una serie de trece ideogramas hasta la decena, centena, millar y decena de millar, utilizando combinaciones que se combinaban entre si hasta obtener la cifra deseada, en la Figura se muestran los ideogramas.


A la hora de representar un número, los chinos proceden por adición y multiplicación a la vez. Por ejemplo:




Conocían bien las *fracciones*, siendo capaces de obtener el mínimo común denominador de varias de ellas. Pero tenían preferencia por su escritura decimal. Los *números negativos* también fueron usados por los chinos, y probablemente sin muchos problemas, ya que estaban acostumbrados a calcular utilizando dos tipos de varillas, unas de color rojo para los positivos y otras de color negro para los negativos.

También estudiaron a fondo el número □, dando una aproximación de él que no se vio superada hasta el siglo XV.

Fue en el siglo VIII d.C. cuando los sabios chinos introdujeron un signo especial para escribir la ausencia de unidades (representado por un pequeño círculo). La idea, sin lugar a dudas, la tomaron de los matemáticos de la civilización India.

Es a partir de este momento cuando comenzaron a representar *números fraccionarios e irracionales* de una forma similar a la actual occidental.

### *3.7-. Los Hindúes*

El sistema de numeración hindú es el que hemos heredado hoy en día. Comenzaron en el siglo III a.C. con nueve cifras, propias de la escritura *brahmi*.

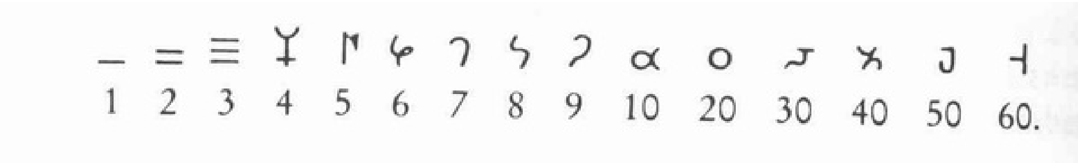
Los hindúes dominaron por completo el arte de contar, en su poema épico del *Mahabarata* se cita la no despreciable cifra de $24 \times 10^{40}$ que representa el número de divinidades existentes. Hasta los siglos VI yb VII d.C. el principio de notación numérica fue muy rudimentario.

Se cree que el sistema de numeración posicional y el concepto de cero aparecieron en el siglo V d.C. ya que el documento *Lokavibhaga* (tratado de cosmología). Y fue en el año 510 cuando el astrónomo indio Aryabhata inventa una notación numérica que precisa de un conocimiento perfecto del cero y del principio de posicionamiento en base decimal. Esta notación le permite realizar fácilmente raíces cuadradas y cúbicas.

En el año 628, el matemático y astrónomo *Brahmagupta* utiliza asiduamente este sistema de numeración posicional. Describe métodos de cálculo con las 9 cifras y el cero (muy similares a los actuales). Da las reglas algebraicas fundamentales, de números positivos y negativos, en las que el cero está presente como concepto matemático, y define el *infinito matemático* como el inverso del cero. Fue en este momento cuando se formaliza el uso de los números negativos.

En el año 875-876 se realizan las inscripciones de *Gwalior*. Son inscripciones en piedra propiamente indias donde aparece por primera vez el cero en forma de un pequeño círculo.

La importancia de este método incide en que la posición del dígito o cifra numérica es significativa. Mediante este sistema es posible escribir cualquier número usando tan solo diez (10) dígitos, o sea que es un sistema de numeración de base diez o decimal. Los hindúes eran hábiles matemáticos, estos resolvieron un gran problema al inventar el símbolo del cero (0) denominándolo *sunya*, las cifras utilizadas por los hindúes se convirtieron en las cifras que se utilizan actualmente




***SISTEMA DE NUMERACIÓN HINDÚ***

### *3.8-. Los Árabes*

La civilización árabe sostuvo contactos culturales con los hindúes, los griegos del Imperio Bizantino y los egipcios, donde adquirieron el conocimiento por medio de las traducciones de las grandes obras de Euclides, Ptolomeo, Arquímedes, Aristóteles, Diofanto, etc. al idioma árabe. El sistema numérico actual (llamado arábigo) no fue inventado por los árabes, sino por los hindúes, ellos recogieron este gran conocimiento y lo introdujeron en Europa, al cero lo llamaron *céfer*, que en el idioma árabe significa *vacío*.

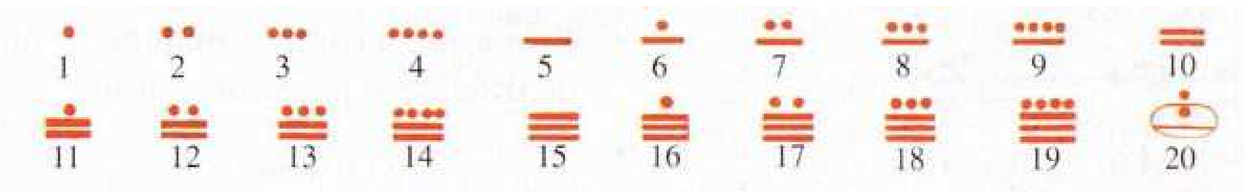
Este nuevo sistema de numeración muy lentamente fue llegando a occidente reemplazando a los números romanos, que dominaron por muchos siglos. Aunque el primer manuscrito europeo que utilizó los numerales árabes data del año 976 d.C., ya en el año 1500 d.C. la aritmética explicaba el sistema de numeración arábigo con todo lujo de detalles.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

***SISTEMA DE NUMERACIÓN ÁRABE***

### *3.9-. Los Mayas*

Los Mayas habían desarrollado una floreciente civilización en América central, practicaban el comercio y la agricultura por medio de las observaciones solares, teniendo un avanzado sistema numérico en uso por los años 400 – 300 a.C., su sistema tiene alguna semejanza con el romano aunque en algunos aspectos es superior. Conocieron el cero y su sistema de numeración es de base veinte o vigesimal pero posicional, utilizaban el cinco como base auxiliar.

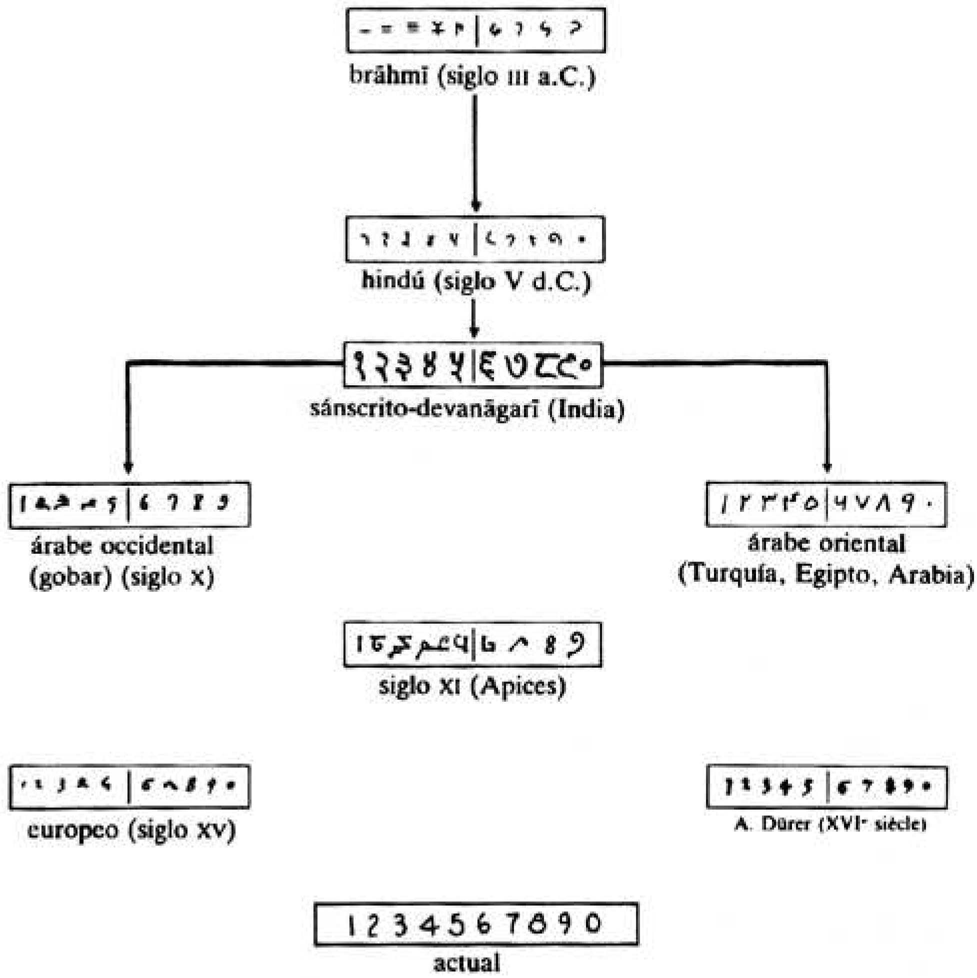


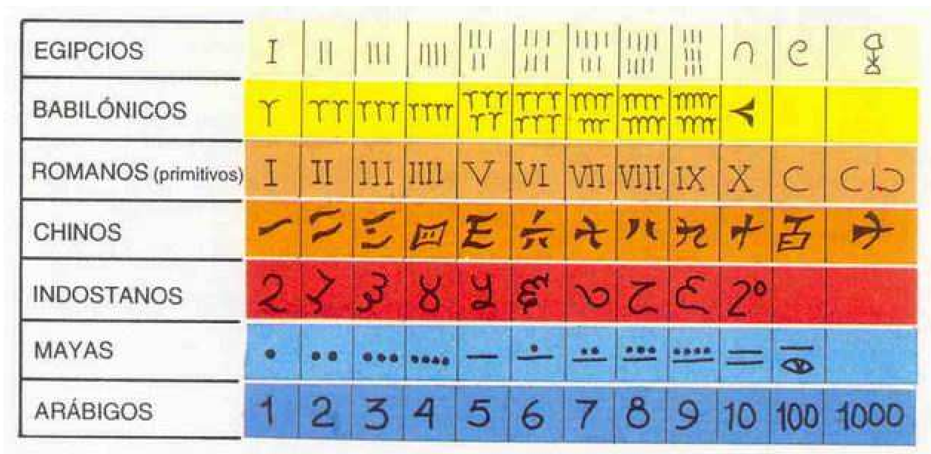

***SISTEMA NUMÉRICO MAYA***

El sistema de numeración era posicional, escribían de arriba hacia abajo, y tenían una irregularidad: el tercer nivel no correspondía al $20^2$ (=20x20) sino al 360 (=18x20).

Sólo sucedía en ese nivel ya que el cuarto y sucesivos era el anterior multiplicado por 20 (así, el cuarto nivel era 360x20=7200). Para el caso en los que faltaba un número en una posición, los especialistas mayas inventaron el cero, y lo representaron mediante una concha o caparazón de caracol.

**Genealogía de nuestro sistema de numeración**



## 4-. SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO. PROBLEMAS QUE RESUELVEN

Hasta ahora hemos visto como en las diferentes culturas se formalizó la acción de contar, creando sistemas de numeración. Al final prevaleció el sistema inventado por los hindúes, que consistía en los dígitos del 1 al 9 y otro para el cero siendo un sistema de numeración posicional en base 10. Ahora vamos a ver como surgieron los diferentes conjuntos de números tal cual los conocemos.

### *4.1-. Requisitos teóricos de dichas ampliaciones*

Las ampliaciones algebraicas de los distintos conjuntos numéricos, a partir del de los Números Naturales, el más sencillo, responden a una serie de objetivos:

a-. El conjunto construido como ampliación respetará las operaciones, orden y estructura algebraica del anterior; salvo en el caso de los Reales a los Complejos, último cuerpo numérico que no está totalmente ordenado.

b-. Cierto tipo de problema algebraico, o ecuación, deberá ser resoluble en la ampliación, permitiendo así una nueva operación.

c-. La extensión contendrá un subconjunto isomorfo al conjunto original, mediante los morfismos de inclusión.

### *4.2-. Los números naturales: justificación*

Ya hemos dicho que el concepto de número natural se pierde en la antigüedad, y está estrechamente ligado a la naturaleza y actividades cotidianas del hombre. Matemáticamente, existen varias vías para su construcción: una axiomática, vía seguida por el Matemático Peano en el siglo XIX, y otra conjuntista, a través de la noción de “cardinal” y de la relación de “coordinabilidad” (Cantor, Frege, Rusell).

*Axiomática de Peano.*

Los axiomas de Peano no se ocupan del significado de "número natural", sino que lo suponen y pretenden encontrar un sistema simple de axiomas que caractericen los números naturales y nos permitan deducir a partir de estos, todas las propiedades de los números naturales, utilizando las reglas de la lógica. Se trata, pues de una vía más artificial.

Supuesta la existencia del conjunto N con infinitos elementos, que denotaremos por 1, 2, 3…, los cinco *axiomas de Peano* son los siguientes:

1. El 1 es un número natural.
2. Si $n$ es un número natural, entonces el sucesor de $n$ también es un número natural.
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales $n$ y $m$ con el mismo sucesor, entonces $n$ y $m$ son el mismo número natural.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. Este es el *axioma de inducción*, y captura la idea de *inducción matemática.*

Hay un debate sobre si considerar al 0 como número natural o no. Generalmente se decide en cada caso, dependiendo de si se lo necesita o no.

*Punto de vista algebraico.*

N es un semianillo abeliano con unidad, con la suma y el producto habituales, ordenado totalmente. Pero hay un problema en N: únicamente podemos "restar" en caso de que el minuendo sea mayor que el sustraendo, o sea, $x + b = a$ admite solución solo si $a>b$. Necesitamos pues otro conjunto numérico que extienda a N y en el que si exista solución a dicho problema.

### *4.3-. El conjunto de los números enteros*

En la vida real, el hombre se percató de la necesidad de expresar las cantidades de magnitudes que presentaban un doble sentido: uno positivo, otro negativo, dentro de un sistema de medida. Los números negativos antiguamente conocidos como "números deudos" o "números absurdos", datan de una época donde el interés central era la de convivir con los problemas cotidianos a la naturaleza.

Las primeras manifestaciones de su uso se remontan al siglo V, en oriente (China), y no llega hasta occidente hasta el siglo XVI. En oriente se manipulaban números positivos y negativos, estrictamente se utilizaba los ábacos, usando tablillas o bolas de diferentes colores, y también varillas de color rojo (negativos) y negro (positivo).

La formalización de los números enteros es mucho más artificial que la de los racionales, de modo que a lo largo de la Historia no fue hasta el s. XVI cuando apareció, debido a las dificultades que entrañan para la mente humana. La introducción de los números negativos en Europa la realiza *Nicolas Chuquet*, matemático francés. En su obra titulada *Triparty en la science des nombres* utiliza con habilidad tanto el cero como los números negativos de origen hindú, siendo publicada en 1484. En la primera parte de su obra realiza operaciones aritméticas con números enteros, utilizando las cuatro operaciones fundamentales suma, resta, producto y división.

Hubo que esperar al s. XIX para que Weierstrass diera el modelo de los números enteros, definiéndolos como clases de pares de naturales mediante una relación de equivalencia obvia que permitía la "resta" de naturales. A continuación aparece un sucinto resumen del proceso matemático de construcción:

Existe, no obstante, un problema sin solución en Z: la ecuación $ax = b$, con a no nulo, admite solución únicamente cuando b es múltiplo de a. Debido a esto, en cualquier otro caso, necesitaremos de otro cuerpo que extienda a Z en el que sí exista solución a dicha ecuación.

### *4.4-. Las fracciones y los números racionales*

Existen dos géneros de razones que nos llevan a generalizar el concepto de número entero al de racional: el problema de la medida y su expresión numérica, y dar solución al problema de la división exacta en Z.

- Para el primero de ellos: para representar una cantidad de medida, basta indicar el número "m" de unidades que contiene, y la especie de estas unidades, o sea, el número "n" en que se divide el todo. Lo que representaremos por la fracción "m/n", siendo "m" el numerador y "n" el denominador.

- ❖ Para el segundo de ellos, construimos el conjunto Q de los números racionales a partir del siguiente proceso.

Podemos concluir indicando que Q, con la suma y producto definidos, es un *cuerpo conmutativo, ordenado y arquimediano*; justamente el cuerpo de fracciones de Z. Sin embargo, es *incompleto*: existen conjuntos no vacíos acotados superiormente cuyo supremo no pertenece a Q. Motivo por el cual habremos de ampliar aún dicho cuerpo a otro que lo contenga y de solución a dicho problema, siendo completo.

### *4.5-. Números reales*

Fue en el año 1872 cuando cinco matemáticos (*Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind*) dieron con la definición formal de número real. Tanto la definición axiomática como la de las clases de equivalencia de *sucesiones de Cauchy*, son laboriosas y artificiales. El origen de los números reales es más sencillo: Q es un cuerpo incompleto, necesitamos de otros números para representar ciertas medidas y magnitudes "no racionales"; que los pitagóricos de la antigua Grecia llamaban "incomensurables" y nosotros hoy día llamamos "números irracionales"[3]. Números que, como su nombre indica, no pueden expresarse como una fracción.

El problema fundamental de estos matemáticos griegos fue el de la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1; dicha diagonal, por el teorema de pitágoras, es "raíz de 2".

*Teorema: Raíz de dos es un número irracional.*

Dem. La demostración comienza suponiendo que raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, es decir, debe ser igual a una fracción así: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de *p* y *q* es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son primos relativos. Elevamos al cuadrado y operando queda: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$

Por tanto $p^2$ debe ser múltiplo de 2, lo que implica que *p* también es un múltiplo de 2. Es decir, $p = 2k$ para un cierto *k*. Sustituimos este valor de *p* en la expresión anterior y simplificamos un 2 de esa igualdad:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

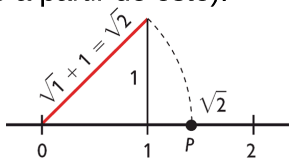
Esa expresión nos asegura que $q^2$ es múltiplo de 2, y por tanto también lo es *q*. Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que *p* y *q* no tenían factores comunes (es decir, mcd(p,q) = 1) y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen al 2 como factor común, y por tanto su mcd debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos.

Estos números formaban una categoría más bien imprecisa, debido a que los sistemas de numeración de la época no resultaban ser los más adecuados. Los

[3] Los *números irracionales* fueron construidos por Dedekind, mediante el concepto de "Cortadura", en el s. XIX.

europeos, beneficiándose del sistema de numeración posicional hindú de base 10 que habían adoptado fueron capaces de definirlos con precisión: *esos números podían expresarse en forma decimal, siendo infinitas las cifras tras la coma, sin que se reprodujeran nunca en el mismo orden*. Esa era la diferencia que tenían con los números racionales.

Desde el punto de vista geométrico, el problema de la medida a que hemos aludido es el siguiente: todo racional puede representarse como punto en la recta, que fijando un origen, será la medida del segmento OP. Hay, no obstante, segmentos que no tienen medida, pues no contienen un número exacto de veces a otro de su misma especie adoptado como "unidad" (o a partir de este).




Por tanto, la extensión de Q a R también se ve motivada ya que no siempre son posibles las operaciones inversas a de la potenciación, a saber: la *radicación* y la *logaritmización*.

Concluimos indicando que **R = Q** U **I**, siendo una unión disjunta, admitiendo una representación gráfica en un recta "continua" (*Axioma de Cantor*). Esto indica su completitud: *toda sucesión de Cauchy en R es convergente en R*, o equivalentemente, *todo conjunto acotado superiormente admite un supremo en R (*igual para inferiormente).

Aunque R, con la suma y el producto habituales, sea un cuerpo conmutativo con unidad, completo y arquimediano, y que contiene a Q, todavía tiene un problema sin solución: **en R no podemos elevar un número negativo a un exponente fraccionario con denominador par, ni a un exponente irracional**. Por ello deberemos ampliar dicho conjunto a otro en el que sí tenga solución dicho problema.

### *4.6-. Números complejos*

El concepto de "número complejo" no surge como una necesidad real del hombre para conocer y observar el universo; sino de una necesidad puramente algebraica, para la resolución de ecuaciones. Si bien el desarrollo de la "Teoría de Números Complejos" y la "Teoría de Funciones Complejas" tienen en la actualidad numerosas aplicaciones en la Física y la Ingeniería (por ejemplo, para describir circuitos eléctricos y ondas electromagnéticas, en la *ecuación de onda de Schrödinger*, fundamental en la teoría cuántica del átomo; en el diseño de alas de avión).

El primero en introducir los números complejos es **Cardano,** que en año 1545 publica su obra *Ars Magna*, en la que explica como resolver los diferentes casos de **ecuaciones cuadráticas y cúbicas**.

Por ejemplo, se planteó el siguiente problema: dividir un segmento de longitud 10 en dos trozos tales que el rectángulo cuyos lados tienen la longitud de esos trozos tenga área 40. Si los dos trozos miden x y 10 − x, la ecuación que plantea el problema es: $x(10 - x) = 40$.

El propio **Cardano** admite que el problema no tiene solución, ya que el rectángulo de mayor área que se puede construir, un cuadrado, correspondería a la división del segmento en dos iguales de longitud 5, y tendría, por tanto, área 25. Aplicando las formulas de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, Cardano obtiene $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ como longitudes de los segmentos. Desde luego, afirma que tales soluciones son “imposibles”, porque involucran la raíz cuadrada de números negativos; sin embargo, si uno las multiplica,

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$$

que es, efectivamente, el área buscada. Así que concluye que, de alguna manera “sutil” ambas expresiones son solución de la ecuación, pero se apresura a denominar “quantitas sophistica”, es decir, algo así como “numero formal”, a la expresión $\sqrt{-15}$.

En cuanto al estudio de las cúbicas, los algebristas **italianos Ferro, Tartaglia** y el propio **Cardano** encontraron las *fórmulas de Ferro- Tartaglia-Cardano* para la resolución de dichas ecuaciones cúbicas, apareciendo raíces cuadradas negativas. Las fórmulas de Cardano aplicadas a la cúbica:

$$x^3 = px + q,$$

dan como una solución la expresión

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{d}}, \qquad d = (q/2)^2 - (p/3)^3.$$

A través de un ingenioso razonamiento, **Bombelli** obtiene propiedades de los números *complejos conjugados*, y los aplica a la resolución de cúbicas. La primera manipulación algebraica, aportada por **Bombelli**, aparece al resolver $x^3 = 15x + 4$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

El propio Cardano había concluido de este resultado que sus fórmulas no eran aplicables a este caso; sin embargo, Bombelli razona de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(2 \pm \sqrt{-1})^3 &= 2^3 \pm 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 \pm (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \pm (-\sqrt{-1}) = 2 \pm 11\sqrt{-1} = 2 \pm \sqrt{-121},\end{aligned}$$

de donde concluye que

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

Entonces

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

que es, en efecto, la una solución de la ecuación. Con esta manipulación Bombelli salva el álgebra de Cardano y aporta la primera manipulación algebraica de números complejos para resolver un problema de la historia.

Algunos genios como **Newton, Leibnitz y Descartes** nunca los comprendieron. En 1637, Descartes, en el apéndice *La geometrie* de su obra *Discourse de la methode,* afirma:

> *“Ni las raíces verdaderas ni las falsas son siempre reales; a veces son* imaginarias; *es decir, mientras que uno puede imaginar tantas raíces de cada ecuación como grado haya asignado, no siempre hay una cantidad definida que corresponda a cada raíz imaginada.”*

Y con esta frase bautiza como imaginarias las expresiones que contienen raíces cuadradas de números negativos. Pero a pesar de que los algebristas parecen dispuestos a admitir la existencia de estos "engendros" para salvar el Algebra, los números "imaginarios" tienen muchos detractores. Y no les falta razón, dado que la manipulación de las raíces de números negativos no es consistente; véase, si no, este sencillo ejemplo:

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

El primer gran paso hacia la instalación definitiva de los números complejos en la matemática se debe a **Euler (1707–1783).** Este hizo una cosa muy sencilla, y al mismo tiempo de un enorme alcance: definió un nuevo número, al que llamo ***i*** (imaginario):

$$i = \sqrt{-1}$$

y le dio el mismo estatus de existencia que a los números reales. De él afirmo que no era ni mayor, ni menor, ni igual a ningún número real, y definió las reglas de suma y multiplicación de este numero que hoy conocemos. En particular la conocida $\mathbf{i^2 = -1}$.

Con estas herramientas Euler empieza a manipular expresiones complejas con una maestría sin precedentes, y nos aporta muchas de las mayores contribuciones al análisis. Entre sus mayores aportaciones esta la denominada *formula de Euler,*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que define la exponencial de un numero complejo y la relaciona con las funciones trigonométricas. La manera en que la demuestra es la siguiente. La *serie de Taylor* de la exponencial es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si sustituimos **z = iθ** y separamos los términos pares de los impares en la serie,

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $i^2 = -1$, $i^{2n} = (-1)^n$ y $i^{2n+1} = i(-1)^n$, así que

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

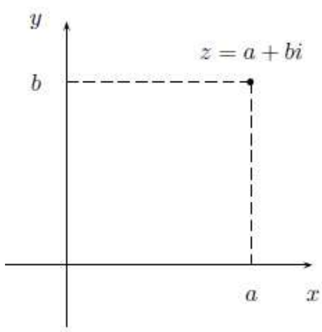
Basta identificar las series del coseno y del seno,

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y ya tenemos la **formula de Euler**, de la que, como caso particular, Euler obtiene su famosa ecuación

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que relaciona cinco de los números mas importantes de la matemática: 0, 1, e, i y π.



La idea correcta de la representación geométrica de un número complejo **z = a + bi** en el Plano Cartesiano, fue descubierta por dos matemáticos en forma independiente: el danés **C. Wessel** y posteriormente el suizo **J. Argand**, en una obra publicada en 1806. A partir de entonces dicha representación se conoce con el nombre de *Diagrama de Argand*:

El ultimo paso en este proceso lo dio **Gauss (1777– 1855),** quienes introdujeron el *plano complejo,* es decir, una representación de los números complejos **x + iy** en la que x es la coordenada sobre un eje cartesiano e y la coordenada sobre el eje perpendicular. Todas las operaciones con complejos tienen su contrapartida geométrica en el plano. Además, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice *que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.*

A partir de la forma binómica **z = a ± bi**, siendo a, b reales, se puede establecer el isomorfismo de grupos **$R^2$ ~ C**, como **(a,b) → a ± bi**. Podemos así expresar:

$$\mathbb{C} = \{\, a + \mathrm{i}b \mid \text{con } a \text{ y } b \text{ números reales e } i \text{ un número tal que } i^2 = -1 \,\}$$

Obviamente **R** isomorfo a una de las partes de **C** (números complejos cuya parte imaginaria es nula) sin más que definir:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

**a → a + 0i**

Las operaciones suma y producto que se pueden definir en C, lo dotan de estructura de **Cuerpo conmutativo** y **R-espacio vectorial** (con el producto por escalares reales), si bien en C no es posible definir un *orden total*.

Desde ese momento se inicia un desarrollo sostenido de la ***Teoria de las Funciones Complejas***, de la mano de grandes matemáticos como **Hamilton** y **Cayley**, quienes crearon los *sistemas hipercomplejos*, **Cauchy**, quien sienta las bases del calculo diferencial e integral de las funciones complejas y finalmente el matemático alemán **Riemann**, quien demostró todo el poder que encierran los números complejos en el estudio de la geometría y amplio los horizontes de la matemática, creando una nueva ciencia llamada la ***Topología***.

### *4.7-. Otras ampliaciones: cuaterniones*

Estos números surgieron en un intento de generalizar los números complejos en la misma dirección de ideas y propiedades –mismas estructuras y propiedades matemáticas– que los anteriores conjuntos de números. Los **cuaterniones** fueron descubiertos por **Hamilton** en 1843. Hamilton buscaba formas de extender los números complejos (que pueden interpretarse como puntos en un plano) a un número mayor de dimensiones. No pudo hacerlo para 3 dimensiones, pero para 4 dimensiones obtuvo los cuaterniones.

Existe otro grupo de números: los *cuaternios* o *números cuaterniones*. Se construyen añadiendo a los números reales no una parte imaginaria, como en el caso de los números complejos, sino tres; después se definen –no se hace aquí adecuadamente las operaciones de suma y producto entre ellos:

$$K^4 = \{\, a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d \mid \text{con } a, b, c \text{ y } d \text{ números reales e i, j y k números tales que } i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ y además } ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i \text{ y } ki = -ik = j \,\}$$

Las relaciones de inclusión entre todos los anteriores tipos de números son: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ (porque $\mathbb{R}=\{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}\cup\mathbb{Q}$ ), $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ y, tomando algunos coeficientes nulos en la definición de cuaternios, $\mathbb{R}\subset\boldsymbol{K}^4$ y $\mathbb{C}\subset\boldsymbol{K}^4$.

En el caso de los cuaternios **no es válida la propiedad conmutativa**. Esta renuncia a la conmutatividad tiene como consecuencia que no se pueda construir un análisis matemático basado en los cuaternios, cosa que sí sucede con los números complejos, lo que provee a estos de gran utilidad.

Por el contrario, entre las limitadas aplicaciones de los cuaternios está la de describir bien las rotaciones en los espacios euclídeos de tres y cuatro dimensiones. Del mismo modo que los números reales y los complejos constituyen espacios vectoriales euclídeos de dimensiones uno y dos, respectivamente, los cuaternios forman un espacio vectorial euclídeo de dimensión cuatro.

Finalmente, cabe indicar que no es posible otra generalización, como demostró **Frobenius:**

**Teorema** (Frobenius)

Sea **L** un cuerpo algebraico que contiene como subcuerpo al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Supongamos que cada elemento de **L** conmuta, respecto a la multiplicación, con los elementos de $\mathbb{R}$, y que todo elemento $x$ de **L** tiene la forma

$$x=x^0+x^1 i_1+\cdots+x^n i_n \quad (*)$$

donde $x^0, x^1, \ldots, x^n$ son números reales que constituyen las coordenadas de la magnitud $x$ de modo que $x$ es un vector con $(n+1)$ dimensiones. De esta manera, se está suponiendo que las magnitudes $1, i_1, \ldots, i_n$ forman una base del espacio vectorial **L**. Para definir la multiplicación en **L** es suficiente formular las reglas de multiplicación de las magnitudes $i_1, \ldots, i_n$, de tal manera que todo producto $i_r i_s$ tenga la forma (*).
Resulta, entonces, que o bien **L** coincide con el campo $\mathbb{R}$, es decir, es isomorfo al campo de los números reales, o bien es isomorfo al campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, o bien es isomorfo al cuerpo $\boldsymbol{K}^4$ de los cuaternios.

## BIBLIOGRAFÍA.

PONTRIAGUIN, LIEV SEMIÓNOVICH (2005). *Generalizaciones de los números.* Moscú. Editorial URSS.

BOYER, CARL M. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial.

IFRAH, GEORGES (2008). *Historia Universal de las Cifras.* Ed Espasa.

BOURBAKI, N. (1990). *Elementos de historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad