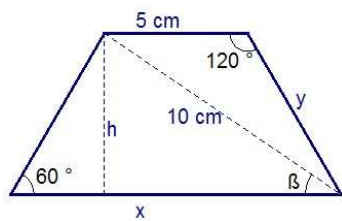


**Ejercicio 1.**

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo  $60^\circ$ . Hallar el área y el perímetro del trapecio.



Si el trapecio es isósceles  $\Rightarrow$  sus ángulos son iguales dos a dos y suplementarios entre ellos  $\Rightarrow$  tendrá dos ángulos de  $60^\circ$  y otros dos de  $120^\circ$ .

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado  $y$ :

$$10^2 = 5^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot y \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow 100 = 25 + y^2 + 5y \Rightarrow y^2 + 5y - 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-5 + 5\sqrt{13}}{2} \text{ cm} \quad (y \approx 6,5 \text{ cm})$$

Ahora aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo  $\beta$  y después la base  $x$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{y \cdot \sin 60^\circ}{10} \approx 0,564 \Rightarrow \beta = \arcsen(0,564) = 34,34^\circ \Rightarrow 180^\circ - 60^\circ - 34,34^\circ = 85,66^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 85,66^\circ} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot \sin 85,66^\circ}{\sin 60^\circ} \Rightarrow x \approx 11,5 \text{ cm}$$

Perímetro del trapecio  $P \approx 5 + 2 \cdot 6,5 + 11,5 = 29,5 \text{ cm}$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y \cdot \sin 60^\circ \approx 5,64 ; A_{\text{trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = \frac{11,5+5}{2} \cdot 5,64 = 46,53 \text{ cm}^2$$

**Ejercicio 2.**

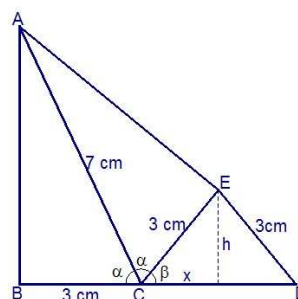
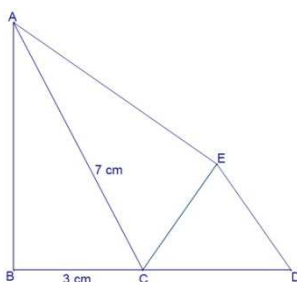
Resuelve la ecuación trigonométrica:  $\text{sen}^2 2x - \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}^2 2x - \text{sen } x \cdot \cos x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2\text{sen}^2 2x - 2\text{sen } x \cdot \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen}^2 2x - \text{sen } 2x - 1 = 0 \quad (\text{sen } 2x = t)$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \Rightarrow x = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \\ \text{sen } 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 210^\circ \Rightarrow x = 105^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 330^\circ \Rightarrow x = 165^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 570^\circ \Rightarrow x = 285^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 690^\circ \Rightarrow x = 345^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

**Ejercicio 3.**

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además  $ED=EC$ ,  $BC=3 \text{ cm}$ ,  $CA=7 \text{ cm}$ . Hallar el área del triángulo CED.



$CED$  es un triángulo isósceles  $\Rightarrow$  la altura correspondiente al vértice  $E$  divide la base  $CD$  en dos partes iguales.

Para calcular el área del triángulo  $CED$  necesitamos conocer los valores de  $x$  y  $h$ .

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \operatorname{sen} \beta \quad ; \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \operatorname{cos} \beta$$

Entonces el problema se reduce a calcular las razones trigonométricas del ángulo  $\beta$ .

Por el teorema de Pitágoras  $AB = 2\sqrt{10}$  y además tenemos que  $\beta = 180^\circ - 2\alpha$

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(180^\circ - 2\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12\sqrt{10}}{49}$$

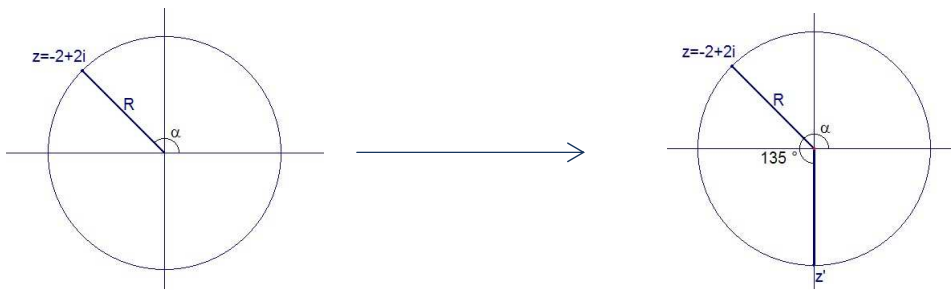
$$\operatorname{cos} \beta = \operatorname{cos}(180^\circ - 2\alpha) = -\operatorname{cos} 2\alpha = -(\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = -\left(\frac{9}{49} - \frac{40}{49}\right) = \frac{31}{49}$$

$$h = 3 \cdot \frac{12\sqrt{10}}{49} \Rightarrow h = \frac{36\sqrt{10}}{49} \quad ; \quad x = 3 \cdot \frac{31}{49} \Rightarrow x = \frac{93}{49}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = \frac{93}{49} \cdot \frac{36\sqrt{10}}{49} \Rightarrow A \approx 4,41 \text{ cm}^2$$

#### Ejercicio 4.

- Qué número complejo obtenemos al girar  $135^\circ$  el afijo del número complejo  $z = -2 + 2i$ .



$$z = -2 + 2i \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ, \text{ al ser } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \Rightarrow z = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$$

aplicar un giro de  $135^\circ$  es equivalente a multiplicar por el complejo  $1_{135^\circ} \Rightarrow z' = (2\sqrt{2}_{135^\circ}) \cdot (1_{135^\circ}) = 2\sqrt{2}_{270^\circ}$

Entonces el resultado será:  $z' = -2\sqrt{2}i$

- Cuál es la parte real del número complejo  $z = \frac{(3+2i) \cdot i^{17}}{i^{243} \cdot (1-i^7)}$ .

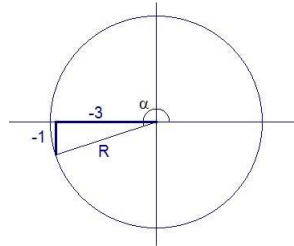
$$z = \frac{(3+2i) \cdot i^{17}}{i^{243} \cdot (1-i^7)} \Rightarrow \begin{cases} i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i^{4 \cdot 4} \cdot i = (i^4)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i \\ i^{243} = i^{4 \cdot 60 + 3} = i^{4 \cdot 60} \cdot i^3 = (i^4)^{60} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{(3+2i) \cdot i}{-i \cdot (1+i)} = \frac{3i+2i^2}{-i-i^2} = \frac{-2+3i}{1-i} = \frac{(-2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2-2i+3i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-5+i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{la parte real de } z \text{ es } \operatorname{Re} z = -\frac{5}{2}$$

**Ejercicio 5.**

Si  $\cotg \alpha = 3$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , determina, sin usar la calculadora, el valor de  $\cotg 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos(\pi + 2\alpha)$  y  $\operatorname{sen} 4\alpha$ .



$\cotg \alpha = 3$  y  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$  como vemos en la figura, podemos calcular las razones trigonométricas del

ángulo  $\alpha$  sobre el triángulo marcado, donde  $R = \sqrt{10}$ ,  $\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

$$\cotg 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{\cotg \alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \stackrel{(1)}{=} -\frac{\sqrt{1-\cos \alpha}}{\sqrt{1+\cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}} = -\sqrt{\frac{(\sqrt{10}+3)^2}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}} = -\sqrt{\frac{19+6\sqrt{10}}{1}} = -\sqrt{19+6\sqrt{10}}$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = -\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} 4\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + 2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot (2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 4 \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = 4 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} = 4 \cdot \frac{24}{100} = \frac{24}{25}$$

(1)  $\left( \text{si } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0 \right)$

**Ejercicio 6.**

Resuelve la ecuación  $(i \cdot z^3 + 64) \cdot (z^2 - (1+i)z + 5i) = 0$  y expresa las soluciones en forma binómica.

$$(i \cdot z^3 + 64) \cdot (z^2 - (1+i)z + 5i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} i \cdot z^3 + 64 = 0 \\ z^2 - (1+i)z + 5i = 0 \end{cases}$$

$$i \cdot z^3 + 64 = 0 \Rightarrow z^3 = -\frac{64}{i} \Rightarrow z^3 = 64i \Rightarrow z^3 = 64_{90^\circ} \Rightarrow z = \sqrt[3]{64_{90^\circ}} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{64} \frac{90^\circ}{3} \Rightarrow z_1 = 4_{30^\circ} \Rightarrow z_1 = 2\sqrt{3} + 2i \\ z_2 = \sqrt[3]{64} \frac{90^\circ + 360^\circ}{3} \Rightarrow z_2 = 4_{150^\circ} \Rightarrow z_2 = -2\sqrt{3} + 2i \\ z_3 = \sqrt[3]{64} \frac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} \Rightarrow z_3 = 4_{270^\circ} \Rightarrow z_3 = -4i \end{cases}$$

$$z^2 - (1+i)z + 5i \Rightarrow z = \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4 \cdot 5i}}{2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{-18i}}{2} = \begin{cases} z_4 = \frac{(1+i) + (-3+3i)}{2} \Rightarrow z_4 = -1+2i \\ z_5 = \frac{(1+i) + (3-3i)}{2} \Rightarrow z_5 = 2-i \end{cases}$$

$$\sqrt{-18i} = \sqrt{18_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{18} \frac{270^\circ}{2} = 3\sqrt{2}_{135^\circ} = 3\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = -3+3i \\ \sqrt{18} \frac{270^\circ + 360^\circ}{2} = 3\sqrt{2}_{315^\circ} = 3\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = 3-3i \end{cases}$$