9 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$

Apartado a): 1 punto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \textit{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)}{\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)}{(2+x) - (2-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)}{2x} = 2\sqrt{2}$$

Apartado b): 1 punto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = [\infty - \infty] \to \textit{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 + x\right) - \left(x^2 - x\right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = 1$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ a - 2x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real.

Planteamiento correcto: 1 punto

La función $f(x)$ *es continua en* $x = x_0 \to \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \to \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \\ \exists f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Cálculo de cada valor: 0,5 puntos

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = a - 2 \end{array}\right\} \to -1 = a - 2 \to a = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = b \end{array}\right\} \to b = -1$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{1 - x^2}$.

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f.

b) Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

c) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Apartado a): 1 punto

$1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$ $\qquad$ $Dom = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3x}{1 - x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 3x}{1 - x^2} = \left[\frac{6}{0}\right]$$

Los puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = -1$.

Apartado b): 1 punto

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{-3x}{1 + x} = -\frac{3}{2} \rightarrow x = 1 \text{ es un punto de discontinuidad evitable.}$$

Apartado c): 1 punto

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$. Se pide:

a) Especificar su dominio.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular las asíntotas, si las hubiera.

Apartado a): 1 punto

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \qquad Dom = \mathbb{R} - \{2, -3\}$$

Apartado b): 1 punto

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x = 2. \text{ Inevitable de salto infinito}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x = -3. \text{ Inevitable de salto infinito}$$

Apartado c): 1 punto

A partir del apartado anterior, vemos que la función tiene dos asíntotas verticales: $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

Por ser el polinomio del numerador de mayor grado no hay asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{aligned} m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3 + 1}{2x^3 + 2x^2 - 12x} = -\frac{1}{2} \\ n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12} + \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$