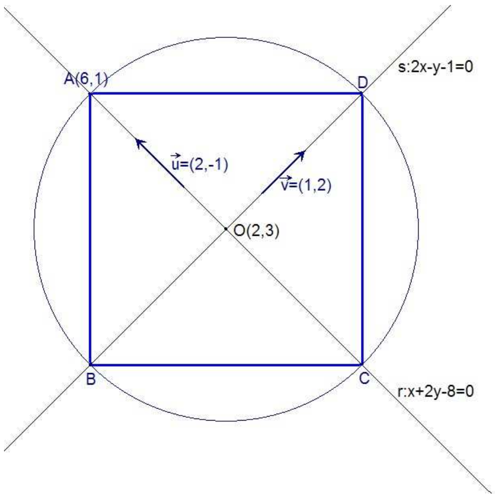
Ejercicio 1.

El punto $A(6,1)$ es un vértice de un cuadrado inscrito en la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-4x-6y-7=0$. Calcula las coordenadas de los demás vértices del cuadrado.



Ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio R

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\ ,\ desarrollando:$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \\ x^2+y^2-4x-6y-7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -2ax=-4\ ,\ a=2 \\ -2by=-6\ ,\ b=3 \end{cases}$$

Así el centro de la circunferencia es $O(2,3)$

$$O \text{ es el punto medio de } A \text{ y } C(x,y) \Rightarrow (2,3)=\left(\frac{6+x}{2},\frac{1+y}{2}\right)$$

$C(-2,5)$

Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares:
calculamos s que es perpendicular a la recta r y pasa por O

$$s\equiv\begin{cases} O(2,3) \\ \vec{v}=(1,2) \end{cases} \Rightarrow s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2} \Rightarrow s\equiv 2x-y-1=0$$

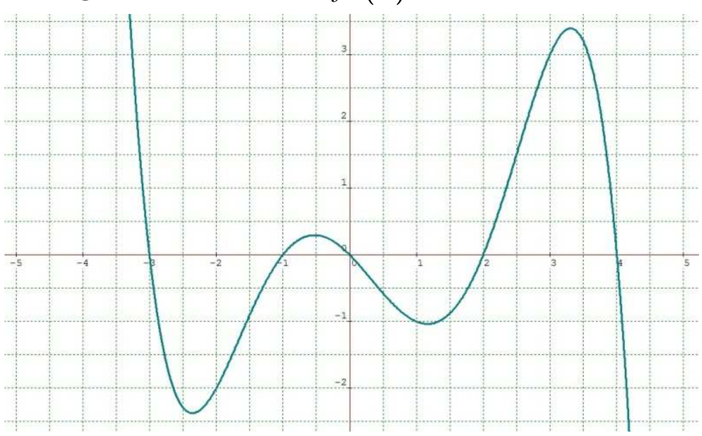
Ahora obtenemos los puntos B y D como intersección de la recta s con la circunferencia.

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2+y^2-4x-6y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ x^2+(2x-1)^2-4x-6(2x-1)-7=0 \end{cases}$$

$$x^2+4x^2-4x+1-4x-12x+6-7=0 \Rightarrow 5x^2-20x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow B(0,-1) \\ x=4 \Rightarrow D(4,7) \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Observando la gráfica de la función $f'(x)$, analiza las características de la función $f(x)$.



Cuando $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ *es creciente y eso ocurre en los intervalos* $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(2,4)$

Cuando $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ *es decreciente y eso ocurre en los intervalos* $(-3,-1)\cup(0,2)\cup(4,+\infty)$

$f'(x) = 0$ *en los puntos* $x=-3,\ x=-1,\ x=0,\ x=2$ *y* $x=4 \Rightarrow$ *en esos puntos la recta tangente a* $f(x)$ *es horizontal por tanto pueden ser puntos de máximo o de mínimo para la función* $f(x)$.

Como en $(-\infty,-3)$ $f(x)$ *es creciente y en* $(-3,-1)$ *es decreciente* $\Rightarrow$ *en* $x=-3$ *hay un máximo para la función* $f(x)$. *De igual modo en* $x=0$ *y* $x=4$ *habrá máximos de la función* $f(x)$.

Como en $(-3,-1)$ $f(x)$ *es decreciente y en* $(-1,0)$ *es creciente* $\Rightarrow$ *en* $x=-1$ *hay un mínimo para la función* $f(x)$. *De igual modo en* $x=2$ *habrá otro mínimo de la función* $f(x)$.

En los puntos $x\simeq-2{,}4$; $x=-\dfrac{1}{2}$; $x\simeq1{,}2$; $x\simeq3{,}3$ $f'(x)$ *tendrá tangente horizontal* $\Rightarrow$ *su derivada en esos puntos es cero, es decir la segunda derivada de* $f(x)$ *se anula* $\Rightarrow$ *en esos puntos* $f''(x)=0$ *y sin embargo* $f'(x)\neq 0 \;\Rightarrow$ *en* $x\simeq-2{,}4$; $x=-\dfrac{1}{2}$; $x\simeq1{,}2$; $x\simeq3{,}3$ $f(x)$ *presenta puntos de inflexión (cambios de curvatura) no de silla.*

Ejercicio 3.

Sean los vectores $\vec{u}_1=(1,-2)$ y $\vec{u}_2=(3,1)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, y $\vec{v}$ un vector de coordenadas $\vec{v}=(-2,3)$ en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

- Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.
- Encuentra las coordenadas, en la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, de un vector $\vec{w}$ que sea perpendicular a $\vec{v}$.

Como $\vec{u}_1$ *y* $\vec{u}_2$ *están expresados en la base canónica (ortonormal)* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, *el cálculo de sus módulos y producto escalar queda simplificado:*

$$\left(\begin{array}{l}\vec{u}=(x,y)\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\cdot(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)}=\sqrt{x^2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)+2xy(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+y^2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)}=\sqrt{x^2+y^2}\\ \left.\begin{array}{l}\vec{u}=(x,y)\\ \vec{v}=(x',y')\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2)=xx'(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)+(xy'+x'y)(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+yy'(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)=xx'+yy'\end{array}\right)$$

$\vec{u}_1=(1,-2) \;\Rightarrow\; |\vec{u}_1|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$\vec{u}_2=(3,1) \;\Rightarrow\; |\vec{u}_2|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=1\cdot3+(-2)\cdot1=1$

$\vec{v}=(-2,3)$ *en la base* $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ *que no es ortonormal, con lo que:* $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$|\vec{v}|=\sqrt{(-2\vec{u}_1+3\vec{u}_2)\cdot(-2\vec{u}_1+3\vec{u}_2)}=\sqrt{4(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1)-12(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)+9(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2)}=\sqrt{4\cdot5-12\cdot1+9\cdot10}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

También podemos expresar el vector $\vec{v}$ *en la base canónica* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\} \Rightarrow$
$\vec{v}=(-2,3)$ *en la base* $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\} \Rightarrow \vec{v}=-2\vec{u}_1+3\vec{u}_2=-2(\vec{e}_1-2\vec{e}_2)+3(3\vec{e}_1+\vec{e}_2)=7\vec{e}_1+7\vec{e}_2$ *entonces*
$\vec{v}=(7,7)$ *en la base* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\} \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

Ahora buscamos $\vec{w}$ *en la base* $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$*, tal que* $\vec{w}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v}=0$ *(habrá infinitos vectores)*
$\vec{w}=x\vec{u}_1+y\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v}=(x\vec{u}_1+y\vec{u}_2)\cdot(-2u_1+3\vec{u}_2)=-2x(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1)+(3x-2y)(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)+3y(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2) \Rightarrow$
$\vec{w}\cdot\vec{v}=-10x+(3x-2y)+30y \Rightarrow -10x+(3x-2y)+30y=0 \Rightarrow -7x+28y=0 \Rightarrow x=4y$
con lo que el vector $\vec{w}$ *tendrá la primera coordenada cuádruplo de la segunda y, por ejemplo,*
para $y=1 \Rightarrow \boxed{\vec{w}=(4,1) \text{ en la base } \{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}}$ *con* $\vec{w}\perp\vec{v}$*.*

Ejercicio 4.

La recta de ecuación $y=2x-7$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ en el punto $x=1$. Calcula a y b.

La recta $y=2x-7$ *y la función* $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ *son tangentes en* $x=1 \Rightarrow$ *ese punto es común para ambas funciones. En la recta si* $x=1 \Rightarrow y=-5$*, luego el punto de tangencia es* $P(1,-5)$ *con lo que debe cumplirse que* $f(1)=-5$
Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ *en* $x=1$ *es* $2 \Rightarrow f'(1)=2$.
$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases} f(1)=-5 \Rightarrow 1+a+b+2=-5 \\ f'(1)=2 \Rightarrow 3+2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-8 \\ 2a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-15 \end{cases} \quad y \quad \boxed{f(x)=x^3+7x^2-15x+2}$$

Ejercicio 5.

Obtén la función derivada de las siguientes funciones:

$a)\ y=(2x-3)^5 \Rightarrow y'=5\cdot(2x-3)^4\cdot 2 \Rightarrow y'=10\cdot(2x-3)^4$

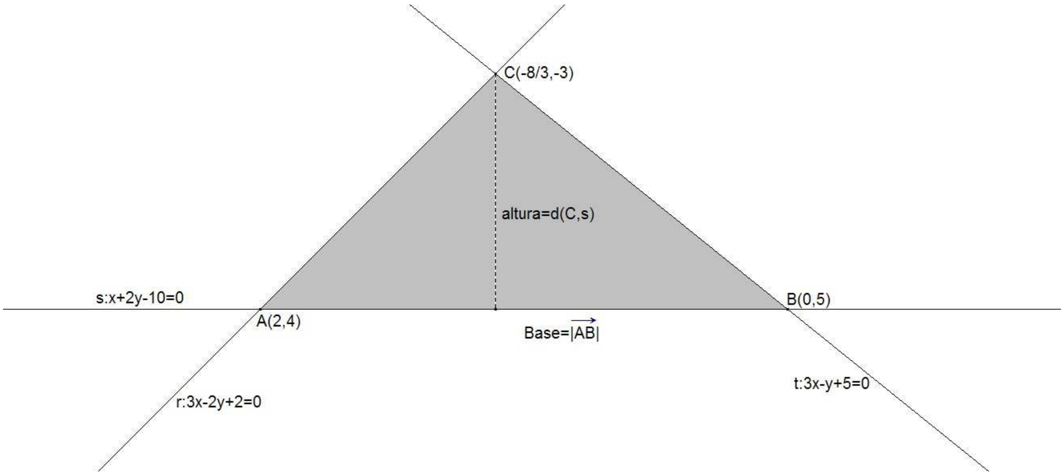
$b)\ y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow y'=\dfrac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$c)\ y=tg\,5x \Rightarrow y'=(1+tg^2 5x)\cdot 5 \Rightarrow y'=5\cdot(1+tg^2 5x)$ / *también* $y'=\dfrac{5}{cos^2 5x}$

$d)\ y=(x^2+3x)\cdot\ln(x+3) \Rightarrow y'=(2x+3)\cdot\ln(x+3)+(x^2+3x)\cdot\dfrac{1}{x+3} \Rightarrow y'=(2x+3)\cdot\ln(x+3)+x$

Ejercicio 6.

Un triángulo ABC tiene sus lados sobre las rectas $r \equiv 3x - 2y + 2 = 0$, $s \equiv x + 2y - 10 = 0$ y $t \equiv 3x - y + 5 = 0$. Calcula el área y el perímetro del triángulo.



Calculamos los vértices del triángulo:

$$A = s \cap r \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2,4) \quad / \quad B = s \cap t \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0,5)$$

$$C = t \cap r \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{8}{3}, -3\right)$$

$$\text{Tomamos como base el lado } AB. \quad \overrightarrow{AB} = (-2,1) \Rightarrow \text{medida de la base} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{medida de la altura} = d(C,s) = \frac{\left|-\frac{8}{3} + 2\cdot(-3) - 10\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{56/3}{\sqrt{5}} = \frac{56}{3\sqrt{5}}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d(C,s)}{2} = \frac{\sqrt{5}\cdot\frac{56}{3\sqrt{5}}}{2} = \frac{28}{3}\ u^2$$

$$\text{Perímetro del triángulo} = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5} + \frac{7\sqrt{13}}{3} + \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{3\sqrt{5} + 7\sqrt{13} + 8\sqrt{10}}{3}\ u$$

Ejercicio 7.

Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$

En los puntos donde $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ *es creciente*

En los puntos donde $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ *es decreciente*

En los puntos donde $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ *puede tener máximos, mínimos o puntos de silla.*

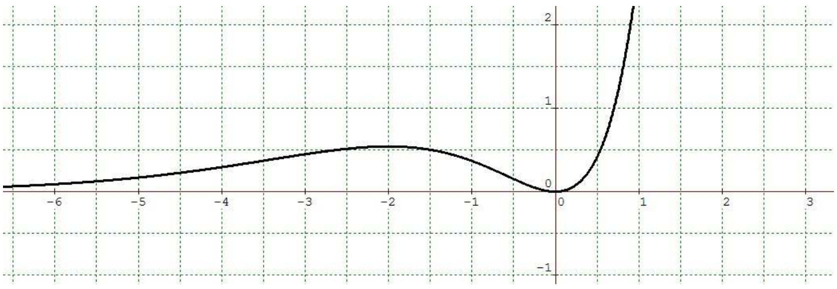
$$f(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = 0 \Rightarrow \left(2x+x^2\right)\cdot e^x = 0 \Rightarrow 2x+x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Resolvemos ahora la inecuación $2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x > 0 \Rightarrow 2x+x^2>0 \Rightarrow x(2+x)>0$

	$(-\infty\,,-2)$	-2	$(-2\,,\,0)$	0	$(0\,,+\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$x\cdot(2+x)$	$+\ \nearrow$	0	$-\ \searrow$	0	$+\ \nearrow$

Entonces $f(x)$ *es creciente en* $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ *y en* $x=-2$ *la función tiene un máximo.*
$f(x)$ *es decreciente en* $(-2,0)$ *y en* $x=0$ *la función tiene un mínimo.*



Ejercicio 8.

Estudia las discontinuidades de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ y su comportamiento cuando $x\to\infty$.

$f(x)$ *es cociente de dos funciones continuas (polinómicas) por tanto será una función continua salvo en los puntos que se anule el denominador.*

$x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x)$ *es discontinua en los puntos* $x=1$ *y* $x=3$

Analizamos las discontinuidades:

$$en\ x=1,\ \nexists f(1)\ y\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)} \to \dfrac{1}{0^-\cdot(-2)} \to +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)} \to \dfrac{1}{0^+\cdot(-2)} \to -\infty \end{cases}\quad discontinuidad\ de\ tipo\ infinito$$

$$en\ x=3,\ \nexists f(3)\ y\ \lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)} \to \dfrac{9}{2\cdot 0^-} \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2}{(x-1)(x-3)} \to \dfrac{9}{2\cdot 0^+} \to +\infty \end{cases}\quad discontinuidad\ de\ tipo\ infinito$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} \to 1$$

$y=1$ *es una asíntota horizontal de la función* $f(x)$