Tema 3. Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones

1. Ecuaciones de segundo grado. Resolución

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (la x) es la que se puede transformar en una ecuación del tipo.

$ax^2+bx+c=0$ (siendo $a\neq 0$)

1.1. Resolución por el método general

La ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene como solución o raíces las que resultan de la siguiente expresión, sustituyendo, a, b y c:

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la expresión $\Delta=b^2-4ac$ es el discrimínate y el que marca el número de soluciones:

a. Si el discrimínate es negativo ($\Delta<0$) no tiene soluciones reales (raíz negativa)
b. Si el discrimínate es cero ($\Delta=0$) una única solución (raíz doble)
c. Si el discrimínate es positivo ($\Delta>0$) dos soluciones distintas (2 raíces simples)

Demostración:

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0 \rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \rightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1.2. Resolución de la ecuaciones de segundo grado incompletas

Una ecuación es incompleta si alguno de los coeficientes b, c, o los dos son nulos. Estas ecuaciones aunque se pueden resolver por el método general se resuelven de forma más sencilla. Tres casos:

a. El término $b=0 \rightarrow ax^2+c=0$, despejando la incógnita: $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
b. El término $c=0 \rightarrow ax^2+bx=0$, factor común: $x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b/a \end{cases}$
c. Los dos son cero $\rightarrow ax^2=0$, la solución es $x=0$ (raíz doble)

Ejercicio, resolver:

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0$ → $x=\dfrac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{72-72}}{2}=3\sqrt{2}$

b) $2x^2-7x+3=0$ → $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\begin{cases} 3 \\ 1/2 \end{cases}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1 \rightarrow \frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{(x+3)(x-1)}=1$

$(x+7)\cdot(x-1)+(x^2-3x+6)=(x^2+2x-3) \rightarrow x^2+x+2=0 \rightarrow$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=no\ solución$

d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2} \rightarrow 2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)=5(x+5)(x-4) \rightarrow 5x^2+19x-102=0$

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}=\frac{-19\pm 49}{10}=\left\langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{-34}{5} \end{matrix} \right.$$

e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x$ $\rightarrow x^2-2\sqrt{3}x+3-1=0 \rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\left\langle \begin{matrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{matrix} \right.$

f) $1+(x-2)^2=1$ $\rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$

g) $9x^2-25=0$ $\rightarrow x^2=25/9 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

h) $x^2-2x=0$ $\rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow x=0, x=2$

2. Ecuaciones de grado superior (polinómicas)

Podemos resolver ecuaciones de grado superior (P(x)=0, con P(x) polinomio) transformándolas en producto de ecuaciones de primer o segundo grado igualadas a cero, es decir factorizando. Así las raíces serán las soluciones de la ecuación.

Ejemplo:

$x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0 \rightarrow x\cdot(x-4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0 \rightarrow x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4$

Ejercicio:

a) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=-\pi$, $x=1/2$, $x=7/3$

b) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=-1/5$

c) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$ $\rightarrow$soluciones $x=1$ (doble), $x=-7$, $x=1/2$, $x=-1/2$

Existen ecuaciones polinómicas de grado 4 que se pueden transformar en ecuaciones de segundo grado, son las ***ecuaciones bicuadradas:*** $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$

Se resuelven en tres pasos:

1. haciendo el cambio $x^2=t$, $x^4=t^2$ con lo que se transforma en la ecuación de segundo grado con incógnita en t ($at^2+bt+c=0$).
2. Resolvemos la ecuación de segundo grado.
3. Deshacemos el cambio de variable $x=\pm\sqrt{t}$ (solución si $t\geq 0$)

Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$

Paso1: $x^2=t \rightarrow t^2-5t+4=0$

Paso2: $t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\left\langle \begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$

Paso3 : $x=2,-2,1,-1$

Ejercicio : resolver las siguientes ecuaciones

a) **$x^4-x^2-6=0$** $\rightarrow$ solución : x= $\pm\sqrt{3}$
b) **$x^4-3x^2+2=0$** $\rightarrow$ solución x=$\pm\sqrt{2}$,±1
c) **$-x^4-4x^2-45=0$** $\rightarrow$ No soluciones reales

Otras ecuaciones transformables en ecuaciones de segundo grado: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, con $n\in N$, haciendo el cambio $x^n=t$ obtenemos una ecuación de segundo grado.

Ejemplo: $x^6-5x^3+6=0$

Paso 1: $x^3=t$, $x^6=t^2 \rightarrow t^2-5t-6=0$

Paso 2: t=3, t=2

Paso 3: $x=\sqrt[3]{3}$, $x=\sqrt[3]{2}$

3. Ecuaciones irracionales o con radicales

Una ecuación es irracional si tiene la incógnita (x) dentro de una o varias raíces, en este año sólo veremos irracionales con raíces cuadradas.

Resolución ecuaciones irracionales:

1. Se aísla un radical en un miembro de la ecuación.
2. Se eleva al cuadrado los miembros de la ecuación, eliminándose la raíz aislada.
3. Si todavía hay raíz se repite los procesos 1 y 2 hasta que ya no haya.
4. Se resuelve la ecuación resultante (polinómica)
5. Se comprueban las soluciones

Nota: la razón de comprobar es que al elevar al cuadrado pueda haber soluciones no válidas debido a que al elevar al cuadrado el signo se pierde, así $1\neq-1$ pero $(1)^2=(-1)^2$

Ejemplos

1)

$\sqrt{3x+4}-4=-2x$

$\sqrt{3x+4}=4-2x \xrightarrow{elev\,cuadrado} 3x+4=(4-2x)^2 \rightarrow$

$3x+4=16+4x^2-16x \rightarrow 4x^2-19x+12=0 \quad x=\begin{cases}4\\ 3/4\end{cases}$

Comprobación:

x=4 → $\sqrt{16}-4\neq -8$ (no solución)

x= $3/4$ → $\sqrt{\frac{25}{4}}-4=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}=-2\cdot\frac{3}{4}$ (solución)

2)

$\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+5}=0$

$\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+5} \xrightarrow{elv\,cuadrado} x^2+3x-1=x^2+5 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2$

Comprobación:

x=2→ $\sqrt{2^2+3\cdot 2-1}-\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$ solución.

3)

$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

$\sqrt{x+5}=7-\sqrt{2x+8} \xrightarrow{elev\,cuadr} x+5=49+2x+8-14\sqrt{2x+8}$

$14\sqrt{2x+8}=x+52 \xrightarrow{elev\,cuadr} 196(2x+8)=x^2+104x+2704 \rightarrow x^2-288x+1136=0$

$x=284, x=4$

Comprobación:

x=284 → $\sqrt{289}+\sqrt{576}=17+24\neq 7$ No solución

x=4 → $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ Solución

Ejercicio, resolver:

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4 \rightarrow 2\sqrt{x+4}=4-4x \rightarrow \left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(4-4x)^2 \rightarrow$

4(x+4)=16x^2-32x+16 → 16x^2-36x=0 → 4x(4x-9)=0 x= $\begin{cases}0\\ 9/4\end{cases}$

Comprobación:

x=0 → $0+2\cdot\sqrt{0+4}=4$ Solución

x= $9/4$ → $4\cdot\frac{9}{4}+2\sqrt{\frac{9}{4}+4}=9+2\cdot\frac{5}{2}\neq 4$ No solución

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0$ → $x^2=-\sqrt{4x^2-3}\xrightarrow{elev}x^4=4x^2-3\rightarrow x^4-4x^2+3=0$

x^2=t, x^4=t^2 → t^2-4t+3=0 → t=$\begin{cases}3\\1\end{cases}$ x=$\begin{cases}\pm\sqrt{3}\\ \pm 1\end{cases}$

Comprobación*:*

x=1 → $1^2+\sqrt{4\cdot1^2-3}=2\neq0$ No solución

x=-1 → $(-1)^2+\sqrt{4\cdot(-1)^2-3}=2\neq0$ No solución

x=$\sqrt{3}$ → $(\sqrt{3})^2+\sqrt{4(\sqrt{3})^2-3}=6\neq0$ No solución

x=$-\sqrt{3}$ → $(-\sqrt{3})^2+\sqrt{4(-\sqrt{3})^2-3}=6\neq0$ No solución

d) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=2$

$\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}+2\xrightarrow{al\ cuadr}2x+5=x-1+4+4\sqrt{x-1}\rightarrow$

$x+2=4\sqrt{x-1}\xrightarrow{al\ cuadr}x^2+4x+4=16(x-1)\rightarrow x^2-12x+20=0$

$x=10,\ x=2$

Comprobación:

x=10 → $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ solución

x=2 → $\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$ solución

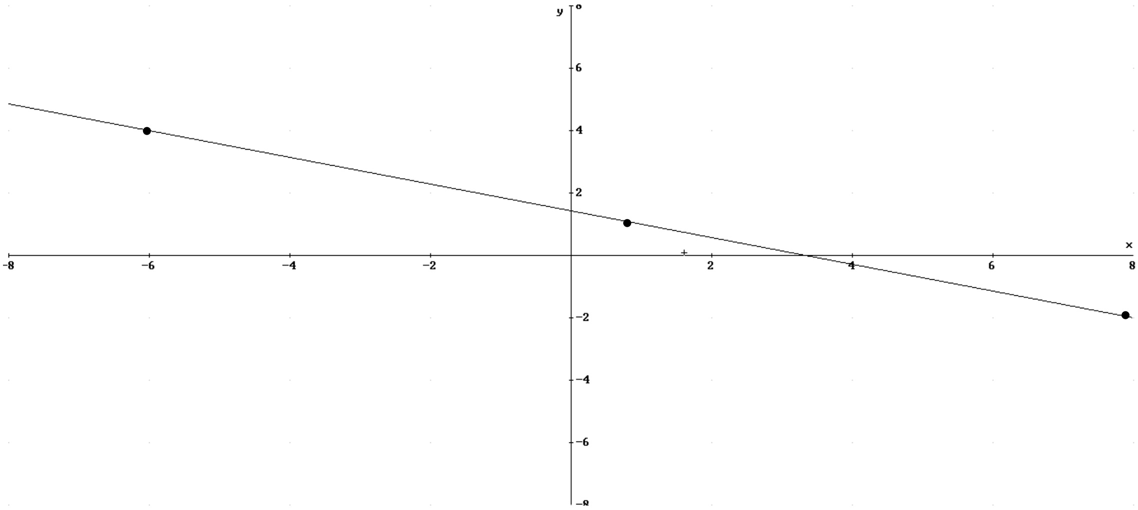
4. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma **ax+by=c**, se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

Ejemplo: **3x+7y=10,** despejamos una variable (cualquiera de las dos) $x=\frac{10-7y}{3}$, damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	y
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



Ejercicio: representa las soluciones de las siguientes ecuaciones

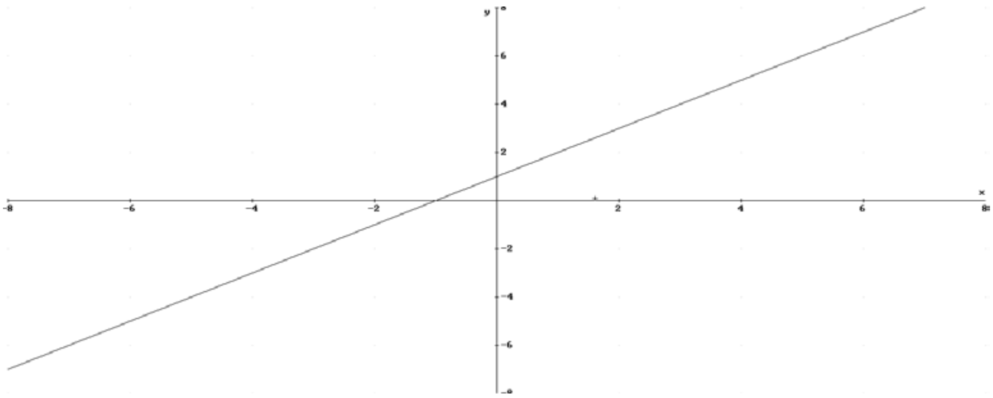
a) –x+y=1

b) √3x+5y=√3

c) -7x+3y=-5

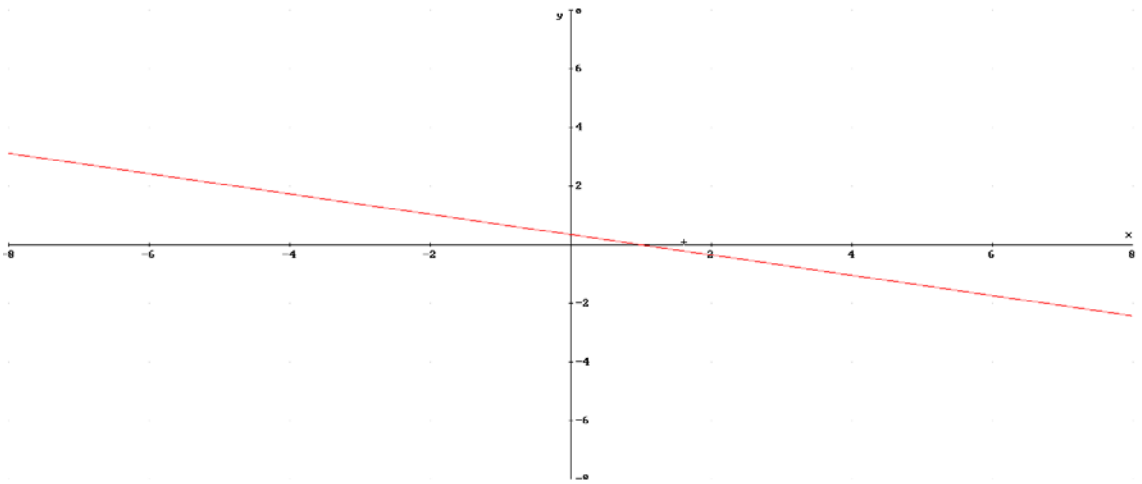
a) –x+y=1 → y=1+x

x	y
1	2
0	1
-1	0



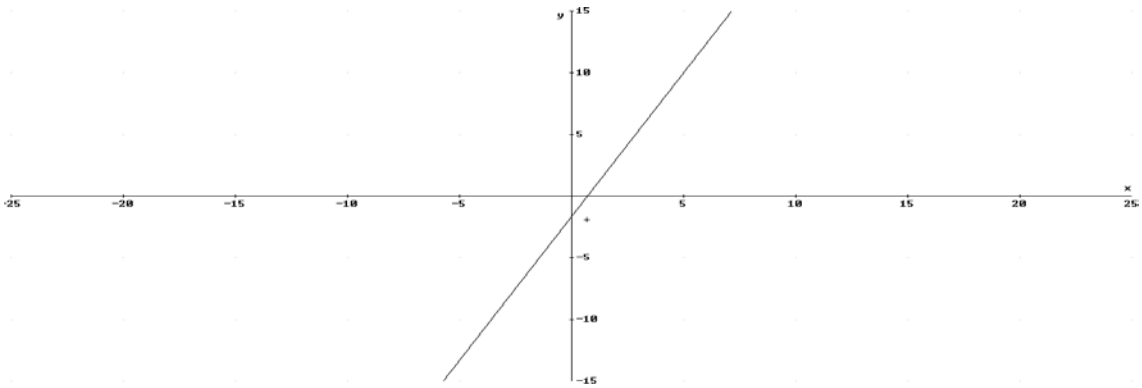
b) √3x+5y=√3 → $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

x	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/5$ ≈-0,35



c) -7x+3y=-5 → $y=\dfrac{-5+7x}{3}$

x	y
2	3
-1	-4
5	10



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

5. Sistemas de 2 ecuaciones.

5.1 Sistemas lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+by=c\\(2)\ a'x+b'y=c'\end{array}\right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$S=S_1\cap S_2$

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

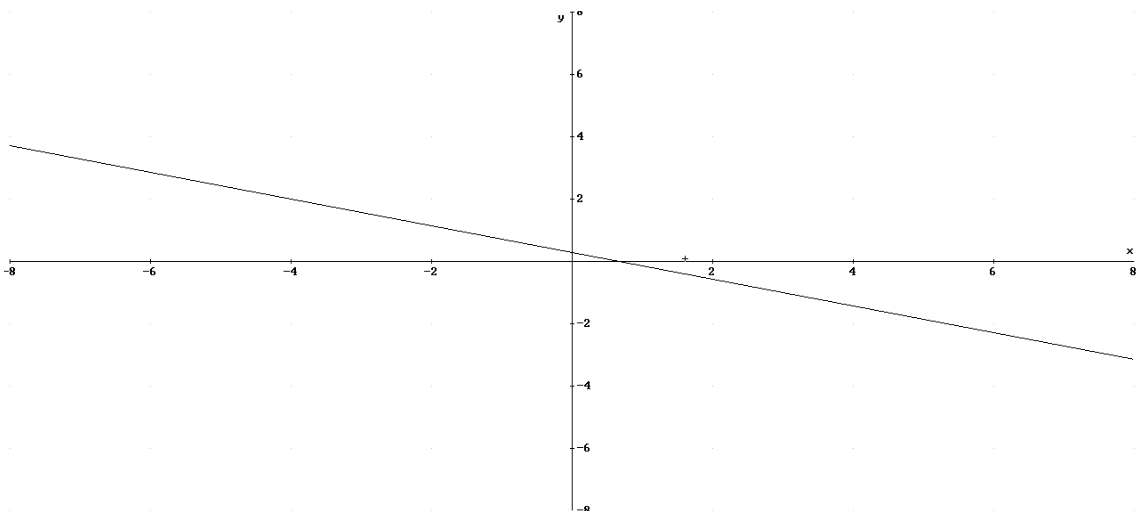
Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$$

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{l}(1)\ 3x+7y=2\\(2)\ -6x-14y=-4\end{array}\right\}(2)\equiv(1)\rightarrow\frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2).

Ejemplo: en el ejemplo anterior las soluciones son:



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Sistema incompatible, no tiene soluciones

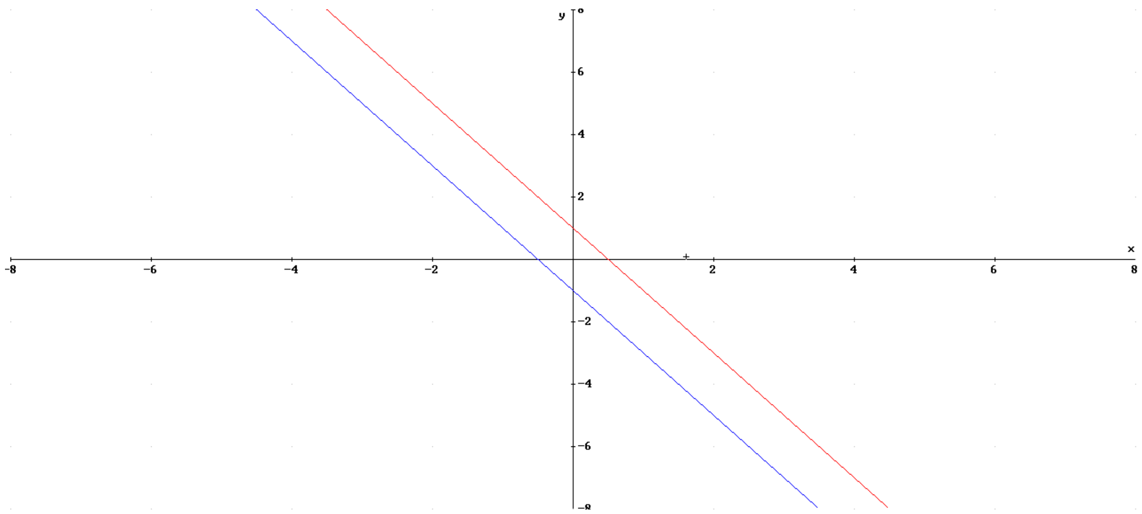
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+y=1\\(2)\ 4x+2y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-2}.$$

Interpretación gráfica:



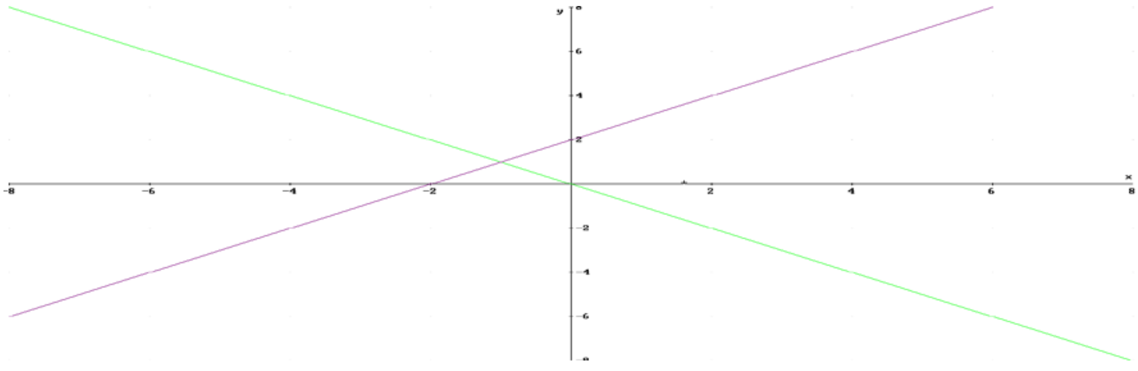
3. Compatible determinado, una única solución.

Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\boxed{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=0\\(2)\ -x+y=2\end{array}\right\}\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}\rightarrow comp\ \det$$



Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. **Compatibles indeterminados:** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. **Incompatibles:** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. **Compatibles determinados:** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\,x+y=1\\(2)\,x-y=0\end{array}\right\}$$

a) Sustitución: igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

y=1-x → x-(1-x) =0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 → **solución; x=1/2, y=1/2**

b) Igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

y=1-x; y=x → 1-x=x; 2x=1→ **solución x=1/2; y=1/2**

c) Reducción: consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → **solución x=1/2; y=1/2**

Ejercicio: resuelve, clasifica y interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{l}(1)\,3x-2y=1\\(2)\,6x-4y=2\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;4x-y=5\\(2)\,-8x+2y=3\end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;x-3y=2\\(2)\;\;2x+y=4\end{array}\right\}$$

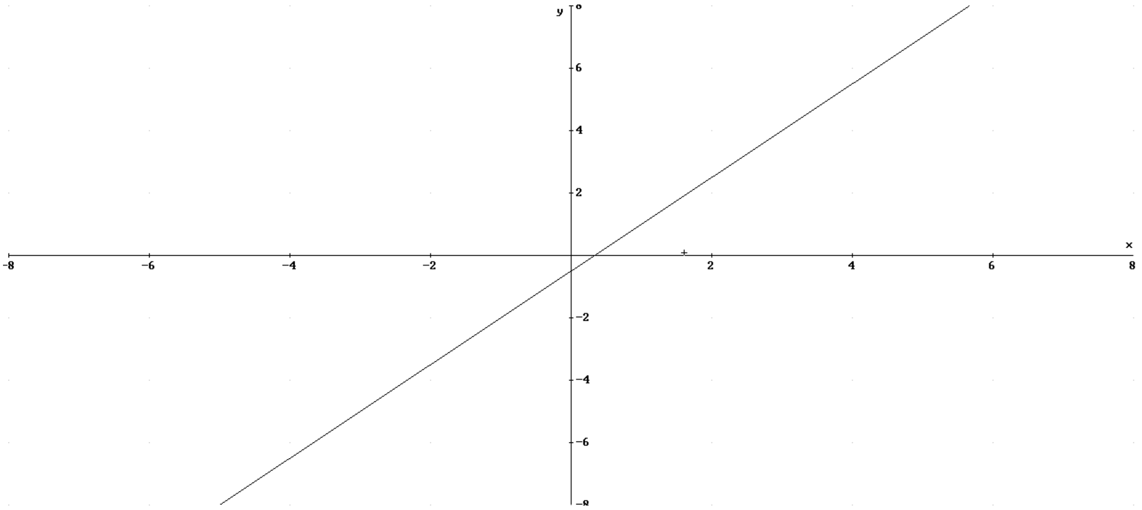
d) $$\left.\begin{array}{l}(1)\,-18x+6=6y\\(2)\,y+3x+5=6\end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;\dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\(2)\;\;5x+y=0\end{array}\right\}$$

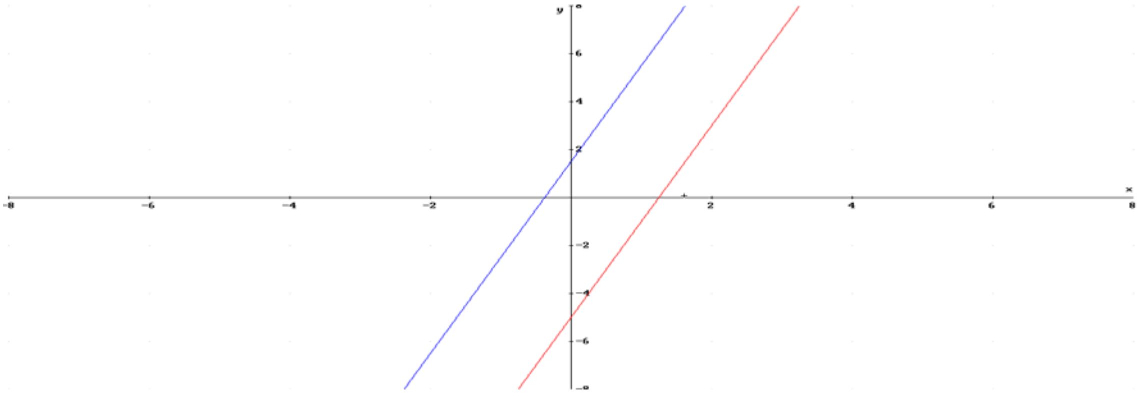
Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Soluciones:

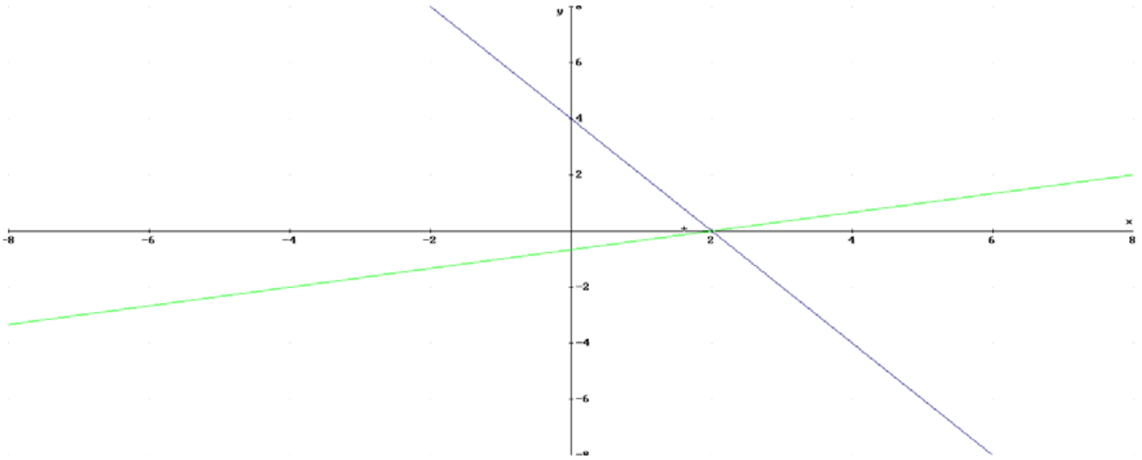
a) $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$ Compatible indeterminado→ $x=\frac{1+2y}{3}$



b) $\frac{4}{-8}=\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{3}$. Incompatible, no solución

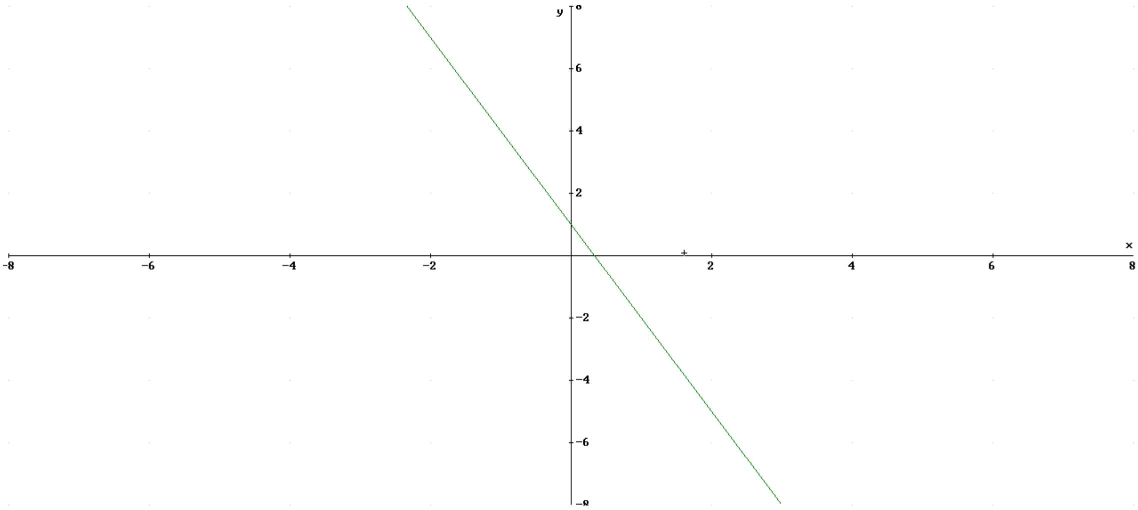


c) $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{1}$. Compatible determinado, una solución. **x=2, y=0**

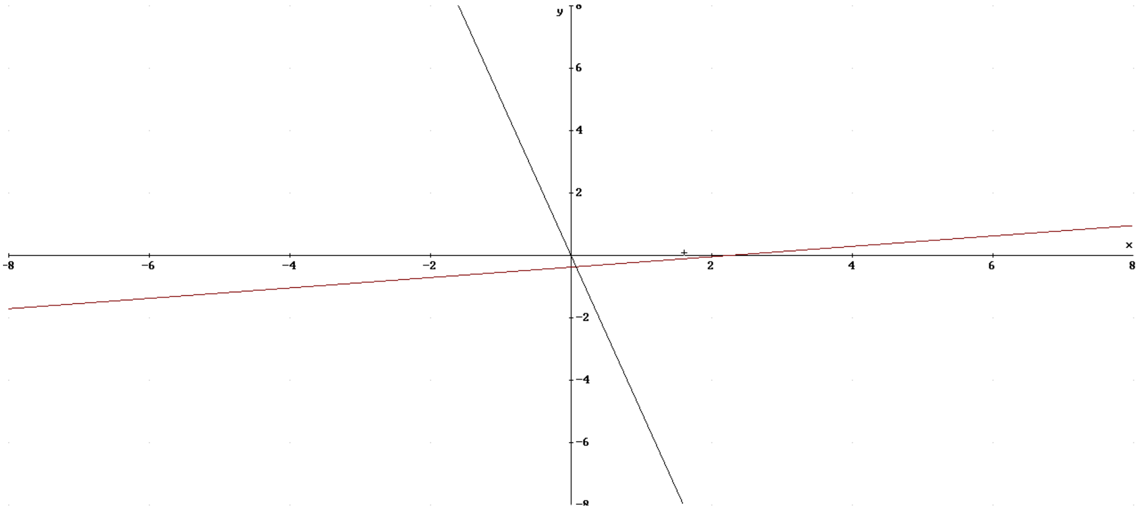


d) $\frac{-18}{3}=\frac{-6}{1}=\frac{-6}{1}$ → Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



e) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\ (2)\ 5x+y=0\end{array}\right\}=\left.\begin{array}{l}(1)\ 4x-24y=9\\ (2)\ 5x+y=0\end{array}\right\}\ \dfrac{4}{5}\neq\dfrac{-24}{1}$ → compatible determinado, una solución → Solución x=9/124, y=-45/124



5.2 Sistemas no lineales

Estos sistemas son aquellos donde una o varias ecuaciones no son lineales, es decir aparecen términos cuadráticos, cúbico, etc. En este tema trataremos sólo cuando tenemos exponentes cuadráticos. Generalmente se resuelve por sustitución. Veamos tres ejemplos:

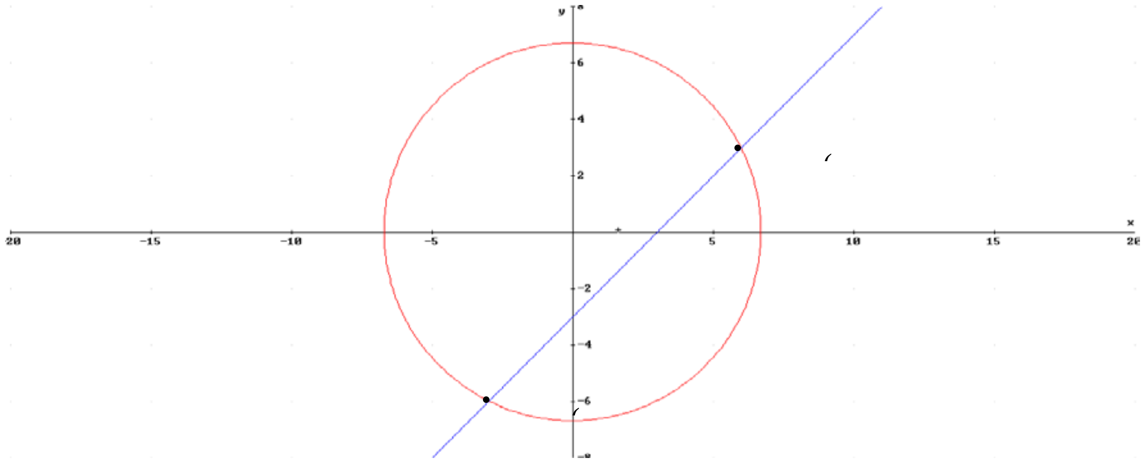
Ejemplo 1:

$\left.\begin{array}{l}(1)\ x-y=3\\ (2)\ x^2+y^2=45\end{array}\right\}$ → x=3+y , sustituyendo en (2) $(3+y)^2+y^2=45$; $2y^2+6y-36=0$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{36+288}}{4}=\frac{-6\pm 18}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-6\rightarrow x=3-6=-3\\ \\ 3\rightarrow x=3+3=6\end{array}\right. .$$

Dos soluciones (x=-3, y=-6); (x=6, y=3)

Para interpretar gráficamente la solución tendremos que saber que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R es de la forma $x^2+y^2=R^2$. De esta forma la ecuación $x^2+y^2=45$, es una ecuación de una circunferencia de radio $R=\sqrt{45}$



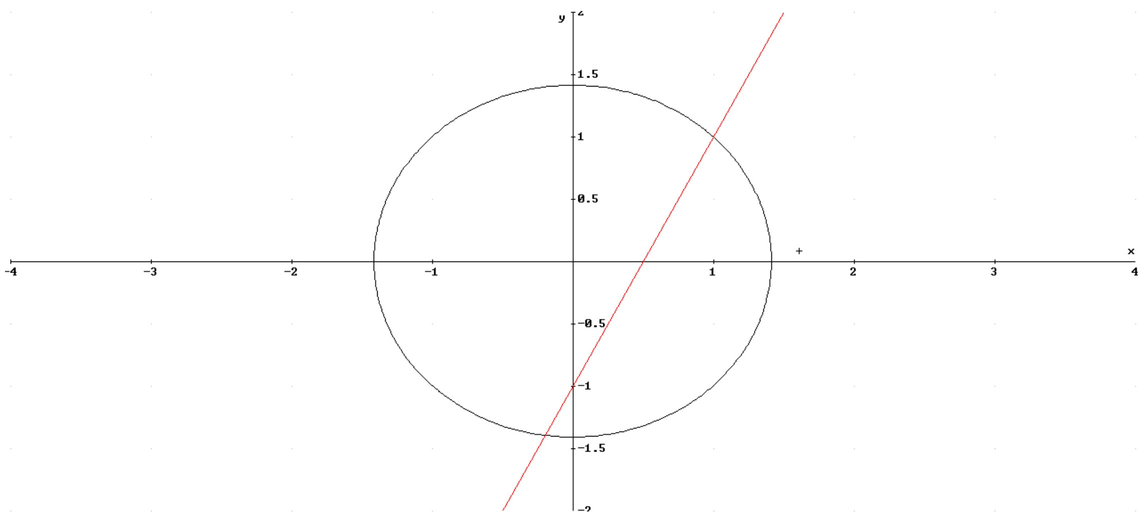
Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y-x=-1+x\\(2)\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \rightarrow y=-1+2x \rightarrow x^2+(2x-1)^2=2;\ \ x^2+4x^2-4x+1-2=0$$

$$5x^2-4x-1=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm 6}{10}=\left\langle\begin{array}{l}1\rightarrow y=-1+2=1\\ \\ -1/5\rightarrow x=-1-2/5=-7/5\end{array}\right.$$

Soluciones (x=1, y=1); (x= $-1/5$, y= $-7/5$)

Interpretación gráfica (circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y recta)



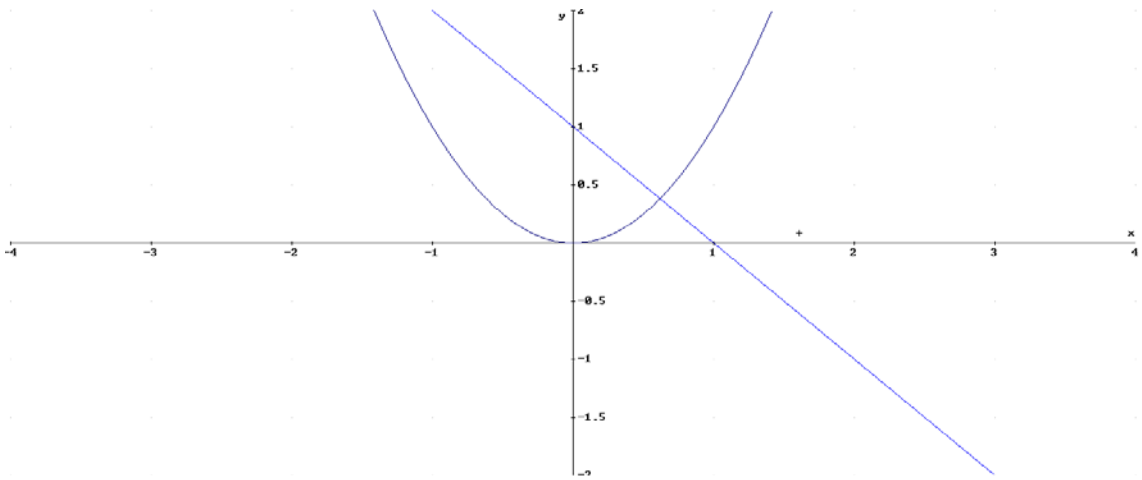
Ejemplo 3:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ y = x^2 \\ (2)\ \ \ y + x = 1\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=1-x \quad \rightarrow \quad 1-x=x^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x-1=0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = 1 - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = 1 - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Soluciones (x=$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, y=$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$) (x=$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, y=$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Interpretación gráfica ($y=x^2$ es una parábola, $y+x=1$ una recta)



6. Sistemas de ecuaciones lineales generales

Hasta este curso sólo considerábamos sistemas con 2 ecuaciones y 2 incógnitas, en este curso veremos el caso general con un número n de incógnitas y m de ecuaciones. Para resolver utilizaremos el método de Gauss.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (2)\ \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (m)\, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

- Donde las incógnitas son $x_1,x_2,\ldots,x_n$
- Los coeficientes son a_{ij}
- Los términos independientes son $b_1,b_2,\ldots,b_m$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: 4 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad x+2y-3z=3 \\ (2)\ -2x+y+z=5 \\ (3)\quad x+y+z=4 \\ (4)\ -2x+3y-z=9 \end{array}\right\}$$

- Incógnitas: x,y,z,t
- Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
- Columna de términos independientes: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$

Las soluciones del sistema serán los valores de las incógnitas que cumplan las m ecuaciones.

En función el número de soluciones puede ocurrir que sea:

a) Compatibles determinados: tiene solución única
b) Compatibles indeterminadas: tiene infinitas soluciones
c) Incompatibles: no tiene solución

6.1 Sistemas equivalentes.

Dos sistemas equivalentes son los que tienen mismas soluciones aunque no tengan mismo número de ecuaciones.

Para transformar un sistema en otro equivalente podemos realizar los siguientes criterios:

1) Criterio 1: Multiplicamos o dividimos los miembros de cualquier ecuación por un número distinto de cero.
2) Criterio 2: Sustituimos una ecuación por la suma de ella con una combinación lineal de otras del sistema.
3) Citerio3: Eliminamos las ecuaciones que son combinación lineal de alguna de las otras ecuaciones.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ 2x-4y+2z=2\\(3)\ x-z=3\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI}\left.\begin{array}{ll}(1')=2(1) & 2x+2y+2z=6\\(2')=3(2) & 6x-12y+6z=6\\(3')=(3) & x-z=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ 2x-4y+2z=2\\(3)\ x-z=3\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI}\left.\begin{array}{ll}(1')=(1) & x+y+z=3\\(2')=(2)-2(1) & -6y=-4\\(3')=(3) & x-z=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ x-y+z=2\\(3)\ 2x+2z=5\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI\ \ PUES\ (3)=(1)+(2)}\left.\begin{array}{l}(1)\,x+y+z=3\\(2)\ x-y+z=2\end{array}\right\}$$

6.3 Resolución por el método Gauss

El método de Gauss generaliza el método de la reducción, que es útil para 2 ecuaciones, pero para más utilizaremos el citado método. Por sencillez utilizaremos la matriz ampliada, que recordemos que son los coeficientes de las ecuaciones y los términos independientes.

En este curso trabajaremos con sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (n). El objetivo es buscar una matriz triangular superior de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1\\ 0 & a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2\\ 0 & 0 & a_{31} & .. & a_{3n} & b_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Las transformaciones que realizaremos para obtener esta matriz son las siguientes:

- Cambiar el orden de las filas, que no consiste más que ordenar las ecuaciones del sistema
- Cambiamos el orden de las columnas, que consiste en reordenar las incógnitas, debemos recordar este cambio cuando resolvamos el sistema
- Cambiamos una fila por una combinación lineal de ella con otra ecuación.

Cuando utilicemos el método de Gauss puede ocurrir tres cosas:

1. Que la última fila de la matriz sea (0 0 0 … 0 | b_n) con $b_n \neq 0$ lo que entonces el sistema será **incompatible** (0x+0y+…+0=$b_n \neq 0$ es imposible)
2. Que la última fila sea (0 0 0 … 0 |0) o eliminamos una fila (al ser dosiguales) y entonces sobra la ecuación, y será sistema **compatible indeterminado**
3. Que la última fila sea (0 0 … a_{nn}| b_n) con $a_{nn} \neq 0$ con lo que el sistema es entonces **compatible determinado**

Ejemplos:

a)
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z-t=1\\ 2x-y+3z=2\\ x+y+z+t=2\\ -2x-y+z+3t=1\end{array}\right\}\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2&3&1&-1&1\\ 2&-1&3&0&2\\ 1&1&1&1&2\\ -2&-1&1&3&1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_3\\ \\ f_1\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\2&-1&3&0&2\\2&3&1&-1&1\\-2&-1&1&3&1\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2-2f_1\\ f_3-2f_1\\ f_4+2f_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&-3&1&-2&-2\\0&1&-1&-3&-3\\0&1&3&5&5\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&-3&-2&-2\\0&.1&1&-3&-3\\0&3&1&5&5\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3-f_2\\ f_4-3f_2\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&-3&-2&-2\\0&.0&-4&-1&-1\\0&0&10&11&11\end{array}\right)\rightarrow$$

$C_2 \leftrightarrow C_3$

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\\ 4f_4+10f_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&-3&-2&-2\\0&.0&-4&-1&-1\\0&0&0&34&34\end{array}\right)$$

Es compatible determinado. Recordemos que hemos cambiado el orden de las columnas 2 y 3, es decir el orden de la incógnitas es x,z,y,t.

$$\left.\begin{array}{r} x+z+y+t=2\\ z-3y-2t=-2\\ -4y-t=-1\\ 34t=34\end{array}\right\}\rightarrow \text{t=1, y=0, z=0, x=1}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z+t=3\\ 2x+3y-z-t=0\\ x-z+t=2\\ 2x+2y-2z+2t=5\end{array}\right\}\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&3\\ 2&3&-1&-1&0\\ 1&0&-1&1&2\\ 2&2&-2&2&5\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-2f_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3-2f_2 \\ f_4-f_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4-f_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es compatible indeterminado (infinitas soluciones), dejaremos como parámetro libre la incógnita t:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z+t=3 \\ -y+z-3t=-6 \\ -2z+6t=11 \end{array}\right\}$$

-2z+6t=11 → $z=\dfrac{-11+6t}{2}=3t-\dfrac{11}{2}$

-y+ $3t-\dfrac{11}{2}$ -3t=-6 → $y=\dfrac{1}{2}$

x+2·1/2+ $3t-\dfrac{11}{2}$ +t=3 → $x=\dfrac{-7}{2}-4t$

Para cada valor de t tendremos una solución.

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=10 \\ 2x-y-2z=0 \\ 3x-3y-z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2-2f_1 \\ f_3-3f_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -4 & -20 \\ 0 & 3 & -4 & -27 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3-f_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible (0x+0y+0z=-7 es imposible)

Ejercicios, resolver:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=7 \\ -3x+2y+z=1 \end{array}\right\}$ → C.D. solución x=1, y=1, z=2

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z-3t=1 \\ y+z-2t=2 \\ x+2y+2z-t=2 \end{array}\right\}$ → C.I solución x=-3t-2, y=$\dfrac{1-2t}{3}$, z=$\dfrac{8t+5}{3}$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ -x+y-z+t=0 \\ 2x+3y-z+2t=1 \\ x+4y-2z+3t=3 \end{array}\right\}$ → Incompatible

d) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ -x-y+2z=-1 \end{array}\right\}$ → C.D. x=1, y=0, z=0

7. Inecuaciones lineales

Las inecuaciones son expresiones semejantes a las ecuaciones pero en vez de aparecer el signo = aparecen los signos $\leq, <, \geq, >$. Veamos diferentes tipos de inecuaciones

7.1 Inecuaciones lineales con una incógnita.

Son expresiones de la forma (después de simplificar) de la forma:

ax+b<c , ax+b>c, ax+b≤c ó ax+b≥c siendo a,b,c∈R y a≠0

Para resolver la inecuación hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

a) Si un número está a un lado de la desigualdad y deseamos pasarla al otro lado pasará restando y al revés (igual que en las ecuaciones)

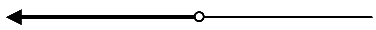
   Ejemplo: 5x-2<6 → 5x<6+2 → 5x<8

b) Si multiplicamos o dividimos la desigualdad por un número negativo entonces el signo < o ≤ cambia a > o ≥, y al revés. De esta forma si queremos despejar de x un número que le multiplica pasa dividiendo cambiando el sentido de la desigualdad si es un número negativo. Lo mismo pasa si está dividiendo

Ejemplos: -3x<2 → x>-2/3

-x/5≥2 → x≤-10

Despejando la x de la inecuación anterior tendremos las siguientes posibles expresiones:

x<-b/a Solución=(-∞,-b/a) 

x≤-b/a Solución=(-∞,-b/a] 

x>-b/a Solución=(-b/a,∞) 

x≥-b/a Solución=[-b/a,∞) 

Ejemplo: 3-5x< 8 → -5x<8-3 → -5x<5 → x>-1 x∈(-1,∞)

Ejercicio, resolver las siguientes inecuaciones:

a) 2(x-2)+3x<5x+6

b) 3x+7-5(2x-3)≥(x-1)/2 -1

c) 3·(x-1)/2 –x > (x-3)/2

Solución

a) 2x-4+3x<5x+6 → 0x<10 → 0<10 ,que es cierto independientemente del valor de x, luego la solución es x∈R

b) 3x+7-10x+15≥(x-1)/2-1, -7x+22≥(x-1)/2-1 $\xrightarrow{mult\ por\ 2}$ -14x+44≥x-1-2→ -15x≥-47 → $x \leq \frac{47}{15}$, x∈(-∞, $\frac{47}{15}$]

c) $\frac{3x-3}{2} - x > \frac{x-3}{2} \xrightarrow{mul\ por\ 2} 3x-3-2x > x-3 \rightarrow 0x > 0 \rightarrow 0 > 0$ No es cierto independientemente del valor de x, luego no hay soluciones S=∅

7.2 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

ax+by<c; ax+by>c; ax+by≤c ; ax+by≥c

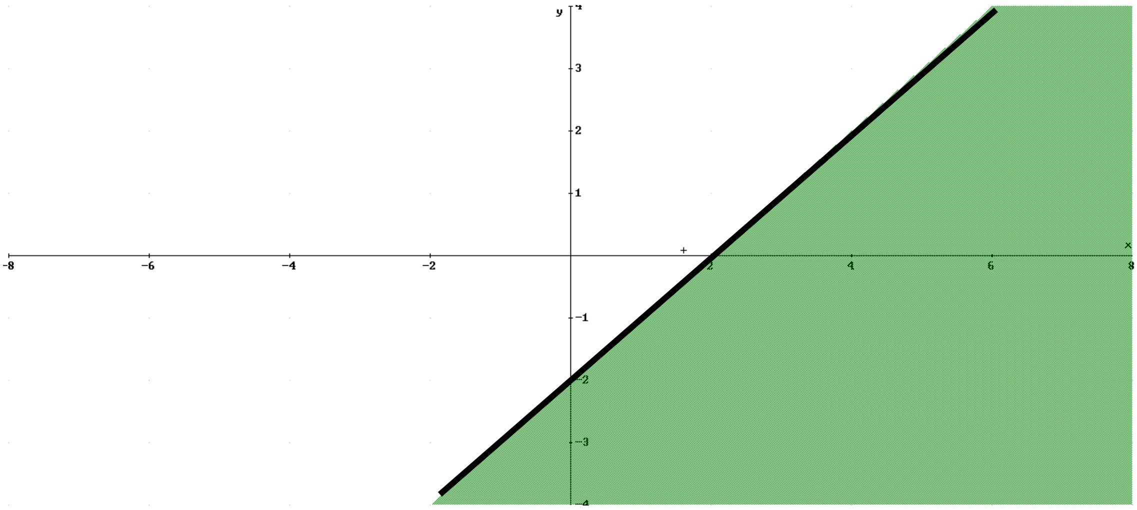
Por lo general existen infinitos valores de parejas (x,y) que cumplen las soluciones a la inecuación lineal. Veremos las soluciones representadas en los ejes de coordenadas.

Pasos a seguir para obtener las soluciones:

1. Representamos la recta determinada por ax+by=c. quedando dividido el plano en dos semiplanos (uno de ellos será la solución)
2. Tomamos un punto arbitrario con un valor de x e y. Si para estos valores de x y de y la inecuación es cierta, el semiplano que contiene el punto es la solución, sino es así es el otro semiplano
3. Si tenemos ≥ ó ≤ la recta será solución (que es la solución a la igualdad ax+by=c) si tenemos < ó > entonces la recta no será solución

Ejemplo:

x-y ≥ 2. representamos la recta y=x+2. Tomamos el punto (0,0) → 0-0 ≥2 que no cumple la inecuación, luego la solución es el semiplano que no contiene el origen. La recta es solución ya que el símbolo es ≥



Ejercicios:

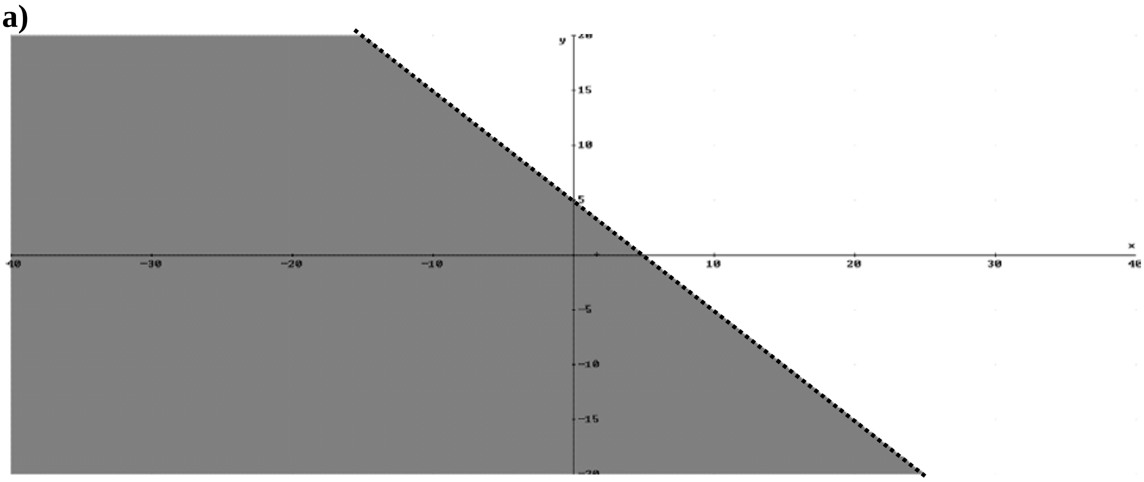
a) $x+y<5$

b) $x-y \leq 1$

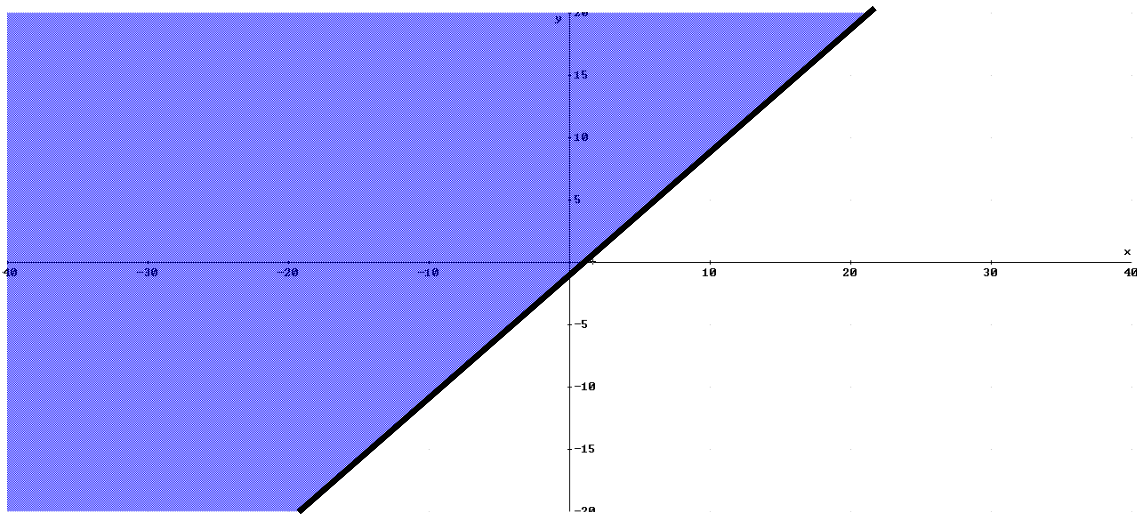
c) $2x-1/3 \geq x-y$

Solución

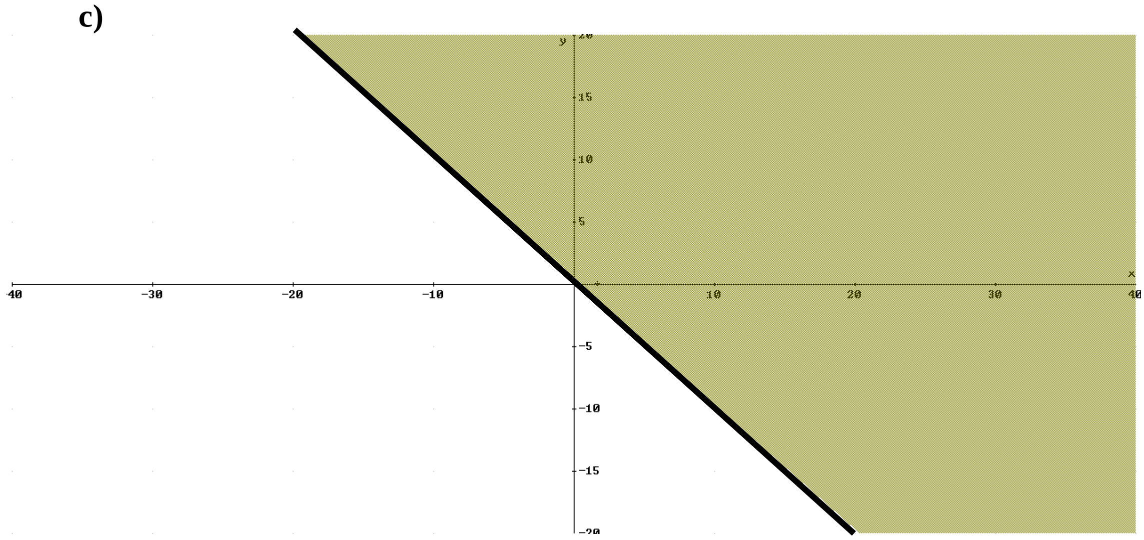
a)



b)



c)



7.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son expresiones que después de operar son de la forma:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c\geq 0$

Los pasos para la resolución de las inecuaciones son los siguientes:

1. Cálculo de las soluciones a la igualdad (raíces de ax^2+bx+c) que son x_1 y x_2
   a. Si son soluciones reales, factorizamos el polinomio $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$
      i. Dividimos la recta real en 3 intervalos(2 si es raíz doble) $(-\infty,x_1)$; (x_1,x_2) ; (x_2,∞). Estudiamos el signo en cada intervalo
      ii. Las soluciones son los intervalos que cumplen la desigualdad.
   b. Si no son reales entonces ax^2+bx+c no cambia de signo, por lo que o es siempre positivo si c>0 o negativo si c<0. Así las soluciones serán o todo R o el vacío.

Ejemplos:

a) $x^2+x-6\leq 0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\right.$$

$x^2+x-6\leq 0 \rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0$

	$(-\infty,-3)$	-3	(-3,2)	2	$(2,\infty)$
Signo(x+3)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+x-6)	+	0	-	0	+

Solución $x\in[-3,2]$

b) $x^2+1<0$

$x^2=-1 \rightarrow$ no solución real.

x^2+1 siempre es positivo, por ejemplo en x=0: $0^2+1=1>0$

No soluciones $S=\emptyset$

c) $x^2+1>0 \rightarrow x\in R$

Ejercicios:

a) $x^2-6x+9>0$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0$

c) $(x-3)^2\geq 4$

d) $(2x-1)/5>3x^2/2$

Soluciones:

a) $(x-3)^2>0$

	$(-\infty,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x^2-6x+9)	+	0	+

Solución $\rightarrow x\in R-\{3\}$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0 \rightarrow -3(x-1/3)(x+2)\leq 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1/3)$	1/3	$(1/3,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-1/3)	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-
Signo(x^2+x-6)	-	0	+	0	-

Solución $\rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1/3,\infty)$

c) $(x-3)^2 \geq 4 \rightarrow x^2-6x+5 \geq 0 \rightarrow (x-5)\cdot(x-1) \geq 0$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
Signo(x-1)	-	0	+	+	+
Signo(x-5)	-	-	-	0	+
Signo(x^2-6x+5)	+	0	-	0	+

Solución → $\mathbf{x \in (-\infty,1] \cup [5,\infty)}$

7.4 Inecuaciones polinómicas y algebraicas

7.4.1 Polinomios

En este apartado estudiaremos las inecuaciones del tipo:

$P(x)<0$, $P(x)>0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$.

Resolución:

1. Factorizamos, obteniendo las raíces x_1, x_2, …,x_n
2. Estudiamos el signo en los intervalos $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2),…, (x_n,∞)
3. De los intervalos tomamos aquellos que solucionen la inecuación.

Ejemplo : $x^4+x^3+3x^2-11x-14 \leq 0$; Factoriz→$(x+1)(x-2)(x^2+2x+7) \leq 0$.Raíces x=-1, x=2

	$(-\infty,-1)$	1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo(x+1)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+2x+7)	+	+	+	+	+
Signo($x^4+x^3+3x^2$-11x-14)	+	0	-	0	+

Solución $\mathbf{x \in [-1,2]}$

Ejercicios: resuelve

1) $-x^3-2x^2+x+2>0$

2) $-3x^3-24x^2-21x \leq 0$

3) $x^3-2x^2 \leq -x$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Soluciones:

1) $-x^3-2x^2+x+2=-(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)>0$. Raíces x=-2, -1,1

	$(-\infty,-2)$	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	-	-	0	+
-1	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$

2) $-3x^3-24x^2-21x=-3\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+1)\leq 0$. Raíces x=-7,-1, 0

	$(-\infty,-7)$	-7	(-7,-1)	-1	(-1,0)	0	$(0,\infty)$
Signo(x+7)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x)	-	-	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in[-7,-1]\cup[0,\infty)$

3) $x^3-2x^2\leq -x \rightarrow x^3-2x^2-x\leq 0 \rightarrow x(x-1)^2\leq 0$

	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x^3-2x^2-x)	-	0	+	0	+

Solución $x\in(-\infty,0]\cup\{1\}$

7.4.2 Fracciones algebraicas

Las inecuaciones de fracciones algebraicas son expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0\ ;\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$$, siendo P(x) y Q(x) polinomios.

La forma de resolver estas inecuaciones es semejante a la de los polinomios. Los pasos son los siguientes:

1. Factorización de P(x) y de Q(x). Y simplificación de la fracción si coincide algún factor.
2. Estudiamos el signo en los intervalos comprendidos entre las raíces de P(x) y Q(X) que no han sido simplificadas
3. A partir de estudiar el signo de cada factor podemos determinar cuando la fracción algebraica es mayor, menor o igual que cero

Nota: cuidado con las raíces del polinomioQ(x), ya que en estos valores $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *no se anula, sino que no existe (dividir por cero)*

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}\leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)}\leq 0$ → raíces son -3, -2, -1 y 1

	(-∞,-2)	-3	(-3,-2)	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Sig(x+3)	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Sig(x+2)	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sig(x+1)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Sig(x-1)	-	-	-	-	-	-	-	0	+
Sig($\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}$)	+	No existe	-	No existe	+	0	-	0	+

Solución: x∈(-3,-2)∪[-1,1]

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicios, resolver las siguientes inecuaciones

a) $\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4}\geq 0 \rightarrow \frac{-(x-4)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}\geq 0$ → raíces -2 y 4

	(-∞,-2)	-2	(-2,4)	4	(4,∞)
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-4)	-	-	-	0	+
Signo(-1)	-	-	-	-	-
Signo($\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4}$)	-	No existe	+	0	-

Solución x∈(-2,4]

b) $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x}\leq 0 \rightarrow \frac{2x^2+6x+10}{x(x-1)}\leq 0$ → raíces 0 y 1.

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(2x2+6x+10)	+	+	+	+	+
Signo $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x}$	+	No existe	-	No existe	+

Solución x∈(0,1)

8. Sistemas lineales de inecuaciones

8.1 Una incógnita

Los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita son sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{r}(1)\ ax+b\leq 0\\ (2)\ a'x+b'>0\end{array}\right\}$$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

La forma de resolver el sistema es el siguiente:

1. Obtenemos las soluciones de (1) y de (2), S_1 y S_2 respectivamente
2. Las soluciones del sistema tienen que ser de (1) y (2) luego es la intersección de sus soluciones $S=S_1\cap S_2$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r}(1)\ x+3>0\\(2)\ 3x-6\geq 0\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow x>-3$ $S_1=(-3,\infty)$

$S_2 \rightarrow 3x\geq 6;\ x\geq 2$ $S_2=[2,\infty)$

Solución $S=S_1\cap S_2=[2,\infty)$

Ejercicios:

1. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5-3x\geq 4x+13\\(2)\ 2x+7<5x+11\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow -8\geq 7x\ ;\ x\leq(-8/7)$ $S_1=(-\infty, -8/7]$

$S_2 \rightarrow -3x<4\ ;\ x>-4/3$ $S_2=(-4/3,\infty)$

$S=S_1\cap S_2=(-4/3,-8/7]$

2. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5(x-3)\leq -2+x\\(2)\ 3x>2x+1\\(3)\ \ x<3\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow 4x\leq 13;\ S_1=(-\infty,13/4]$

$S_2 \rightarrow x>1\ ;$ $S_2=(1,\infty)$

$S_3 \rightarrow x<3;$ $S_3=(-\infty,3)$

$S=S_1\cap S_2\cap S_3=(1,3)$

8.2 Dos incógnitas

Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas:

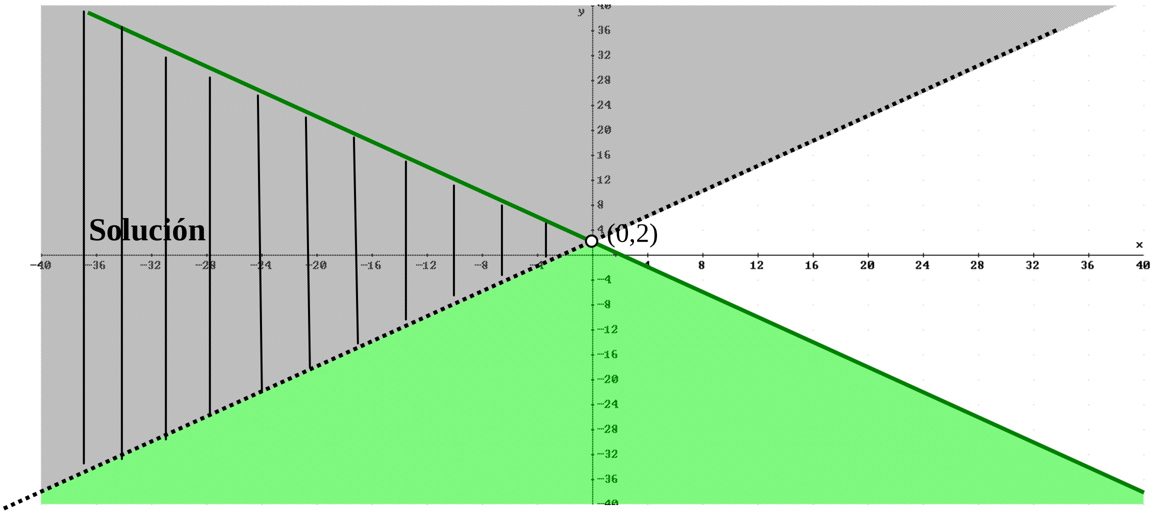
$\left.\begin{array}{r}(1)\quad ax+by\leq c\\(2)\ a'x+b'y>c'\end{array}\right\}$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

Resolución de los sistemas:

1. Se representan en el plano cartesiano las soluciones de (1) y (2)
2. Las soluciones del sistema son la intersección de las soluciones a las dos inecuaciones

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r}(1)\qquad x+y\leq 2\\(2)\ -2x+2y>4\end{array}\right\}$

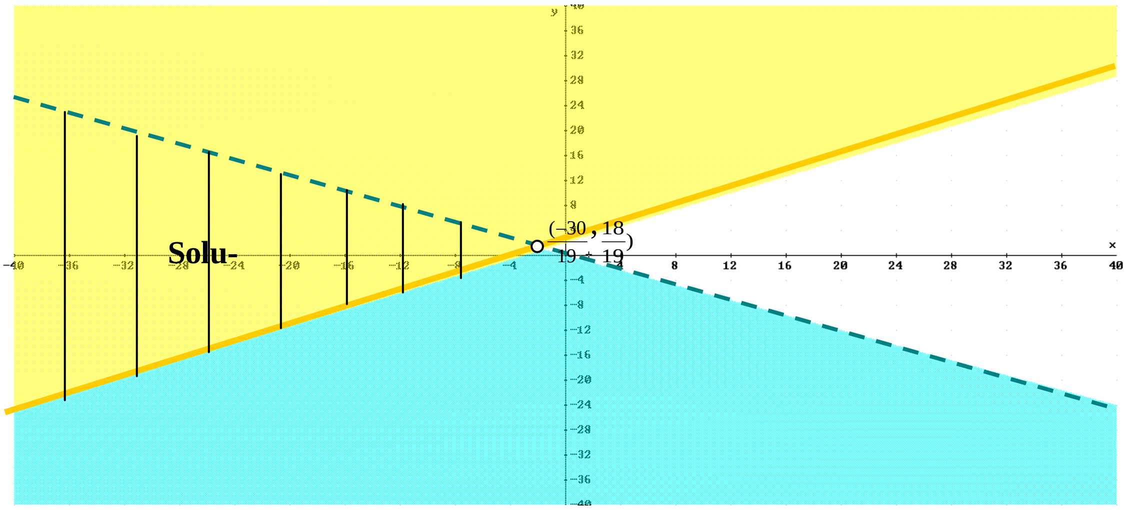
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Punto de corte, es la solución al sistema $\left.\begin{array}{l}(1) \quad x+y=2 \\ (2)\ -2x+2y=4\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=0, y=2

Ejercicios:

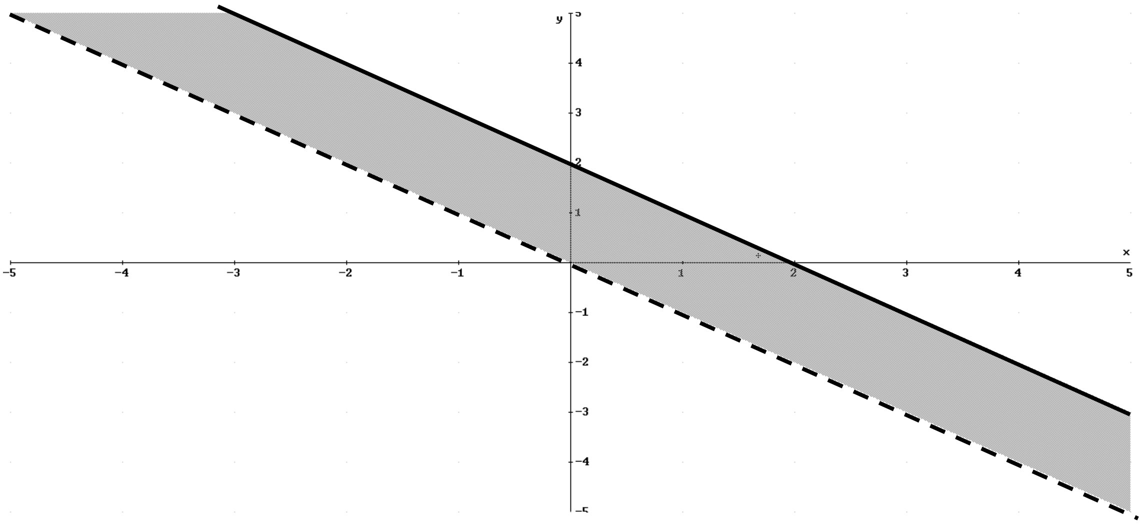
1) $\left.\begin{array}{l}(1) \quad 3x+5y<0 \\ (2)\ -2x+3y\geq 6\end{array}\right\}$



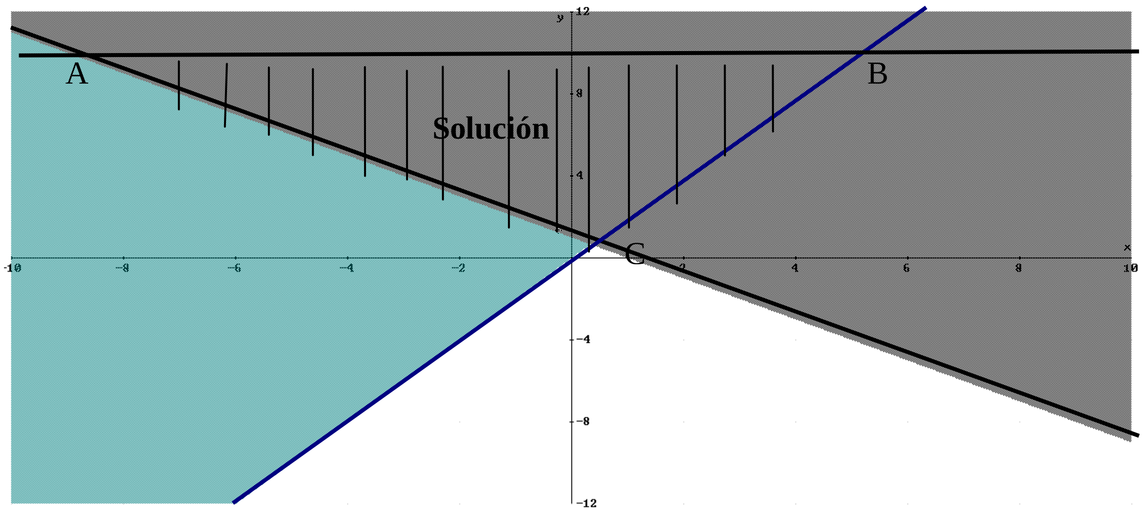
Puntos de corte es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l}(1) \quad 3x+5y=0 \\ (2)\ -2x+3y=6\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=$\frac{-30}{19}$, y=$\frac{18}{19}$

2) $\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y>0\\(2)\ -3x-3y\geq -6\end{array}\right\}$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas. Veamos el dibujo



3) $\left.\begin{array}{l}(1)\,2x-y\leq 0\\(2)\,x+y\geq 1\\(3)\,y\leq 10\end{array}\right\}$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\x+y=1\end{array}\right\}$ → (-9,10)

Cálculo de B: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (5,10)

Cálculo de C: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (1/3, 2/3)

9. Ecuaciones y sistemas logarítmicos y exponenciales

9.1 Defninción y propiedades del logarítmo

Definición: el logaritmo es la operación inversa al exponente, así :

$y=\log_a x \rightarrow a^y=x$

Elementos del logaritmo:

- Base del logaritmo, a.
- Argumento del logaritmo x

Ejemplos:

$\log_{10}100=2 \rightarrow 10^2=100$

$\log_2 8=3 \rightarrow 2^3=8$

$\log_3(1/9)=-2 \rightarrow 3^{-2}=1/9$

$\log_{10}0{,}001=-3 \rightarrow 10^{-3}=1/1000=0.001$

Notación: $\log_{10} x=\log x$. Los logaritmos decimales son los que aparecen en la calculadora.

Propiedades (muy importantes):

1. $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$
2. $\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$. Ejemplo $\log_2 8+\log_2 4=\log_2 32 \rightarrow 3+2=5$
3. $\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a(x_1/x_2)$. Ejemplo $\log_2 8-\log_2 4=\log_2 2 \rightarrow 3-2=1$
4. $\log_a(x)$ no existe si $x\leq 0$. Pues $a^y>0$. Ejemplo log(-2) y log(0) no existen
5. $n\cdot\log_a x=\log_a x^n \rightarrow$ Ejemplo: $-2\cdot\log(10)=\log(10^{-2}) \rightarrow -2\cdot 1=-2$
   $\log_3 3^2=\log_3 9=2$
6. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Esta última propiedad muy útil para calcular logaritmos con la calculadora. Ejemplo $\log_2 6=\dfrac{\log 6}{\log 2}=\dfrac{0{,}778}{0{,}301}=2{,}58$. Comprobación: $2^{2.58}\approx 6$

Ejercicios

1) Calcular los siguientes logaritmos exactos sin usar la calculadora:

a) $\log_6 1296$

b) $\log_2 0{,}125$

c) $\log_3\sqrt{27}$

d) $\log_5 625$

e) $\log_{1/5} 25$

Solución:

a) $11296=6^4 \rightarrow \log_6 1296=4$

b) $0{,}125=\frac{1}{4}=2^{-2} \rightarrow \log_2 0{,}125=-2$

c) $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{3/2} \rightarrow \log_3\sqrt{27}=3/2$

d) $625=5^4 \rightarrow \log_5 625=4$

e) $25=5^2=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \rightarrow \log_{1/5} 25=-2$

2) Utiliza la tecla de la potencia x^y para calcular con aproximación de centésimas el siguiente logaritmo: $\log_7 32$

Solución: $\log_7 32 \approx 1.78$

3) Calcular la incógnita

a) $y=\log_4\sqrt{2}$

b) $-4=\log_b 2$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x$

Solución:

a) $\sqrt{2}=2^{1/2}=\left(4^{1/2}\right)^{1/2}=4^{1/4} \rightarrow \log_4\sqrt{2}=\frac{1}{4}$

b) $-4=\log_b 2 \rightarrow b^{-4}=2 \rightarrow 1=2\cdot b^4 \rightarrow b^4=1/2 \rightarrow b=\sqrt[4]{1/2}$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x \rightarrow x=4^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

4) Sabiendo que $\log_b(x)=0{,}5$, $\log_b(y)=0{,}2$, $\log_b(z)=0{,}3$, se cumple $a=\frac{x^3}{yz}$, calcular $\log_b a$ y luego el valor de a. Nota aplicar las propiedades de logaritmos:

Solución:

$\log_b\left(\frac{x^3}{yz}\right)=\log_b(x^3)-\log_b(yz)=3\cdot\log_b(x)-(\log_b(y)+\log_b(z))=3\cdot 0{,}5-(0{,}2+0{,}3)=1$

$\log_b(a)=1 \rightarrow a=b$

9.2 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ecuaciones con logaritmos: para resolver las ecuaciones logarítmicas tendremos que agrupar los logaritmos en uno sólo o en uno por cada lado de la igualdad. Una vez que tengamos un único logaritmo o uno por cada lado de la igualdad, para quitarnos el logaritmo tomamos el exponente.

Ejemplo:

$\log_2(-8x-4)-\log_2(x^2)=2 \rightarrow \log_2\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=2^2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=4 \rightarrow$

$(-8x-4)=4\cdot x^2 \rightarrow 4x^2+8x+4=0 \rightarrow x=-1$. Tenemos que comprobar que la solución es válida, pues puede ocurrir que el logaritmo sea negativo:

$x=-1 \rightarrow \log_2\left(\frac{8-4}{(-1)^2}\right)=\log_2(2)=2$

Problema, resolver:

1. $3\cdot\log(x)-\log(32)=\log(x)-\log(2)$
2. $2\cdot\log(x)+\log(2)=\log(x+1)$
3. $\log_3(2)+\log_3(x-3)=(1/2)\cdot\log_3(2x)$

Solución:

1) $\log(x^3)-\log(32)=\log(x)-\log(2) \rightarrow \log\left(\frac{x^3}{32}\right)=\log\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{x^3}{32}\right)=\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow x^3=16x$

$\rightarrow x(x^2-16)=0 \rightarrow x=0,\ x=4,\ x=-4$.

Comprobación:

$x=0 \rightarrow \log(0)=\log(0)$ pero no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

$x=-4 \rightarrow \log(-2)=\log(-2)$ no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

$x=4 \rightarrow \log(2)=\log(2)$ si es solución

2) $\log(x^2)+\log(2)=\log(x+1) \rightarrow \log(2\cdot x^2)=\log(x+1) \rightarrow 2x^2=x+1 \rightarrow 2x^2-x-1=0 \rightarrow$ $\rightarrow x=1,\ x=-1/2$. Los dos soluciones son válidas:

$x=1 \rightarrow \log(2)=\log(2)$

$x=-1/2 \rightarrow \log(1/2)=\log(1/2)$

3) $\log_3(2\cdot(x-3))=\log_3(\sqrt{2x}) \rightarrow 2x-6=\sqrt{2x} \rightarrow (2x-6)^2=2x \rightarrow 4x^2-26x+36=0 \rightarrow$ $x=2,\ x=9/2$. Al elevar al cuadrado debemos comprobar si las dos soluciones son válidas:

$x=2 \rightarrow 2\cdot2-6\neq\sqrt{2\cdot2}$. No solución

$x=9/2 \rightarrow 2\cdot\frac{9}{2}-6=\sqrt{2\cdot\frac{9}{2}} \rightarrow 3=3$. Solución

Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ecuaciones con exponente: *a)* si tenemos una sola potencia igualada a un número, tomamos logaritmo en la misma base en los dos lados de la ecuación(el logaritmos se va con el exponente) obteniendo la solución. b) Si tenemos varios exponente tenemos que poner todos los exponentes con misma base y luego hacer un cambio de variable. Con dicho cambio se resuelve la ecuación, y luego se deshace el cambio de variable.

Ejemplo :

$3^{x-1}=2 \rightarrow \log_3 3^{x-1}=\log_3 2 \rightarrow (x-1)\cdot\log_3 3= \log_3 2 \rightarrow (x-1)= \log_3 2 \rightarrow x=1+ \log_3 2$

$3^x+3^{x-1}+9^x=13 \rightarrow 3^x+\frac{3^x}{3}+(3^x)^2=13 \rightarrow y=3^x \rightarrow y+y/3+y^2=13 \rightarrow 3y+y+3y^2=39 \rightarrow$ $3y^2+4y-39=0 \rightarrow y=3, y=-13/3$:

$3=3^x \rightarrow x=1$

$-13/3=3^x \rightarrow x=\log_3(-13/3)$ no solución

Problemas:

1) $2^{3x-1}=11$
2) $5^{x-5}\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0$
3) $5^{x+1}=1/25$
4) $11^x-11^x+1+11^{2x}=-9$

Solución:

1) $2^{3x-1}=11 \rightarrow 3x-1=\log_2 11 \rightarrow x=(\log_2 11+1)/3$
2) $5^x-5\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0 \rightarrow 5^x-5\cdot\frac{1}{5^x}+4\cdot\frac{1}{(5^x)^3}=0 \rightarrow y=5^x \rightarrow y-\frac{5}{y}+\frac{4}{y^3}=0 \rightarrow$

   $y^4-5y^2+4=0 \rightarrow y=\pm2, y=\pm1$.

   $y=2 \rightarrow 5^x=2 \rightarrow x=\log_5 2$

   $y=1 \rightarrow 5^x=1 \rightarrow x=\log_5 1=0$

   $y=-2 \rightarrow 5^x=-2 \rightarrow x=\log_5(-2)$ no existe

   $y=1 \rightarrow 5^x=-1 \rightarrow x=\log_5(-1)$ no existe
3) $5^{x+1}=1/25 \rightarrow x+1=\log_5(1/25) \rightarrow x=-2-1=-3$
4) $11^x-11^{x+1}+11^{2x}=-9 \rightarrow 11^x-11\cdot11^x+(11^x)^2=-9 \rightarrow y=11^x \rightarrow y-11y+y^2=-9 \rightarrow$ $y^2-10y+9=0 \rightarrow y=9, y=1$

   $11^x=9 \rightarrow x=\log_{11}9$

   $11^x=1 \rightarrow x=\log_{11}1=0$

9.3 Sistemas logarítmicos y exponenciales

Se resuelven o bien haciendo cambio de variables u obteniendo ecuaciones sin logaritmos y exponentes.

a) $\left.\begin{array}{l}\log(x)-\log_2(y)=1\\ 2\log(x)+\log_2(y)=5\end{array}\right\}$

Solución

log(x)=X, log₂(y)=Y → $\left.\begin{array}{r} X-Y=1 \\ 2X+Y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} X=2 \rightarrow x=100 \\ Y=1 \rightarrow y=2 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2^x+3^y=7 \\ 2^{x+1}+1=3^{y+1} \end{array}\right\}$

Solución

$\left.\begin{array}{r} 2^x+3^y=7 \\ 2\cdot 2^x+1=3\cdot 3^u \end{array}\right\}$ 2^x=X, 3^y=Y → $\left.\begin{array}{r} X+Y=7 \\ 2\cdot X+1=3\cdot Y \end{array}\right\}$ → $\begin{array}{l} X=4 \rightarrow x=2 \\ Y=3 \rightarrow y=1 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} \log(x)+\log(y)=3 \\ x+y=70 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} \log(x\cdot y)=3 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (x\cdot y)=10^3 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1=20,\ y_1=50 \\ x_1=50,\ y_1=20 \end{array}$$

d) $\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 4^y=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 2^{2y}=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^{x+2y}=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}$$

e) $\left.\begin{array}{l} \log(x+y)-\log(x-y)=\log(5) \\ 2^x/2^y=2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\log(5) \\ 2^{x-y}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5x-5y \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$$