TEMA 3: CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Valor Absoluto

Trabajaremos en el campo de los números reales, $\mathbb{R}$. Para el estudio de las propiedades de las funciones necesitamos el concepto de valor absoluto de un número real.

Definición 1.1. Sea a un número real. Entonces el valor absoluto de a es el número real $|a|$ definido por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a \geq 0 \end{cases} .$$

El valor absoluto $|a|$ se puede interpretar como la distancia del punto a al origen en la recta real.

1.1. **Propiedades.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a| \geq 0$, y $|a| = 0$ si, y solo si $a = 0$.
(2) $-|a| \leq a \leq |a|$.
(3) $|ab| = |a||b|$.
(4) $|a| = \sqrt{a^2}$
(5) If $a^2 \leq b^2$, entonces $|a| \leq |b|$.
(6) (Desigualdad Triangular)

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

(7) Sea p un número positivo. Entonces
  (a) $|a| \leq p$ si, y solo si $-p \leq a \leq p$.
  (b) $|a| \geq p$ si, y solo si $a \geq p$ o $a \leq -p$.

Ejemplo 1.2. Demostrar la desigualdad triangular.

Solución:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

de donde concluímos que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Ejemplo 1.3. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $5 < |2x-1| \leq 9$.

Solución: De (6b) tenemos que, $5 < |2x-1|$ si, y solo si $2x - 1 > 5$ o $2x - 1 < -5$; por lo que, $x > 3$ o $x < -2$, esto es, $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. De(6a) tenemos que, $|2x-1| \leq 9$ si, y solo si $-9 \leq 2x - 1 \leq 9$; por lo que $-4 \leq x \leq 5$, esto es, $x \in [-4, 5]$. Ambas desigualdades se verifican simultáneamente si, y solo si x pertenece a $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ y a $[-4, 5]$. En consecuencia, el conjunto solución es $[-4, -2) \cup (3, 5]$.

2. Funciones

Una *función* f consiste en dos conjuntos, D y R, llamados el *dominio* y el *rango* de f, y una regla que asigna a cada elemento de D exactamente un elemento de R. Esto se expresa como $f : D \longrightarrow R$. La *gráfica* de f es el conjunto G de pares ordenados (x, y) tal que x está en el dominio de la función e y es el correspondiente elemento en el rango. El *valor* de la función en $x \in D$ es el elemento $y \in R$ tal que $(x, y) \in G$ y será denotado por $y = f(x)$. Así, el rango es el conjunto $R = \{f(x) \,|\, x \in D\}$, y la gráfica

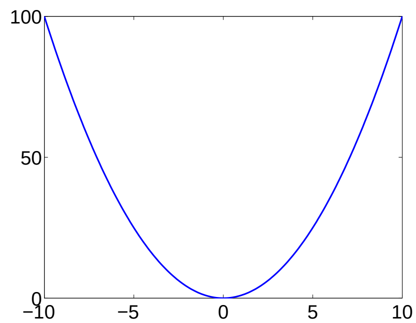
$$G = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}.$$

Para remarcar la dependencia de los conjuntos anteriores con la función f, a menudo escribiremos $D(f)$, $R(f)$ y $G(f)$.

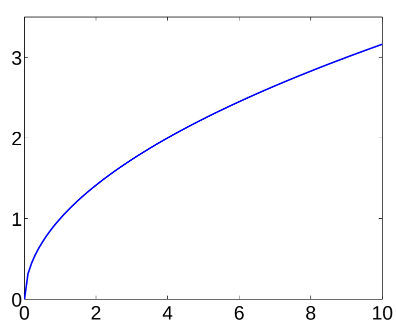
Estaremos especialmente interesados en las funciones reales de una variable real con $D, R \subset \mathbb{R}$ y en las de dos variables, con $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}$. Nos concentraremos primero en las funciones de una variable.

Ejemplo 2.1.

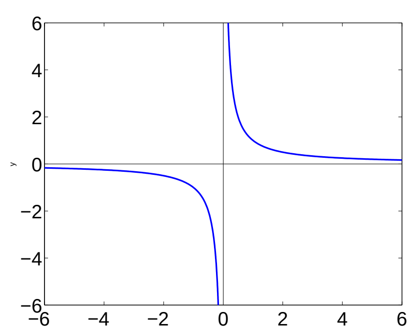
(1) Sea $f(x) = x^2$. El dominio es $D = \mathbb{R}$ y el rango es $R = [0, +\infty)$. La gráfica es una parábola que pasa por el punto $(0, 0)$ y que abre hacia arriba.



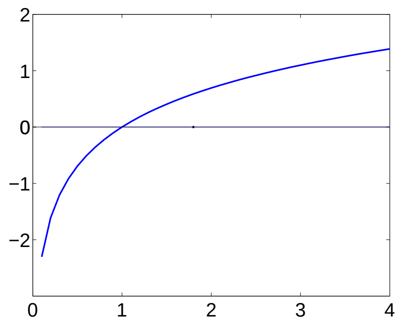
(2) Sea $g(x) = \sqrt{x}$. El dominio es $D(g) = [0, +\infty)$ y el rango es $R(g) = [0, +\infty)$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



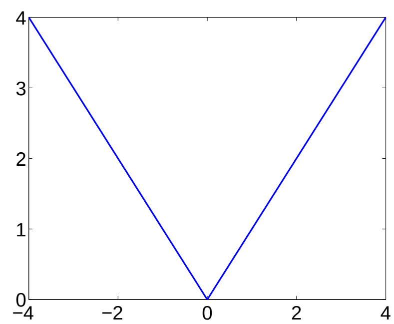
(3) Sea $h(x) = 1/x$. El dominio es $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$ y el rango es $R(h) = \mathbb{R} - \{0\}$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



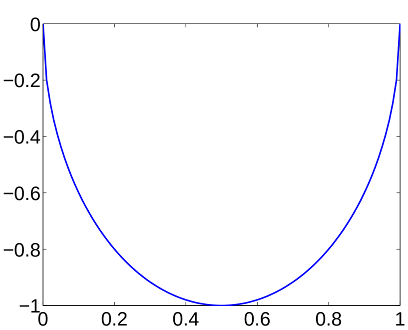
(4) Sea $l(x) = \ln x$. El dominio es $D(l) = (0, +\infty)$ y el rango es $R(l) = \mathbb{R}$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



(5) Sea $m(x) = |x|$. El dominio es $D(m) = \mathbb{R}$ y el rango es $R(m) = [0, +\infty)$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



(6) Sea $n(x) = -2\sqrt{x(1-x)}$. El dominio es $D(n) = [0, 1]$ y el rango es $R(n) = [-1, 0]$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.

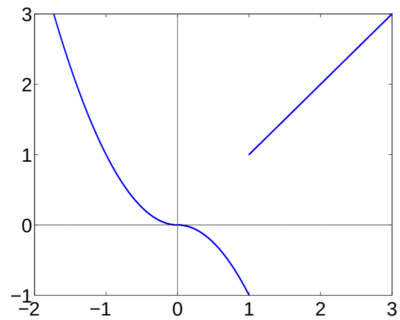


El dominio de una función se desprende de la definición de la función. El rango, en cambio, no está siempre determinado. La gráfica de la función siempre ayuda a visualizar el rango.

Una función puede venir definida a trozos. Como ejemplo, la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ -x^2, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 2.2. El costo de fabricación de x litros de un detergente es de $1 + 1/x$ euros por litro. ¿Cuál es el costo total de fabricación de 100 litros? ¿Cuál será el beneficio si se fabrica x litros de detergente y se vende a 2 euros por litro?

SOLUCIÓN: El costo de fabricación de 100 litros es $100 \times (1 + 1/100) = 101$ euros. Sea $c(x)$ el costo de fabricación de x litros; entonces $c(x) = x(1 + 1/x) = x + 1$. El beneficio $\Pi(x)$ es igual a ventas menos costo, por lo que $\Pi(x) = 2x - c(x) = x - 1$. En particular, si se fabrica 100 litros el beneficio será $\Pi(100) = 99$ euros.

2.1. **Operaciones con funciones.** Consideremos las funciones $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow R$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) La suma de f y g es la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
(2) El producto de la función f por un escalar λ es la función definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
(3) El producto de f y g es la función definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
(4) El cociente de f y g es la función definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ siempre que $g(x) \neq 0$.

2.2. **Composición de funciones.** Sean las funciones $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$. Necesitamos imponer que $R(f) \bigcap D(g) \neq \varnothing$.

Definición 2.3. La composición de funciones f y g es la función $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

donde $D \subset D(f)$.

Ejemplo 2.4. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2x$, encontrar $g \circ f$, $f \circ g$ y sus respectivos dominios y rangos.

SOLUCIÓN: Por definición

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{4 - x^2}) = 2\sqrt{4 - x^2},$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{4 - (2x)^2} = 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Observemos que $g \circ f \neq f \circ g$. Finalmente

$$D(g \circ f) = [-2, 2],$$
$$D(f \circ g) = [-1, 1].$$

y (¿por qué?)

$$R(g \circ f) = [0, 4],$$
$$R(f \circ g) = [0, 2].$$

2.3. **Función inversa.** La función $I(x) = x$ es llamada función *identidad*. Se define la inversa de la función f a la función g (si existe) tal que $f \circ g = g \circ f = I$.

Definición 2.5. La inversa de la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es denotada por f^{-1} y satisface

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x.$$

Observemos que la inversa de la función f tiene las siguientes propiedades:

(1) El dominio de f^{-1} es el rango de f.
(2) El rango de f^{-1} es el dominio de f.

Ejemplo 2.6. Si $f(x) = \frac{x-1}{2}$ y $g(x) = 2x + 1$, f y g son funciones inversas. Puesto que,

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$

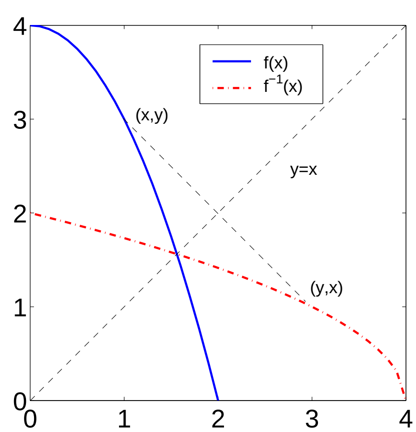
$$f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x.$$

Ejemplo 2.7. Encontrar la inversa de $f(x) = 4 - x^2$ para $x \geq 0$.

Solución: La inversa de f se puede determinar de la siguiente manera:

(1) Fijamos $y = 4 - x^2$.
(2) Intercambiamos x e y, $x = 4 - y^2$, para $y \geq 0$ (esto describe $y = f^{-1}(x)$).
(3) Resolvemos para y, $y = \sqrt{4-x}$ (puesto que $y \geq 0$ ignoramos la raíz negativa).

Por lo que $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$, con dominio $(-\infty, 4]$. Las gráficas de f y su inversa se muestran en la siguiente figura.



Observemos que por cada punto (x, y) en la gráfica de $y = f(x)$, existe un punto (y, x) en la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Esto ocurre por que cada vez que $f(x) = y$, tenemos que $f^{-1}(y) = x$, por la definición de funciones inversas. De aquí que, si doblamos el plano de coordenadas a lo largo de la recta $y = x$, entonces las gráficas de f y f^{-1} coinciden. La recta $y = x$ es la recta de simetría.

Observación 2.8. No todas las funciones poseen inversas. Las funciones que tienen inversas son llamadas *funciones uno-a-uno*, lo que significa que para cada valor de y le corresponde exactamente un valor de x. Las funciones uno-a-uno pueden ser identificadas realizando la *prueba de la recta horizontal:* Si la gráfica de f es tal que ninguna línea horizontal corta la gráfica en más de un punto, entonces f es uno-a-uno y por tanto admite inversa.

Ejemplo 2.9. La función $y = f(x) = 4 - x^2$ no es uno-a-uno ya que a $y = 3$ le corresponde dos valores distintos de x, a saber $x = 1$ y $x = -1$: $f(1) = f(-1) = 3$. Por lo que la función f en $\mathbb{R}$ no tiene inversa. Esta es la razón por la cual consideramos en el ejemplo anterior la función en la región $x \geq 0$. La función no pasa la prueba de la recta horizontal en $\mathbb{R}$ pero la prueba es positiva en la región $x \geq 0$ y f admite inversa en $[0, \infty)$.

2.4. **Simetría y periodicidad.** Una función f es *periódica* con *período* $p > 0$ si para todo x en el dominio de f, $f(x+p) = f(x)$ (En realidad, el período $p > 0$ es el valor más pequeño que cumple con esta propiedad). Como sabemos, las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son funciones periódicas con período 2π, y $\tan(x)$ es con período π.

En general, si una función $f(x)$ es periódica con período p, entonces $g(x) = f(cx)$ es periódica con periodo p/c ($c \neq 0$). Esto se puede verificar fácilmente de la siguiente manera:

$$g(x + p/c) = f(c(x + p/c)) = f(cx + p) = f(cx) = g(x).$$

Así, la función $\operatorname{sen} 2x$ es periódica con período π.

Una función f es una *función par* si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y. Las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 2x^4$ y $f(x) = \cos x$ son pares.

Una función f es una *función impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f. La gráfica de una función impar tiene como punto de simetría al origen, esto es, el origen es el punto medio del segmento que une los pares de puntos de la gráfica de f. Las funciones $f(x) = x$, $f(x) = x^3 + x^5$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ son impares.

3. Funciones monótonas

Se dice que una función f es monótona *creciente* si para cualquier par de puntos $x, y \in D(f)$ tales que $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$(*estrictamente creciente* si $f(x) < f(y)$).

Se dice que una función f es monótona *decreciente* si para cualquier par de puntos $x, y \in D(f)$ tales que $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$ (*estrictamente decreciente* si $f(x) > f(y)$).

Las definiciones pueden estar referidas a un intervalo I.

Ejemplo 3.1. La función $f(x) = x^2$ no es monótona en $\mathbb{R}$ pero es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Para verificar que es estrictamente creciente en $[0, \infty)$, sea $0 \leq x < y$. Entonces $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0$ puesto que $y > x \geq 0$.

4. Límite de una función

Para determinar el comportamiento de una función f cuando x se aproxima a un valor finito c, usamos el concepto de límite. Decimos que el límite de f es L, y escribimos $\lim_{x\to c} f(x) = L$, si los valores de f se aproximan a L cuando x se acerca a c.

Definición 4.1. (Límite cuando x tiende a un valor finito c). Decimos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un nḿero positivo δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Podemos dividir la definición anterior en dos partes, usando límites laterales.

Definición 4.2.

(1) Decimos que L es el límite de f cuando x tiende a c por la derecha, $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $0 < x - c < \delta$.

(2) Decimos que L es el límite de f cuando x tiende a c por la izquierda, $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$, si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un número positivo δ tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon$$
siempre que $0 < c - x < \delta$.

Teorema 4.3. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *sí, y solo si*
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L.$$

También cabe preguntarse por el comportamiento de la función de f cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición 4.4. (Límites cuando x tiende a $\pm\infty$)

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un valor positivo de x, llamado x_1, tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon$$
siempre que $x > x_1$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un valor negativo de x, llamado x_1, tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon$$
siempre que $x < x_1$.

Si los valores absolutos de una función se hacen arbitrariamente grandes cuando x tiende, ya sea, a un valor finito c o a $\pm\infty$, entonces la función no tiene límite finito L pero se aproximará a $-\infty$ o $+\infty$. Es posible dar una definición formal. Por ejemplo, diremos que $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si para cualquier número positivo grande M, existe un positivo δ tal que
$$f(x) > M$$
siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Por favor, complete el resto de los casos.

Observación 4.5. Si el punto c pertenece al dominio de la función f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 4.6. Consideremos los siguientes límites.

(1) $\lim\limits_{x\to 6} x^2 - 2x + 7 = 31$.

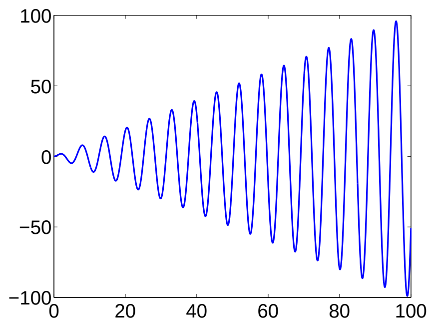
(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - 2x + 7 = \infty$, puesto que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x^2 = \infty$, puesto que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes para valores grandes de x, en cambio, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - x^2 = -\infty$ ya que que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, y negativos.

(4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ya que para x arbitrariamente grande en valor absoluto , $1/x$ es arbitrariamente pequeño.

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe. En realidad, los límites laterales son:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$
El límite por la derecha es infinito puesto que $1/x$ se hace arbitrariamente grande cuando x es pequeño y positivo. El límite por la izquierda es menos infinito puesto que $1/x$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto y negativo, cuando x es pequeño y negativo.

(6) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$ no existe. Como x tiende a infinito, $\operatorname{sen} x$ oscila entre 1 y -1. Esto significa que $x \operatorname{sen} x$ cambia de signo un número infinito de veces cuando x tiende a infinito, tomando valores arbitrariamente grandes en valor absoluto. La gráfica se muestra a continuación.



(7) Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0; \\ -x^2, & \text{si } 0 < x \le 1; \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, pero $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe puesto que los límites laterales son diferentes.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2 = -1.$$

(8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe, ya que los límites laterales son diferentes.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{(cuando } x \text{ es negativo, } |x| = -x).$$

En las siguientes propiedades, $\lim f(x)$ se refiere al límite cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o a un número real fijo c, pero no mezclaremos distintos tipos de límites.

4.1. **Propiedades de los límites.** Dadas las funciones f y g supondremos que todos los límites siguientes existen; $\lambda \in \mathbb{R}$ denota un escalar arbitrario.

(1) *Producto por un escalar:* $\lim \lambda f(x) = \lambda \lim f(x)$.
(2) *Suma:* $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$.
(3) *Producto:* $\lim f(x)g(x) = (\lim f(x))(\lim g(x))$.
(4) *Cociente:* Si $\lim g(x) \neq 0$, entonces $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

Teorema 4.7 (Teorema del encaje)**.** *Supongamos que las funciones f, g y h están definidas en un entorno del punto c, excepto posiblemente, en c, y que satisfacen las desigualdades*

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Sea $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. *Entonces*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Ejemplo 4.8. Demostrar que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Solución: Usaremos el teorema anterior con $g(x) = -|x|$ y $h(x) = |x|$. Notemos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$ así, cuando $x > 0$

$$-x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq x,$$

y cuando $x < 0$

$$-x \geq x \operatorname{sen}(1/x) \geq x.$$

Estas desigualdades son equivalentes a $-|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$. Y puesto que

$$\lim_{x \to 0} -|x| = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

podemos usar el teorema anterior para concluir que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

4.2. **Técnicas para evaluar** $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$**.**

(1) Usamos la propiedad del cociente de límtes, si es posible.
(2) Si $\lim f(x) = 0$ y $\lim g(x) = 0$, probamos lo siguiente:
   (a) Factorizamos $f(x)$ y $g(x)$ y reducimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ a sus términos más simples.
   (b) Si $f(x)$ o $g(x)$ implica una raíz cuadrada, entonces multiplicamos ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ por el conjugado de la raíz cuadrada.

Ejemplo 4.9.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \to 3} (x - 3) = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} \left(\frac{1 + \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}.$$

(3) Si $f(x) \neq 0$ y $\lim g(x) = 0$, entonces $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe o equivalentemente $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ o $-\infty$.
(4) Si x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x en cualquiera de los términos del denominador.

Ejemplo 4.10.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x}{-x^4 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0}{-1 + 0} = 0.$$

4.3. **Un límite importante.** Recordar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 4.11. Encontrar los siguientes límites:

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \overset{(z=3x)}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\frac{z}{3}} = 3 \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 3.$

5. Asíntotas

Una*asíntota* es una recta tal que la gráfica de la función se acerca arbitrariamente a ella hasta que la distancia entre la curva y la recta casi se desvanece.

Definición 5.1. Sea f una función

(1) La recta $x = c$ es una asíntota vertical de f si $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$.
(2) La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de f si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.
(3) La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblícua de f si

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$, o

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$.

Notemos que una asíntota horizontal es un caso particular de una asíntota oblícua con $a=0$.

Ejemplo 5.2. Determinar las asíntotas de $f(x)=\dfrac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$.

Solución: Cuando $x=1$, el denominador es 0 y el numerador es distinto de 0. El dominio de f es $\mathbb{R}-\{1\}$. Vamos a chequear que $x=1$ es una asíntota vertical de f:

$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}=+\infty$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+\text{términos de orden inferior}}{x^4+\text{términos de orden inferior}}=1,$$

por lo tanto $y=1$ es una asíntota horizontal en $+\infty$. De la misma manera, $y=1$ es una asíntota horizontal en $-\infty$. No hay otras asíntotas oblícuas (la gráfica de f puede tener a lo sumo dos asíntotas oblícuas, una por la izquierda y otra por la derecha).

Ejemplo 5.3. Determinar las asíntotas de $f(x)=\dfrac{3x^3-2}{x^2}$.

Solución: El dominio de f is $\mathbb{R}-\{0\}$. Vamos a chequear que $x=0$ es una asíntota vertical de f.

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{3x^3-2}{x^2}=\lim_{x\to0^\pm}(3x-\frac{2}{x^2})=\lim_{x\to0^\pm}3x-\lim_{x\to0^\pm}\frac{2}{x^2}=-\infty.$$

Así, $x=0$ es una asíntota vertical de f. Por otro lado

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(3x-\frac{2}{x^2})=\pm\infty$$

por lo que la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. Vamos a estudiar ahora las asíntotas oblícuas:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(3-\frac{2}{x^3}\right)=3,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3-2}{x^2}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=0.$$

Concluímos que $y=3x$ es una asíntota oblícua tanto en $+\infty$ como $-\infty$.

6. Continuidad

Los límites más sencillos de evaluar son aquellos donde intervienen funciones continuas. Intuitivamente, una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Definición 6.1. Una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en c si $c\in D(f)$ y

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c).$$

Por consiguiente, f es *discontinua en* c si bien $f(c)$ no está definida o bien si $\lim_{x\to c}f(x)$ no existe o $\lim_{x\to c}f(x)\neq f(c)$.

6.1. **Propiedades de las funciones continuas.** Sean f y g ambas funciones continuas en c. Entonces las siguientes funciones son también continuas en c.

(1) *Suma.* $f+g$.
(2) *Producto por un escalar.* λf, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) *Producto.* fg.
(4) *Cociente.* f/g, siempre que $g(c) \neq 0$.

6.2. **Continuidad de una función compuesta.** Sea f una función continua en c y g continua en $f(c)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también continua en c.

6.3. **Continuidad de funciones elementales.** Se dice que una función es *elemental* si esta puede ser obtenida por medio de un número finito de operaciones aritméticas elementales y superposiciones de funciones elementales básicas. Las funciones $y = C = \text{constant}$, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \arctan x$ son ejemplos de funciones elementales. *Las funciones elementales son funciones continuas en sus dominios.*

Ejemplo 6.2.

(1) La función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es la composición de las funciones $y = 4 - x^2$ y $f(y) = y^{1/2}$, que a su vez son funciones elementales, por lo que f es continua en su dominio, esto es, en $D = [-2, +2]$.
(2) La función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ es la composición de la función anterior f y la función $g(y) = 1/y$, por lo que ella es elemental y continua en su dominio, $D(g) = (-2, +2)$.

6.4. **Teoremas de continuidad.** Las funciones continuas poseen propiedades interesantes. Diremos que una función es continua en el intervalo *cerrado* $[a, b]$ si es continua en todo punto $x \in [a, b]$.

Teorema 6.3 (Teorema de Bolzano). *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejemplo 6.4. Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ admite una solución, y encontrar la solución con un error menor a 0.1.

Solución: Si $f(x) = x^3 + x - 1$, el problema es mostrar que existe un c tal que $f(c) = 0$. Queremos aplicar el teorema de Bolzano. Primero, f es continua en $\mathbb{R}$. Luego, podemos identificar un intervalo adecuado $I = [a, b]$. Note que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ así, existe una solución $c \in (0, 1)$.

Ahora, para hallar una valor aproximado de c, usamos un método de *bisección* de la siguiente manera: consideramos el intervalo $[0.5, 1]$; $f(0.5) = 1/8 + 1/2 - 1 < 0$ y $f(1) > 0$, así $c \in (0.5, 1)$. Escogemos ahora el intervalo $[0.5, 0.75]$; $f(0.5) < 0$ y $f(0.75) = 27/64 + 3/4 - 1 > 0$ así, $c \in (0.5, 0.75)$. Sea ahora el intervalo $[0.625, 0.75]$; $f(0.625) \approx -0.13$ y $f(0.74) > 0$ así, $c \in (0.625, 0.75)$. La solución es aproximadamente $c = 0.6875$ con un error máximo de 0.0625.

Teorema 6.5 (Teorema de Weierstrass). *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existen puntos $c, d \in [a, b]$ tal que*

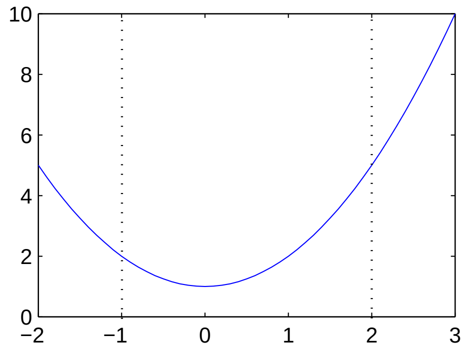
$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

para todo $x \in [a, b]$.

El teorema afirma que una función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor mínimo ($m = f(c)$) y un valor máximo ($M = f(d)$). El punto c es llamado *mínimo global* de f en $[a, b]$ y d es llamado *máximo global* de f en $[a, b]$.

Ejemplo 6.6. Demostrar que la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo cerrado $[-1, 2]$ alcanza máximo y mínimo global en dicho intervalo.

Solución: La gráfica de f se muestra a continuación.



Podemos apreciar que f es continua en $[-1, 2]$, en realidad, es continua en todo $\mathbb{R}$, y f alcanza su valor máximo en $x = 2$, $f(2) = 5$ y su valor mínimo en $x = 0$, $f(0) = 1$ en el intervalo $[-1, 2]$.