3.1 Ejercicios Trigonometría 4.1

3.1.1 Ejercicios resueltos

1. Comprobar la siguiente identidad trigonométrica curiosa:

$$\mathsf{tg}^2(\alpha) - \mathsf{sen}^2(\alpha) = \mathsf{tg}^2(\alpha) \cdot \mathsf{sen}^2(\alpha)$$

Solución:

En primer lugar desarrollaremos el primer término de la igualdad. Así:

$$\begin{aligned}
\mathsf{tg}^2(\alpha) - \mathsf{sen}^2(\alpha) &= \frac{\mathsf{sen}^2}{\cos^2(\alpha)} - \mathsf{sen}^2(\alpha) = \\
\frac{\mathsf{sen}^2(\alpha) - \mathsf{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{\mathsf{sen}^2(\alpha)(1-\cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} = \\
\frac{\mathsf{sen}^2(\alpha) \cdot (\overbrace{\mathsf{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}^{1} - \cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{\mathsf{sen}^2(\alpha) \cdot \mathsf{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \\
&= \mathsf{tg}^2(\alpha) \cdot \mathsf{sen}^2(\alpha)
\end{aligned}$$

2. Sabiendo que $\mathsf{tg}(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$ calcular $\mathsf{sen}(\mathsf{x})$.

Solución:

Como vimos, utilizando la expresión de la tangente del ángulo doble tenemos::

$$\mathsf{tg}(\mathsf{x}) = \mathsf{tg}(2\frac{\mathsf{x}}{2}) = \frac{2\mathsf{tg}(\frac{x}{2})}{1-\mathsf{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 * \frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

Ahora bien, conocemos $\mathsf{tg}(\mathsf{x})$ pero nos piden $\mathsf{sen}(\mathsf{x})$. Este caso es típico, para ello partiremos de la relación fundamental:

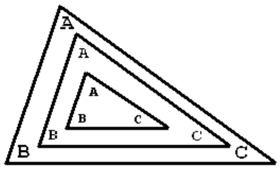
$$\begin{aligned}
\mathsf{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \Rightarrow \frac{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})}{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})} + \frac{\cos^2(\mathsf{x})}{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})} = \frac{1}{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})} \\
1 + \frac{1}{\mathsf{tg}^2(\mathsf{x})} &= \frac{1}{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})} \Rightarrow 1 + \frac{1}{(4/3)^2} = \frac{1}{\mathsf{sen}^2(\mathsf{x})} \\
\mathsf{sen}^2(\mathsf{x}) &= \frac{16}{25} \Rightarrow \mathsf{sen}(\mathsf{x}) = \pm\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Notar que tenemos dos valores (uno positivo y otro negativo) ya que la tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, pero no así en seno.

3. Conocidos los tres ángulos de un triángulo es posible resolver el triángulo?

Solución:

La respuesta a esta cuestión es negativa, ya que existen infinitos triángulos semejantes a uno dado con idénticos ángulos.

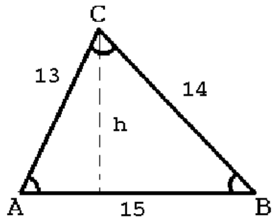


Lo que si sabremos es que los lados de todos ellos serán proporcionales.

4. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13, 14 y 15 cm. Hallar sus ángulos así como es área del triángulo.

   Solución:

   A partir de los datos del problema debemos encontrar los valores de los ángulos.



Como nos dan sus tres lados podemos aplicar el teorema del coseno, de donde:

$$\begin{aligned} \mathsf{c}^2 &= \mathsf{a}^2 + \mathsf{b}^2 - 2\mathsf{ab}\cos(\mathsf{C}) \\ 15^2 &= 13^2 + 14^2 - 2 * 13 * 14 * \cos(\mathsf{C}) \\ \cos(\mathsf{C}) &= \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 * 13 * 14} \Rightarrow \mathsf{C} = \arccos(0.3846) = 1.176 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \mathsf{a}^2 &= \mathsf{b}^2 + \mathsf{c}^2 - 2\mathsf{bc}\cos(\mathsf{A}) \Rightarrow \cos(\mathsf{A}) = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 * 13 * 15} \\ \mathsf{A} &= \arccos(0.508) = 1.038 \text{ rad} \end{aligned}$$

Utilizando que la suma de los ángulos ha de ser π rad, tenemos:

$$\mathsf{B} = \pi - 1.038 - 1.176 = 0.927$$

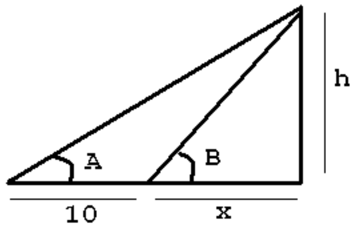
Por otro lado para calcular el área debemos notar que, por ejemplo:

$$\mathsf{sen}(\mathsf{A}) = \frac{\mathsf{h}}{13} \Rightarrow \mathsf{h} = 13 * \sin(1.038) = 11.198$$

de donde:

$$\mathsf{area} = \frac{\mathsf{base} \cdot \mathsf{altura}}{2} = \frac{15 * 11.198}{2} = 83.985 \text{ cm}^2$$

5. Encontrar el valor de x y h a partir de los datos que se nos indican en el siguiente dibujo, sabiendo que $\mathsf{A} = \pi/6$ y $\mathsf{B} = \pi/3$.



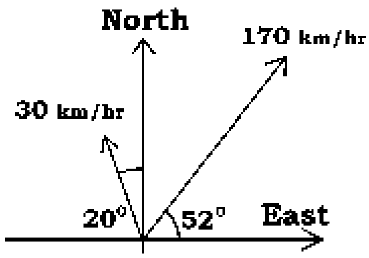
Solución:

A partir de las tangentes de los ángulos A y B obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{tg}(\mathsf{A}) = \frac{h}{10+x} \\ \mathsf{tg}(\mathsf{B}) = \frac{h}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \mathsf{tg}(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \mathsf{tg}(\pi/3) = \sqrt{3} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{h}{10+x} \\ \sqrt{3} = \frac{h}{x} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \mathsf{h} = 5\sqrt{3} \text{ unidades} \\ \mathsf{x} = 5 \text{ unidades} \end{array}$$

6. Un aeroplano vuela a 170 km/s hacia el nordeste, en una dirección que forma un ángulo de 52° con la dirección este. El viento está soplando a 30 km/h en la dirección noroeste, formando un ángulo de 20^o con la dirección norte. ¿Cuál es la "velocidad con respecto a tierra" real del aeroplano y cuál es el ángulo A entre la ruta real del aeroplano y la dirección este?



Solución:

Indiquemos la velocidad del aeroplano relativa al aire como V, la velocidad del viento relativa a tierra como W, y la velocidad del aeroplano relativa a tierra U=V+W.

Para ejecutar la suma real cada vector debe descomponerse en sus componentes. Por tanto obtenemos:

$$\mathsf{Vx} = 170\mathsf{cos}(52°) = 104.6 \qquad \mathsf{Vy} = 170\mathsf{sen}(52°) = 133.96$$

$$\mathsf{Wx} = -30\mathsf{sen}(20°) = -10.26 \qquad \mathsf{Wy} = 30\mathsf{cos}(20°) = 28.19$$

de donde:

$$\mathsf{Ux} = 94.4 \qquad \mathsf{Uy} = 162.15$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras, dado que

$$U^2 = Ux^2 + Uy^2 \Rightarrow U = 187.63 km/h$$

Por otro lado

$$\cos(A) = \frac{U_x}{U} = 0.503125 \Rightarrow A = \arccos(0.503125) = 1.0436 \text{ rad} = 59.8^0$$

3.1.2 Ejercicios propuestos

1. Calcular todos los ángulos $\alpha \in [0, 2\pi]$ tales que $2 \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot tg(\alpha)$ (**sol:** $\alpha = \pi/6$, $\alpha = 5\pi/6$)
2. Si α y β son ángulos comprendidos entre 0 y 2π radianes. ¿Qué relación hay entre ellos si se verifica que $sen(\alpha) = -sen(\beta)$ y $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$? (**sol:** $\beta = -\alpha$).
3. ¿Que relación existe entre las razones trigonométricas de $(\pi/4 - \alpha)$ y $(\pi/4 + \alpha)$? (**sol:** Al ser complementarios $sen(\pi/4 - \alpha) = \cos(\pi/4 + \alpha)$ y viceversa).
4. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 1/3$ y que $\alpha \in [0, \pi/2]$ determinar $\cos(\pi/2 - \alpha)$, $sen(3\pi/2 + \alpha)$ y $tg(\pi - \alpha)$ (**sol:** $\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $sen(3\pi/2 + \alpha) = -1/3$; $tg(\pi - \alpha) = 2\sqrt{2}$).
5. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 3/5$ y que $\alpha \in [3\pi/2, 2\pi]$ determinar $sen(\alpha)$, $tg(\alpha)$ y $\cos(\alpha/2)$ (**sol:** $sen(\alpha) = -4/5$; $tg(\alpha) = -4/3$; $\cos(\alpha) = -2/\sqrt{5}$).
6. Comprobar que las siguientes expresiones no dependen del valor de α y determinar su valor:

$$sen(\alpha)\cos(\pi/4 - \alpha) - \cos(\alpha)\cos(\pi/4 + \alpha) \quad (\textbf{sol:}\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos(\alpha)\cos(\pi/6 + \alpha) + sen(\alpha)\cos(\pi/3 - \alpha) \quad (\textbf{sol:}\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

7. Demostrar las identidades:

a) $\cos(\alpha) = sen\,(\alpha + \pi/2)$	b) $1 + \cot g^2(\alpha) = \cos ec^2(\alpha)$
c) $\sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha)$	d) $tg(\alpha) + \cot g(\alpha) = \sec(\alpha) \cdot \cos ec(\alpha)$

8. Sabiendo que $tg(\alpha) = 2$ y que $4 \cdot sen(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$ hallar $tg(\beta)$ (**sol:** $tg(\beta) = 7/2$).
9. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \cdot \cos(x) = 3 \cdot tg(x) \text{ } (\textbf{sol: } x = \pi/6 + 2k\pi \text{ ; } x = 5\pi/6 + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z})$$

10. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica sabiendo que $x \in [0, 2\pi]$:

$$3sen(2x) \cdot \cos(x) = 2sen^3(x) \text{ } (\textbf{sol: } x = 0, \pi, \pi/6 \text{ ó } 7\pi/6 \text{ rad})$$

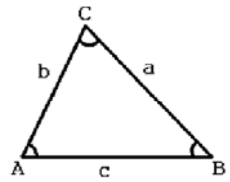
11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que x e $y \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = \sqrt{2} \\ x + y = \pi/2 \end{cases} \quad (\textbf{sol: x=y=}\pi/4 \text{ ; x=}3\pi/4 \text{ y=-}\pi/4)$$

12. Resolver, si es posible, los siguientes triángulos:

$$\begin{aligned}
\text{a) } a &= 100\text{cm}, B = 47^0, C = 63^0 \ (\textbf{sol}: b = 77.82\text{cm}, c = 94.81\text{cm}, A = 70^0) \\
\text{b) } A &= \pi/3, B = \pi/2, C = \pi/6 \ (\textbf{sol: } \text{Infinitos triángulos}) \\
\text{c) } a &= 25 \text{ cm}, b = 30\text{cm}, c = 40\text{cm} \ (\textbf{sol: } A = 0.67\text{rad}, B = 0.85\text{rad}, C = 1.62\text{rad}) \\
\text{d) } b &= 6\text{cm}, c = 8 \text{ cm}, C = 57^0 \ (\textbf{sol}: a = 9.48\text{cm}, A = 84.03^0, B = 38.97^0)
\end{aligned}$$

donde:



13. Sean A y B los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo. Probar que:
    (a) $\text{sen}^2(A) + \text{sen}^2(B) = 1$
    (b) $\text{tg}(A) \cdot \text{tg}(B) = 1$

14. Sean A, B y C los ángulos de un triángulo cualesquiera. Probar que
    (a) $\text{sen}(A) = \text{sen}(B + C)$
    (b) $\cos(A) + \cos(B + C) = 0$

15. Los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 cm respectivamente y forman un ángulo de 0.5 rad. Calcular la medida de sus diagonales (**sol:** 13.46 cm y 4.31 cm).

16. Se desea calcular la distancia entre dos puntos A y B de un terreno llano que no son accesibles. Para ello, se toman dos puntos accesibles del terreno C y D y se determinar las distancias y ángulos siguientes:

$$\begin{array}{lll}
CD = 300\text{m} & \alpha = ACD = 85^0 & \beta = BDC = 75^0 \\
 & \alpha' = BCD = 40 & \beta' = ADC = 35^0
\end{array}$$

Calcular la distancia de A a B (**sol:227.7 m)**

4.1 Tema 4.5 Complejos

Ejemplo: *Efectúa* $\frac{i}{3+i}$, $\frac{1+i^7}{1-i}$ *y* $\frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i}$

$$\frac{i}{3+i} = \frac{i}{3+i}\frac{3-i}{3-i} = \frac{3i-i^2}{3^2-i^2} = \frac{3i-(-1)}{9-(-1)} = \frac{3i+1}{9+1} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

Observemos que:

$$i^0 = 1, i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, \ldots$$

$$\frac{1+i^7}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i} &= \frac{1+3i-2i+i^2}{1+3i} = \frac{1+i-1}{1+3i} = \frac{i}{1+3i} = \\ &= \frac{i}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{i-3i^2}{1^2-3^2i^2} = \frac{i+3}{1+9} = \frac{3}{10} + i\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ejemplo: *Resuelve la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \\ &= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{-1}\right)}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \end{aligned}$$

Ejemplo: *Comprueba que la suma* $z + \dfrac{1}{z}$ *nunca puede ser imaginario puro, salvo que* z *también lo sea.*

Sea $z = x + iy \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

para que sea imaginario puro, tiene que ser:

$$x + \frac{x}{x^2+y^2} = 0 = x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo: *¿Qué condiciones tiene que cumplir* z *para que* $z + \dfrac{1}{z}$ *sea real?*

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

para que sea un número real, tiene que verificar:

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow 1 = x^2+y^2 \end{cases}$$

o z es un número real o bien su afijo se encuentra sobre la circunferencia unidad de centro $(0,0)$.

Ejemplo: *Dado el polinomio $x^2+3x+1 = p(x)$, demuestra que $p(z) = p(\overline{z})$ cualesquiera que sean los z para los que $p(z) \in \mathbb{R}$*

Sea $z = a+bi$, por las propiedades de la conjugación, sabemos que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = p(z) \Leftrightarrow p(z) \in \mathbb{R}$, luego, $(a+bi)^2 + 3(a+bi) + 1 \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 + 2abi + 3a + 3bi + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab + 3b = 0$$

Ejemplo: *Calcula el producto $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100}$ y la suma $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$.*

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100} = i^{1+2+\cdots+100} = i^{5050} = i^{2+4\cdot 1262} = i^2 \cdot \left(i^4\right)^{1262} = i^2 = 1$$

$$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100} = \frac{i \cdot i^{100} - i}{i-1} = \frac{i-i}{i-1} = 0$$

Ejemplo: *Representa en el plano complejo los números que verifican:*

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2}$
2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i$

Solución.-

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + iy + x - iy = 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$
2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i \Rightarrow x + iy - (x - iy) = 2yi = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

Ejemplo: *Describe el conjunto de puntos z tal que:*

1. $\mathrm{Re}(z) = 0$; $\mathrm{Re}(z) > 0$; $|z| = 1$; $|z| > 1$; $\mathrm{Im}(z) = 1$; $\mathrm{Im}(z) < 1$; $1 < |z| < 2$.
2. $|z-1| = 2$; $|z-1| < 2$; $|z-1| = |z+1|$
3. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$; $|z-2| = \mathrm{Re}(z) + 2$; $|z-5| - |z+5| = 6$; $|z-3| + |z+3| = 8$

Solución.-

1. Si $z = x + iy \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = 0$ que representa una recta, el eje de ordenadas; $\mathrm{Re}(z) = x > 0$ es un semiplano.$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.$1 < |z| < 2$ es una corona circular de radios 1 y 2 respectivamente.

2. $|z-1|=2$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1|<2$ el circulo de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1|=|z+1|$ es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, es decir, la mediatriz de ese segmento.

3. $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|=1=|x|+|y|$ es un cuadrilátero de vértices $(1,0),(0,1),(-1,0)$ y $(0,-1)$. $|z-5|-|z+5|=6$ lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos $(5,0)$ y $(-5,0)$) es constante, es decir, una hipérbola. $|z-3|+|z+3|=8$ es el lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) $(3,0)$ y $(-3,0)$ es constante, es decir, una elipse. $|z-2|=\mathrm{Re}(z)+2$ lugar geométrico de puntos del plano equidistantes de un punto fijo y una recta, es decir, una parábola.

Ejemplo: *Resolver la ecuación* $z^3=1$.

$$1=1_0\Rightarrow(x_\phi)^3=x^3_{3\phi}=1_0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x^3=1\\3\phi=0+2k\pi\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=1\\\phi=\frac{2k\pi}{3};k=0,1,2\end{array}\right.$$

las soluciones son:

$$1_0,1_{\frac{2\pi}{3}},1_{\frac{4\pi}{3}}$$

observemos que

$$1_0=1,1_{\frac{2\pi}{3}}=1e^{\frac{2\pi}{3}i}=e^{\frac{2\pi}{3}i}=w,1_{\frac{4\pi}{3}}=1e^{\frac{4\pi}{3}i}=e^{\frac{4\pi}{3}i}=\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2=w^2$$

verificándose que $1+w+w^2=0$ y que $w^3=1\Rightarrow w^2=\dfrac{1}{w}=\dfrac{\overline{w}}{w\overline{w}}=\overline{w}$.

Veamos un ejemplo donde se hace uso de estas propiedades.

Ejemplo: *Demostrar que para cualquier número natural* n *el polinomio* $(x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1$ *es divisible por* $(x^2+x+1)^2$.

Vamos a demostrar que las raíces de $(x^2+x+1)^2$ dividen a $(x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1$ con lo que estará probado.

$$(x-1)\left(x^2+x+1\right)=x^3-1$$

luego las raíces de x^2+x+1 son las raíces complejas de $z^3=1$, es decir, w y $\overline{w}=w^2=\frac{1}{w}$, y las raíces de $(x^2+x+1)^2$ son w^2 y $w^4=w^3w=w$.

$$(w+1)^{6n+1}-w^{6n+1}-1=\left\{w+1=-w^2\right\}=\left(-w^2\right)^{6n+1}-w^{6n+1}-1$$

y al ser

$$\begin{array}{rcl}\left(-w^2\right)^{6n+1}&=&-w^{12n+2}=-w^{12n}w^2=-\left[w^3\right]^{4n}w^2=-w^2\\w^{6n+1}&=&\left(w^3\right)^{2n}w=w\end{array}$$

de donde

$$(w+1)^{6n+1}-w^{6n+1}-1=-w^2-w-1=0$$

Análogamente procedemos con la otra raíz, w^2.

Ejemplo: *La fórmula de Moivre nos sirve para realizar cálculos trigonométricos, por ejemplo, expresar* $\sin 2a,\cos 3a,\cos 4a,\ldots,\cos^2 a,\cos^3 a,\ldots$

En efecto, aplicando la citada fórmula, podemos escribir:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

y sólo tenemos que desarrollar por la fórmula del binomio el primer término.

Así tendremos, por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{aligned}
(\cos a + i \sin a)^2 &= \cos 2a + i \sin 2a \\
\cos^2 a + 2i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a &= \cos 2a + i \sin 2a \\
\cos^2 a - \sin^2 a + 2i \cos a \sin a &= \cos 2a + i \sin 2a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \\ 2 \cos a \sin a = \sin 2a \end{array} \right\} \\
\cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) &= \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ y } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}
\end{aligned}$$

También podemos obtener el seno de una suma o diferencia a partir de la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos (a + b) + i \sin (a + b)$$

pero, por otra parte:

$$(\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\cos a \sin b + \sin acob)$$

igualando las partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos (a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin (a + b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b
\end{aligned}$$

Las transformaciones de productos de senos y/o cosenos, son muy utililes en el cálculo de primitivas, veamos un procedimiento sencillo basado en la fórmula de Euler.

Ejemplo: *Transformar* $\sin x \sin 2x$ *en sumas de senos y/o cosenos.*

Sea $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos (-x) + i \sin (-x) = \cos x - i \sin x$.

Sumando y restando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\sin 2x &= \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}
\end{aligned}$$

y multiplicando

$$\begin{aligned}
\sin x \sin 2x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} = \frac{1}{-4}\left(e^{3ix}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-3ix}\right) = \\
&= \frac{1}{-4}\left[\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)}{2}-\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos 3x - \cos x\right]
\end{aligned}$$

Ejercicios

Ejemplo: *Hallar* $z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}}$

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}} = z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{25}}$$

Pasamos los número complejos a su forma polar

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ |z_0| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{100}_{100\frac{\pi}{4}} = 2^{50}{}_{25\pi} \\
z_1 &= 1-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{1}{4}\pi \\ |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}} \\
z &= \frac{2^{50}{}_{25\pi}}{\sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}^{75}_{75\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{75}_{\frac{3\pi}{4}} = 2^{37}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{37}\sqrt{2}\,(-1+i)
\end{aligned}$$

Ejemplo: *Calcular* $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ *para* $n = 1, 2, 3, 4$ *y probar que* $f(n+4) = -f(n)\,(n > 0$ *entero*$)$

$$\begin{aligned}
f(n) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{n\pi}{4}i} = \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\
f(2) &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \\
f(3) &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 2\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -2 \\ f(n+4) &= 2\cos\left(\frac{(n+4)\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\pi\right) = -2\cos\frac{n\pi}{4} = f(n) \end{aligned}$$

Ejemplo: *Girar 45º el vector $z = 3+4i$ y extenderlo el doble.*

Girar una figura o un vector 45^o, equivale a multiplicarlo por el número complejo $z = 1_{45^o} = 1_{\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ y para extenderlo el doble basta con multiplicar por 2.

$$(3+4i)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)2 = -\sqrt{2}+7i\sqrt{2}$$

Ejemplo: *Calcular la suma* $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na$

Consideramos

$$\begin{aligned} z &= \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na + i(\sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na) = \\ &= \cos a + i\sin a + \cos 2a + i\sin 2a + \cdots + \cos na + i\sin na = \\ &= e^{ia} + e^{i2a} + \cdots + e^{ina} = \left\{ \begin{array}{c} \text{suma de n términos de} \\ \text{una progresión geométrica} \end{array} \right\} = \frac{e^{ina}e^{ia} - e^{ia}}{e^{ia}-1} = \\ &= e^{ia}\frac{e^{ina}-1}{e^{ia}-1} = e^{ia}\frac{\cos na + i\sin na - 1}{\cos a + i\sin a - 1} = e^{ia}\frac{-1+\cos na + i\sin na}{-1+\cos a + i\sin a} = \\ &= e^{ia}\frac{-\sin^2\frac{na}{2} + i2\sin\frac{na}{2}\cos\frac{na}{2}}{-\sin^2\frac{a}{2} + i2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{na}{2} + i2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} + i2\cos\frac{a}{2}} = \\ &= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-i\sin\frac{na}{2} + i^2 2\cos\frac{na}{2}}{-i\sin\frac{a}{2} + i^2 2\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{na}{2} - 2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} - 2\cos\frac{a}{2}} = \\ &= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{na}{2}-\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{na}{2}+\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\frac{(n+1)a}{2}} = \\ &= \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\left(\cos\frac{n+1}{2}a + i\sin\frac{n+1}{2}a\right) \end{aligned}$$

de donde, igualando la parte real y la imaginaria, tendremos:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}a$$

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots + \sin na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}a$$

Ejercicio: *Demostrar las fórmulas de Moivre:*

$$\begin{aligned} 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} &= 0 \\ \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio: *Hallar las raices de la ecuación* $(1+i)\,z^3 - 2i = 0$
Ejercicio: *Escribir en forma binómica* $e^{\sqrt{i}}$.
Ejercicio: *Resolver la ecuación* $z^4 - 16 = 0$.
Ejercicio: *Resolver la ecuación* $z^4 + 16 = 0$.
Ejercicio: *Resolver la ecución* $(z+1)^3 + i\,(z-1)^3 = 0$.