PARA EMPEZAR

1 Expresa las siguientes operaciones como un número decimal.

a) $2{,}5 \cdot 10^7$

b) $3{,}12 \cdot 10^{-5}$

a) $2{,}5 \cdot 10^7 = 25\,000\,000$

b) $3{,}12 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,031\,2$

2 Simplifica estas fracciones utilizando las propiedades de las potencias.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 3^{-4}}{(-9)^2 \cdot 6^3}$

b) $\dfrac{5^{-2} \cdot 15^3 \cdot 3^2}{(-25)^2 \cdot 30^2}$

a) $\dfrac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 3^{-4}}{(-9)^2 \cdot 6^3} = \dfrac{2^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^{-4}}{3^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \dfrac{2^{10}}{3^{11}}$

b) $\dfrac{5^{-2} \cdot 15^3 \cdot 3^2}{(-25)^2 \cdot 30^2} = \dfrac{5^{-2} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2}{5^4 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \dfrac{3^3}{5^5 \cdot 2^2}$

3 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt[5]{243}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) $\sqrt[3]{3^9}$

a) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

b) $\sqrt[4]{-16}$ no se puede.

c) $\sqrt[4]{3^9} = 3^{\frac{9}{3}} = 3^3 = 27$

4 Se considera que la acidez de la lluvia comienza a ser seriamente perjudicial para el suelo y los seres vivos cuando esta presenta un pH inferior a 5.

¿Qué concentración de iones H^+ se corresponde con esta concentración del pH? Exprésalo en forma de potencia y de número decimal.

$\text{pH} = -\log [H^+] \Rightarrow 5 = -\log [H^+] \Rightarrow 5 = \log \dfrac{1}{[H^+]} \Rightarrow 10^5 = \dfrac{1}{[H^+]} \Rightarrow [H^+] = \dfrac{1}{10^5} = 10^{-5} = 0{,}00001$

PARA PRACTICAR

Notación científica

2.1 Indica el orden de magnitud de las siguientes medidas.

a) Masa del electrón: $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

b) Radio medio del Sol: $9{,}97 \cdot 10^8$ m

c) Tamaño de un virus: 0,000 000 000 235 m

d) Radio medio de la órbita terrestre: $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m

a) -27 b) 8 c) -10 d) 11

2.2 Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 12 345 678

b) Sesenta billones

c) $-354\,125\,000\,000$

d) $0{,}0097 \cdot 10^{23}$

a) $1{,}234\,567\,8 \cdot 10^7$

b) $6 \cdot 10^{13}$

c) $-3{,}541\,25 \cdot 10^{11}$

d) $9{,}7 \cdot 10^{20}$

2.3 Escribe en notación científica estos números:

a) 0,000 000 000 331

b) Cuarenta y tres milésimas

c) $-0{,}000\,000\,001\,23$

d) $967 \cdot 10^{-25}$

a) $3{,}31 \cdot 10^{-10}$

b) $4{,}3 \cdot 10^{-2}$

c) $-1{,}23 \cdot 10^{-9}$

d) $9{,}67 \cdot 10^{-23}$

Ejercicio resuelto

2.4 En la tabla aparecen los prefijos griegos utilizados en los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida.

Expresa en notación científica y en microculombios la siguiente medida de carga eléctrica: 3 picoculombios

Exa	10^{18}
Peta	10^{15}
Tera	10^{12}
Giga	10^{9}
Mega	10^{6}
Miria	10^{4}
Kilo	10^{3}
Hecto	10^{2}
Deca	10^{1}
——	10^{0}
Deci	10^{-1}
Centi	10^{-2}
Mili	10^{-3}
Micro	10^{-6}
Nano	10^{-9}
Pico	10^{-12}
Femto	10^{-15}
Atto	10^{-18}

3 picoculombios =
$= 3 \cdot 10^{-12}$ culombios =
$= 3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{6}$ microculombios =
$= 3 \cdot 10^{-6}$ microculombios

2.5 Expresa en notación científica y en la unidad indicada:

a) 320 miriámetros en centímetros

b) 6000 nanosegundos en milisegundos

c) 175 000 000 megavoltios en kilovoltios

d) 0,01 gigagramos en decigramos

a) $320 \cdot 10^{4}$ metros $= 320 \cdot 10^{4} \cdot 10^{2}$ centímetros $= 3{,}2 \cdot 10^{8}$ centímetros

b) $6000 \cdot 10^{-9}$ segundos $= 6000 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{3}$ milisegundos $= 6 \cdot 10^{-3}$ milisegundos

c) $1{,}75 \cdot 10^{8} \cdot 10^{3}$ kilovoltios $= 1{,}75 \cdot 10^{11}$ kilovoltios

d) $10^{-2} \cdot 10^{9}$ gramos $= 10^{7} \cdot 10$ decigramos$= 10^{8}$ decigramos

2.6 Realiza las siguientes operaciones en notación científica.

a) $0{,}32 \cdot 10^{14} + 7{,}128 \cdot 10^{12}$

b) $3{,}1109 \cdot 10^{45} - 2244 \cdot 10^{40}$

c) $4{,}88 \cdot 10^{-14} + 7{,}921 \cdot 10^{-12}$

d) $36{,}79 \cdot 10^{-25} - 2244 \cdot 10^{-28}$

a) $0{,}32 \cdot 10^{14} + 7{,}128 \cdot 10^{12} = 32 \cdot 10^{12} + 7{,}128 \cdot 10^{12} = 39{,}128 \cdot 10^{12} = 3{,}9128 \cdot 10^{13}$

b) $3{,}1109 \cdot 10^{45} - 2244 \cdot 10^{40} = 3{,}1109 \cdot 10^{45} - 0{,}022\,44 \cdot 10^{45} = 3{,}088\ 46 \cdot 10^{45}$

c) $4{,}88 \cdot 10^{-14} + 7{,}921 \cdot 10^{-12} = 0{,}0488 \cdot 10^{-12} + 7{,}921 \cdot 10^{-12} = 7{,}9698 \cdot 10^{-12}$

d) $36{,}79 \cdot 10^{-25} - 2244 \cdot 10^{-28} = 3{,}679 \cdot 10^{-24} - 0{,}2244 \cdot 10^{-24} = 3{,}4546 \cdot 10^{-24}$

2.7 Realiza las siguientes operaciones en notación científica.

a) $(1{,}65 \cdot 10^{6}) \cdot (0{,}8 \cdot 10^{9})$

b) $(22{,}1 \cdot 10^{54}) \cdot (8{,}4 \cdot 100\,000)$

c) $(2{,}8 \cdot 10^{-26}) \cdot (15 \cdot 10^{43})$

d) $(2{,}3 \cdot 10^{-15}) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-11})$

a) $(1{,}65 \cdot 10^{6}) \cdot (0{,}8 \cdot 10^{9}) = 1{,}65 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{15} = 1{,}32 \cdot 10^{15}$

b) $(22{,}1 \cdot 10^{54}) \cdot (8{,}4 \cdot 100\,000) = 185{,}64 \cdot 10^{59} = 1{,}8564 \cdot 10^{61}$

c) $(2{,}8 \cdot 10^{-26}) \cdot (15 \cdot 10^{43}) = 42 \cdot 10^{17} = 4{,}2 \cdot 10^{18}$

d) $(2{,}3 \cdot 10^{-15}) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-11}) = 10{,}35 \cdot 10^{-26} = 1{,}035 \cdot 10^{-25}$

2.8 Realiza las siguientes operaciones en notación científica.

a) $2{,}3 \cdot 10^{29} + 10^{29} \cdot 512 \cdot 10^{-2}$

b) $(0{,}007\,37 \cdot 10^{19}) : (1{,}1 \cdot 10^{-19})$

c) $2{,}6 \cdot 10^{-5} - (3{,}2 \cdot 10^{-4})^2$

d) $834 \cdot 10^{-4} + 0{,}000\,001\,2 : (3 \cdot 10^{-9})$

a) $2{,}3 \cdot 10^{29} + 10^{29} \cdot 512 \cdot 10^{-2} = 2{,}3 \cdot 10^{29} + 5{,}12 \cdot 10^{29} = 7{,}42 \cdot 10^{29}$

b) $(0{,}007\,37 \cdot 10^{19}) : (1{,}1 \cdot 10^{-19}) = 7{,}37 \cdot 10^{16} : (1{,}1 \cdot 10^{-19}) = 6{,}7 \cdot 10^{35}$

c) $2{,}6 \cdot 10^{-5} - (3{,}2 \cdot 10^{-4})^2 = 2{,}6 \cdot 10^{-5} - 1{,}024 \cdot 10^{-7} = 2{,}589\,76 \cdot 10^{-5}$

d) $834 \cdot 10^{-4} + 0{,}000\,0012 : (3 \cdot 10^{-9}) = 8{,}34 \cdot 10^{-2} + 1{,}2 \cdot 10^{-6} : (3 \cdot 10^{-9}) = 8{,}34 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{2} = 4{,}000\,834 \cdot 10^{2}$

PARA APLICAR

2.9 Un cabello humano tiene un grosor de menos de 0,1 milímetros. ¿Cuánto ocuparían a lo ancho un millón de cabellos colocados en fila, uno al lado del otro? Expresa el resultado primero en milímetros, usando la notación científica, y luego, en la unidad adecuada.

Ocuparían aproximadamente $0{,}1 \cdot 10^{6} = 10^{5}$ milímetros, es decir, unos 100 metros.

2.10 Rosa acaba de cumplir 16 años. ¿Cuántos segundos de vida suponen? Escribe ese número en notación científica.

Cada año dura aproximadamente 365,25 días. Rosa tiene aproximadamente $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ segundos, es decir, $3{,}155\,76 \cdot 10^{7}$ segundos.

2.11 El inventor del ajedrez pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente. En total debía recibir $2^{64} - 1$ granos de trigo.

a) Indica el orden de magnitud de esta cantidad.

b) Si cada kilogramo de granos de trigo tiene unos 6000 granos, calcula el peso de la cantidad anterior.

a) La cantidad total es 18 446 744 073 709 551 615 granos, más de 18 trillones. El orden de magnitud es 19.

b) Dividiendo entre 6000 se obtiene el peso en kilogramos: $3 \cdot 10^{15}$ kg, aproximadamente, o $3 \cdot 10^{12}$ toneladas.

2.12 El número de quinielas sencillas que se pueden rellenar es 3^{15}. Si cada apuesta costara 0,80 euros, ¿cuánto habría que gastar para rellenar todas las columnas posibles?

Habría que gastar $0{,}80 \cdot 3^{15} = 1{,}147\,912\,56 \cdot 10^{7} = 11\,479\,125{,}60$ euros, unos 11,5 millones de euros.

2.13 La masa de la Tierra es de, aproximadamente, $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kilogramos, y la de un bote de refresco, de 330 gramos. ¿Cuántos botes harían falta para igualar el peso de la Tierra?

Harían falta $5{,}98 \cdot 10^{24} : (330 \cdot 10^{-3}) = 1{,}8 \cdot 10^{25}$ botes, aproximadamente.

2.14 Un adulto tiene entre 4,3 y 5,9 millones de hematíes por mililitro de sangre. Si en total tiene unos 5 litros de sangre, ¿cuántos hematíes tendrá?

Tendrá entre $4{,}3 \cdot 10^{6} \cdot 5000$ y $5{,}9 \cdot 10^{6} \cdot 5000$ hematíes, es decir, entre $2{,}15 \cdot 10^{10}$ y $2{,}95 \cdot 10^{10}$ hematíes.

2.15 La calculadora permite expresar números en notación científica. Investiga cuáles son sus límites, es decir, el mayor y el menor número que se puede expresar en notación científica usando la calculadora.

La respuesta depende del número de cifras que admita en pantalla. Si son 10, los valores serán $9{,}999\,999\,999 \cdot 10^{99}$ y $-9{,}999\,999\,999 \cdot 10^{99}$. Los valores más próximos a cero serán $9{,}999\,999\,999 \cdot 10^{-99}$ y $-9{,}999\,999\,999 \cdot 10^{-99}$.

Potencias de exponente fraccionario. Radicales

P A R A P R A C T I C A R

2.16 Escribe las siguientes raíces como potencias de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[5]{2}$ **c)** $\sqrt{2^{28}}$

b) $\sqrt[7]{2^5}$ **d)** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^3}}$

a) $2^{\frac{1}{5}}$ b) $2^{\frac{5}{7}}$ c) $2^{\frac{28}{2}} = 2^{14}$ d) $2^{\frac{-3}{4}}$

2.17 Escribe como potencia y calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt{2^{12}}$ **c)** $\sqrt[3]{10^{12}}$

b) $\sqrt{3^6}$ **d)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{10^{12}}}$

a) $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

b) $\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$

c) $\sqrt[3]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{3}} = 10^4 = 10\,000$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{10^{12}}} = 10^{\frac{-12}{3}} = 10^{-4} = 0{,}0001$

2.18 Calcula las siguientes potencias.

a) $16^{0,5}$ **c)** $8^{0,333...}$

b) $256^{0,25}$ **d)** $1000\,000^{0,1666...}$

a) $16^{0,5} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

b) $256^{0,25} = 256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = 4$

c) $8^{0,333...} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $1000\,000^{0,1666...} = 1000\,000^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1000\,000} = 10$

2.19 Escribe tres radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[5]{7^4}$

a) $\sqrt[4]{5^2}, \sqrt[6]{5^3}, \sqrt[8]{5^4}$ b) $\sqrt[6]{2^2}, \sqrt[9]{2^3}, \sqrt[12]{2^4}$ c) $\sqrt[10]{7^8}, \sqrt[15]{7^{12}}, \sqrt[20]{7^{16}}$

E j e r c i c i o r e s u e l t o

2.20 Ordena de menor a mayor: $\sqrt{7^3}$, $\sqrt[3]{7^5}$, $\sqrt[4]{7^5}$.

Primero se reducen a índice común. En este caso, el mínimo común múltiplo de los índices es 12.

$\sqrt{7^3} = \sqrt[12]{7^{18}}$ $\sqrt[3]{7^5} = \sqrt[12]{7^{20}}$ $\sqrt[4]{7^5} = \sqrt[12]{7^{15}}$

Ordenar las raíces es ahora sencillo, solo hay que ordenar los radicandos. El orden pedido es el siguiente.

$\sqrt[4]{7^5} < \sqrt{7^3} < \sqrt[3]{7^5}$

2.21 Ordena los siguientes radicales de menor a mayor.

a) $\sqrt[8]{2^{13}}, \sqrt[10]{2^{17}}, \sqrt[16]{2^{23}}$ **b)** $\sqrt{28}, \sqrt[3]{100}, \sqrt[4]{3^5}$

a) $\sqrt[8]{2^{13}} = \sqrt[80]{2^{130}}, \sqrt[10]{2^{17}} = \sqrt[80]{2^{136}}, \sqrt[16]{2^{23}} = \sqrt[80]{2^{115}} \Rightarrow \sqrt[16]{2^{23}} < \sqrt[8]{2^{13}} < \sqrt[10]{2^{17}}$

b) $\sqrt{28} = \sqrt[12]{481\,890\,304}, \sqrt[3]{100} = \sqrt[12]{100\,000\,000}, \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[12]{14\,348\,907} \Rightarrow \sqrt[4]{3^5} < \sqrt[3]{100} < \sqrt{28}$

2.22 Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{5}}$ **e)** $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[4]{3^{17}}$

b) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{2^4}$ **f)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}:\sqrt[3]{2000}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$

c) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{5}}=\sqrt{\dfrac{5\cdot 27}{3\cdot 5}}=\sqrt{9}=3$

e) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[4]{3^{17}}=\sqrt[4]{3^{20}}=3^5$

b) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=2$

d) $\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{\dfrac{2}{2^4}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}:\sqrt[3]{2000}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8000}}=\dfrac{1}{20}$

2.23 Calcula las siguientes operaciones.

a) $\left(\sqrt[4]{2^7}\right)^3$ **b)** $\left(\sqrt{3\cdot 2^3}\right)^7$ **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{2^{18}}}$

a) $\left(\sqrt[4]{2^7}\right)^3=\sqrt[4]{2^{21}}=2^5\sqrt[4]{2}$

b) $\left(\sqrt{3\cdot 2^3}\right)^7=\sqrt{3^7\cdot 2^{21}}=3^3\cdot 2^{10}\sqrt{6}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^{18}}}=\sqrt{2^6}=2^3$

Ejercicio resuelto

2.24 En las siguientes fórmulas, despeja la incógnita indicada.

a) $E=mc^2$**, despeja** c**.**

b) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$**, despeja** r**.**

a) $E=mc^2\Rightarrow\dfrac{E}{m}=c^2\Rightarrow c=\sqrt{\dfrac{E}{m}}$

b) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3\Rightarrow r^3=\dfrac{3V}{4\pi}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$

2.25 En las siguientes fórmulas, despeja la incógnita indicada.

a) $v=v_0\cdot t+\dfrac{1}{2}a\cdot t^2$**, despeja** a**.**

b) $(a-x)^2+b^2=c^2$**, despeja** x**.**

a) $v=v_0\cdot t+\dfrac{1}{2}a\cdot t^2\Rightarrow v-v_0\cdot t=\dfrac{1}{2}a\cdot t^2\Rightarrow\dfrac{2(v-v_0\cdot t)}{t^2}=a$

b) $(a-x)^2+b^2=c^2\Rightarrow(a-x)^2=c^2-b^2\Rightarrow a-x=\pm\sqrt{c^2-b^2}\Rightarrow a\pm\sqrt{c^2-b^2}=x$

PARA APLICAR

2.26 Los lados de un corral miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{32}$ metros. ¿Puede ser su área un número natural?

Sí, el área es $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{64}=8$ m².

2.27 La razón de los lados de dos depósitos cúbicos de agua es $\dfrac{3}{4}$, y los volúmenes son 1728 y 4096 metros cúbicos, respectivamente. ¿Son semejantes? En caso afirmativo, calcula la razón de sus volúmenes y compárala con la de sus lados.

El lado del primer depósito mide $\sqrt[3]{1728}=12$ metros. El lado del segundo mide $\sqrt[3]{4096}=16$ metros. La razón es correcta.

La razón de sus volúmenes es $\dfrac{1728}{4096}=\dfrac{27}{64}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$, el cubo de la razón de sus lados.

2.28 El diámetro de un balón, expresado en centímetros, es un número natural. Si tiene un volumen de entre 13 y 17 decímetros cúbicos, ¿cuál es su diámetro?

El diámetro se calcula a partir de la fórmula del volumen. $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \Rightarrow d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Como el volumen está entre 13 000 y 17 000 cm^3, el diámetro está entre 29,17 y 31,9 cm. Hay dos soluciones posibles, 30 o 31 cm.

2.29 Halla una fórmula que permita calcular el volumen de un cubo a partir de su superficie total.

Dada la arista a, el volumen del cubo es $V = a^3$, y su superficie es $S = 6 \cdot a^2$.

La fórmula pedida es $V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3$.

2.30 Un alumno ha calculado los cuadrados de varios números de seis cifras. Ha obtenido los siguientes resultados.

a) 5 751 425 457 b) 816 302 041 c) 15 241 383 936 d) 6 195 264 100 e) 999 998 000 001 f) 1 000 468 054 756

Sin usar la calculadora, ¿podrías indicar los números en los que es seguro que el alumno se equivocó?

Un cuadrado solo puede terminar en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9. Por tanto, se equivocó en a).

Si el número tiene seis cifras, está en el intervalo $[10^5, 10^6)$. El cuadrado estará en $[10^{10}, 10^{12})$, tendrá al menos 11 cifras y menos de 13. Por tanto, los números de los apartados a), b) y d) son demasiado pequeños, y el del f) es demasiado grande.

Se puede comprobar que los números restantes son correctos: $15\,241\,383\,936 = 123\,456^2$ y $999\,998\,000\,001 = 999\,999^2$.

Operaciones con radicales

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

2.31 Calcula las raíces de los siguientes números decimales.

a) $\sqrt{0{,}81}$ **b)** $\sqrt{-0{,}81}$ **c)** $\sqrt[3]{-0{,}125}$

a) $\sqrt{0{,}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

b) El índice es par y el radicando es negativo. No tiene raíces reales.

c) $\sqrt[3]{-0{,}125} = \sqrt[3]{-\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

2.32 Calcula las raíces de los siguientes números.

a) $\sqrt{0{,}0064}$ **b)** $\sqrt{0{,}111\ldots}$ **c)** $\sqrt{0{,}69444\ldots}$

a) $\sqrt{0{,}0064} = \sqrt{\frac{64}{10\,000}} = \frac{8}{100} = 0{,}08$ b) $\sqrt{0{,}111\ldots} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ c) $\sqrt{0{,}69444\ldots} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$

2.33 Extrae fuera de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7}$ **b)** $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{12} \cdot c^7}$

a) $\sqrt{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^7} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$ b) $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{12} \cdot c^7} = a \cdot b^4 \cdot c^2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot c}$

2.34 Extrae fuera de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt[5]{\frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 4^5}{8^3}}$

a) $\sqrt[5]{\frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^4}\sqrt[5]{2 \cdot 3^2}$ b) $\sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 4^5}{8^3}} = \sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 2^{10}}{2^9}} = \sqrt[4]{2^9} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2}$

2.35 Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica.

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{2^7}$

b) $3^5 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 7^2}$

c) $\dfrac{2^3 \cdot 3^4}{5} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5^{11} \cdot 2}{3^{10}}}$

d) $\dfrac{ab^3}{c^{-2}} \sqrt{\dfrac{a^3}{b^3c^3}}$

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 2^7} = \sqrt{2^{13} \cdot 3^{10}}$

b) $3^5 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 7^2} = \sqrt[4]{3^{21} \cdot 7^6}$

c) $\dfrac{2^3 \cdot 3^4}{5} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5^{11} \cdot 2}{3^{10}}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^9 \cdot 3^{12} \cdot 5^{11} \cdot 2}{5^3 \cdot 3^{10}}} = \sqrt[3]{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^8}$

d) $\dfrac{ab^3}{c^{-2}} \sqrt{\dfrac{a^3}{b^3c^3}} = \sqrt{\dfrac{a^2b^6a^3}{c^{-4}b^3c^3}} = \sqrt{a^5b^3c}$

2.36 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{2^3}{3^7}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{3^7 \cdot 2^5}{7}}$

a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{27}} = \sqrt[4]{a^9}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{2^3}{3^7}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{3^7 \cdot 2^5}{7}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^9}{3^{21}}} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{3^{14} \cdot 2^{10}}{7^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^{19}}{3^7 \cdot 7^2}}$

2.37 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^7} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^{11}y^8}}$

c) $\sqrt[4]{3^2 \cdot \sqrt[5]{3^4}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^9 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^8}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^5}{3^5}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^7} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^{11}y^8}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^4y^{14}} \cdot \sqrt[6]{x^3y^3}}{\sqrt[6]{x^{11}y^8}} = \sqrt[6]{\dfrac{y^9}{x^4}}$

c) $\sqrt[4]{3^2 \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{10} \cdot 3^4}} = \sqrt[20]{3^{14}} = \sqrt[10]{3^7}$

2.38 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + \sqrt{200}$

b) $2\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{25} + \sqrt[3]{\dfrac{5}{8}}$

c) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4}$

d) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32}$

e) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}}$

f) $10 \cdot \sqrt[3]{0{,}024} + 5 \cdot \sqrt[3]{0{,}003}$

a) $\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + \sqrt{200} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{25} + \sqrt[3]{\dfrac{5}{8}} = 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{5} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4} = a\sqrt{5} - 4a\sqrt{5} + 2a^2\sqrt{5} = (2a^2 - 3a)\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32} = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}} = 5\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{6}{5}\sqrt{2} = \dfrac{47}{10}\sqrt{2}$

f) $10 \cdot \sqrt[3]{0{,}024} + 5 \cdot \sqrt[3]{0{,}003} = 10 \cdot \dfrac{2}{10}\sqrt[3]{3} + 5 \cdot \dfrac{1}{10}\sqrt[3]{3} = \dfrac{5}{2}\sqrt[3]{3}$

Ejercicio resuelto

2.39 **Racionalizar una fracción es hallar otra equivalente sin raíces en el denominador. Racionaliza $\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$ y $\dfrac{7}{\sqrt[5]{7^2}}$.**

En el primer caso se multiplican el numerador y el denominador por el mismo número, la raíz cuadrada que aparece en el denominador.

$$\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{5\cdot\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{5\cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

En el segundo, para eliminar la raíz de índice 5 necesitamos conseguir un exponente múltiplo de 5.

$$\frac{7}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{7\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}} = \frac{7\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{7\cdot\sqrt[5]{7^3}}{7} = \sqrt[5]{7^3}$$

2.40 **Racionaliza las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{12}{\sqrt[7]{2^5}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{5\sqrt{6}}$ **d)** $\dfrac{40}{\sqrt[4]{2^{17}}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[6]{2^{11}}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[7]{2^5}} = \dfrac{12\sqrt[7]{2^2}}{\sqrt[7]{2^5}\cdot\sqrt[7]{2^2}} = \dfrac{12\sqrt[7]{2^2}}{2} = 6\sqrt[7]{2^2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$

b) $\dfrac{2}{5\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5\cdot 6} = \dfrac{\sqrt{6}}{15}$

d) $\dfrac{40}{\sqrt[4]{2^{17}}} = \dfrac{40\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^{20}}} = \dfrac{40\sqrt[4]{2^3}}{2^5} = \dfrac{5\sqrt[4]{2^3}}{4}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[6]{2^{11}}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^9}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{2^{12}}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^{19}}}{4}$

PARA APLICAR

Problema resuelto

2.41 **El profesor asegura que el número $\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$ es entero. ¿Es posible?**

Observamos que en el radicando se tiene una suma por una diferencia, por lo que al multiplicar se obtiene lo siguiente.

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$$

En efecto, el resultado es un número entero.

2.42 **Comprueba si el número siguiente es un número entero: $\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}$.**

$$\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{4^2-(2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Es un número entero.

2.43 **Víctor trata de obtener con su calculadora un número comprendido entre 1 y 2 partiendo de un número inicial y usando repetidamente la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$. Por ejemplo, si comienza con el 20, tiene que pulsar tres veces dicha tecla.**

20 $\rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow$ 4,472… $\rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow$ 2,114… $\rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow$ 1,454… ¿Cuántas veces tendrá que hacerlo si empieza en el número 300? ¿Y empezando en el 1000? Indica la operación realizada usando una sola raíz.

Para el número 300, necesita 4 pulsaciones. Obtiene $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{300}}}} = \sqrt[16]{300}$.

Para el número 1000, necesita también 4 pulsaciones. Obtiene $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1000}}}} = \sqrt[16]{1000}$.

2.44 Adivina un número *a* sabiendo que:

- **Su raíz cúbica es mayor que 4.**
- **La raíz cúbica de su cuadrado es menor que 17.**
- **El número es un entero múltiplo de 10.**

El número *a* cumple:

$\sqrt[3]{a} > 4 \Rightarrow a > 64$

$\sqrt[3]{a^2} < 17 \Rightarrow a^2 < 17^3 \Rightarrow a < \sqrt{17^3} = 70{,}09\ldots$

El número está en el intervalo (64, 70,09…]. Como debe ser entero y múltiplo de 10, la solución es 70.

Logaritmo de un número

Ejercicio resuelto

2.45 Utiliza la definición y las propiedades de los logaritmos para:

a) Reducir a un solo logaritmo y calcular: log 40 + log 25

b) Calcular log 8 sabiendo que log 2 ≈ 0,301.

a) $\log 40 + \log 25 = \log (40 \cdot 25) = \log 1000 = 3$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 \approx 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$

PARA APLICAR

2.46 Calcula los siguientes logaritmos.

a) log 10 000

b) $\log_3 81$

c) $\log_2 256$

d) $\log_3 243$

a) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$

b) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

c) $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$

d) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$

Ejercicio resuelto

2.47 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0{,}25$

b) log 0,001

c) $\log_4 2$

d) $\log_9 27$

a) $\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

b) $\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

c) $4 = 2^2 \Rightarrow 2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $9 = 3^2 \Rightarrow 3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$; $\quad 27 = 3^3 = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 9^{\frac{3}{2}} \quad \log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

2.48 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0{,}125$

b) $\log_3 0{,}333...$

c) $\log_3 \frac{2}{54}$

d) $\log 0{,}000\,01$

e) $\log_{16} 2$

f) $\log_{64} 2$

g) $\log_{16} 64$

h) $\log_8 4$

i) $\log_4 \sqrt{2}$

a) $\log_2 0{,}125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

b) $\log_3 0{,}333... = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

c) $\log_3 \frac{2}{54} = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$

d) $\log 0{,}00001 = \log 10^{-5} = -5$

e) $\log_{16} 2 = \log_{16} \sqrt[4]{16} = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

f) $\log_{64} 2 = \log_{64} \sqrt[6]{64} = \frac{1}{6}$

g) $\log_{16} 64 = \log_{16} 2^6 = \log_{16} (\sqrt[4]{16})^6 = \log_{16} 16^{\frac{6}{4}} = \frac{3}{2}$

h) $\log_8 4 = \log_8 2^2 = \log_8 (\sqrt[3]{8})^2 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

i) $\log_4 \sqrt{2} = \log_4 \sqrt[4]{4} = \log_4 4^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

Ejercicio resuelto

2.49 Conociendo los valores aproximados de $\log 2 = 0{,}301$ y $\log 3 = 0{,}477$, calcula los siguientes usando las propiedades de los logaritmos.

a) $\log 24$

b) $\log 5$

a) $\log 24 = \log (2^3 \cdot 3) = \log 2^3 + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3 = 3 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}38$

b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

2.50 Calcula los siguientes logaritmos usando los datos del ejercicio resuelto anterior.

a) $\log 36$

b) $\log 64$

c) $\log \frac{2}{3}$

d) $\log \frac{9}{24}$

e) $\log 20$

f) $\log 150$

g) $\log 75$

h) $\log 0{,}2$

i) $\log 0{,}8333...$

a) $\log 36 = \log (2^2 \cdot 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3 = 2 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}556$

b) $\log 64 = \log 2^6 = 6 \log 2 = 6 \cdot 0{,}301 = 1{,}806$

c) $\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = -0{,}176$

d) $\log \frac{9}{24} = \log \frac{3}{8} = \log 3 - 3 \log 2 = -0{,}426$

e) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0{,}301 + 1 = 1{,}301$

f) $\log 150 = \log \frac{3 \cdot 100}{2} = \log 3 + \log 100 - \log 2 = 2{,}176$

g) $\log 75 = \log \frac{3 \cdot 100}{4} = \log 3 + \log 100 - 2 \log 2 = 1{,}875$

h) $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}301 - 1 = -0{,}699$

i) $\log 0{,}8333... = \log \frac{5}{6} = \log \frac{10}{12} = \log 10 - \log 12 = 1 - (2 \log 2 + \log 3) = -0{,}079$

2.51 Emplea la fórmula del cambio de base y los datos del ejercicio 49 para calcular los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 2$ **c) $\log_3 32$** **e) $\log_2 30$**

b) $\log_2 9$ **d) $\log_2 10$** **f) $\log_8 2$**

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0{,}301}{0{,}477} = 0{,}631$

b) $\log_2 9 = \dfrac{\log 9}{\log 2} = \dfrac{\log 3^2}{\log 2} = \dfrac{2 \log 3}{\log 2} = \dfrac{2 \cdot 0{,}477}{0{,}301} = 3{,}169$

c) $\log_3 32 = \dfrac{\log 32}{\log 3} = \dfrac{5 \log 2}{\log 3} = 3{,}155$

d) $\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} = \dfrac{1}{0{,}301} = 3{,}322$

e) $\log_2 30 = \dfrac{\log 30}{\log 2} = \dfrac{\log 3 + \log 10}{\log 2} = 4{,}907$

f) $\log_8 2 = \dfrac{\log 2}{\log 8} = \dfrac{\log 2}{\log 2^3} = \dfrac{\log 2}{3 \log 2} = \dfrac{1}{3}$

2.52 Calcula las siguientes operaciones.

a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$ **c) $\log_7 (\log_3 (\log_2 8))$**

b) $-\log_3 5 \cdot \log_5 9$ **d) $\log_4 \big(\log_2 (\log_3 (10 - \log 10))\big)$**

a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3 = \dfrac{\log 7}{\log 3} \cdot \dfrac{\log 3}{\log 7} = 1$

b) $-\log_3 5 \cdot \log_5 9 = \dfrac{\log 5}{\log 3} \dfrac{\log 9}{\log 5} = -\dfrac{\log 3^2}{\log 3} = -\dfrac{2 \log 3}{\log 3} = -2$

c) $\log_7 (\log_3 (\log_2 8)) = \log_7 (\log_3 (\log_2 2^3)) = \log_7 (\log_3 3) = \log_7 1 = 0$

d) $\log_4 \big(\log_2 (\log_3 (10 - \log 10))\big) = \log_4 (\log_2 (\log_3 9)) = \log_4 (\log_2 2) = \log_4 1 = 0$

Ejercicio resuelto

2.53 Sabiendo los valores de $\log a = 0{,}5$ y $\log b = 0{,}3$, calcula $\log \sqrt[3]{\dfrac{a^2 \cdot b}{10}}$.

Usando las propiedades de los logaritmos,

$$\log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}} = \frac{1}{3} \log \frac{a^2 \cdot b}{10} = \frac{1}{3} (\log (a^2 \cdot b) - \log 10) =$$

$$= \frac{1}{3} (\log a^2 + \log b - 1) = \frac{1}{3} (2 \log a + \log b - 1)$$

Se sustituyen los valores dados.

$$\log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}} = \frac{1}{3} (2 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = 0{,}1$$

2.54 Con los datos del ejercicio 53, calcula el logaritmo: $\log \dfrac{\sqrt{a}}{100b^3}$.

$$\log \frac{\sqrt{a}}{100b^3} = \log \sqrt{a} - \log 100b^3 = \log a^{\frac{1}{2}} - (\log 100 + \log b^3) = \frac{1}{2} \log a - 2 - 3 \log b = \frac{1}{2} 0{,}5 - 2 - 3 \cdot 0{,}3 = -2{,}65$$

PARA APLICAR

2.55 Antes de la invención de las calculadoras se usaban tablas de logaritmos para operar con números grandes. En la tabla figuran algunas potencias de 2.

Exponente	0	1	2	3	4
Valor	1	2	4	8	16
Exponente	5	6	7	8	9
Valor	32	64	128	256	512
Exponente	10	11	12	13	14
Valor	1024	2048	4096	8192	16 384

Como el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores, para calcular 32 · 64 buscaban sus logaritmos (5 y 6), los sumaban (11) y buscaban en la tabla el número correspondiente (2048). Calcula, usando esa tabla, 16 · 128 y 16 384 : 256.

Al 16 y al 128 les corresponden los exponentes 4 y 7. Para hallar el producto, se suman los exponentes (11) y se busca el valor correspondiente, 2048.

Al 16 384 y al 256 les corresponden los exponentes 14 y 8. Para hallar el cociente, se restan los exponentes (6) y se busca el valor correspondiente, 64.

2.56 Si log 2 = 0,301, ¿cuánto valdrá log 20? ¿Y log 200? ¿Y log 2000? ¿Qué número tendrá por logaritmo 8,301?

Como $20 = 2 \cdot 10$, $\log 20 = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1 = 1{,}301$. De la misma forma, $\log 200 = 2{,}301$, $\log 2000 = 3{,}301$, y así sucesivamente. El número 8,301 se descompone como la suma de 8 ($\log 10^8$) y 0,301 ($\log 2$). Por tanto, 8,301 es el logaritmo de $2 \cdot 10^8$.

2.57 Halla el valor de *x* en la siguiente expresión, aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\log (x + 1)^2 = 6$$

$\log (x + 1)^2 = 6 \Rightarrow 2 \log (x + 1) = 6 \Rightarrow \log (x + 1) = 3 \Rightarrow x + 1 = 10^3 = 1000 \Rightarrow x = 1000 - 1 = 999$

2.58 ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número y el de su inverso?

$\log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a$. Son opuestos.

2.59 Escribe como un único logaritmo la siguiente expresión: $3 \log a + \frac{1}{2} \log b + 1 - 5 \log c$.

$$3 \log a + \frac{1}{2} \log b + 1 - 5 \log c = \log a^3 + \log b^{\frac{1}{2}} + \log 10 - \log c^5 = \log \frac{a^3 \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot 10}{c^5} = \log \frac{a^3 \cdot \sqrt{b} \cdot 10}{c^5}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

2.60 Calcula la intensidad de los siguientes sonidos.

a) Música a mucha potencia: 6,4 Pa

b) Martillo neumático: 1,1 Pa

a) $N_p = 20 \cdot \log \frac{6{,}4}{2 \cdot 10^{-5}} = 110{,}10$ db

b) $N_p = 20 \cdot \log \frac{1{,}1}{2 \cdot 10^{-5}} = 94{,}81$ db$= 94{,}81$db

2.61 Busca información sobre la escala de Ritcher. ¿Qué magnitud mide? ¿Mediante qué fórmula? ¿Se trata de una escala logarítmica?

La escala de Richter mide la energía desprendida en un terremoto.

La fórmula que emplea es $M = \log A + 3 \log (8 \cdot \Delta t) - 2{,}92$, siendo A la amplitud (en mm) de las ondas tipo S y Δt el tiempo, en segundos, transcurrido entre la aparición de ondas tipo P y tipo S. Es por tanto una escala logarítmica.

PARA PRACTICAR Y APLICAR

2.62 Escribe en notación científica estas cantidades.

a) 0,000 000 007 71 **b) 0,000 041** **c) 992 600 000 000** **d) 4 840 000 000**

a) $0{,}000\,000\,007\,71 = 7{,}71 \cdot 10^{-9}$

b) $0{,}000\,041 = 4{,}1 \cdot 10^{-5}$

c) $992\,600\,000\,000 = 9{,}926 \cdot 10^{11}$

d) $4\,840\,000\,000 = 4{,}84 \cdot 10^{9}$

2.63 Escribe correctamente en notación científica:

a) $887 \cdot 10^5$ **b) $5785{,}46 \cdot 10^{-8}$** **c) $0{,}005\,2 \cdot 10^{12}$** **d) $0{,}004 \cdot 10^{-24}$**

a) $887 \cdot 10^5 = 8{,}87 \cdot 10^7$ b) $5785{,}46 \cdot 10^{-8} = 5{,}785\,46 \cdot 10^{-5}$ c) $0{,}0052 \cdot 10^{12} = 5{,}2 \cdot 10^9$ d) $0{,}004 \cdot 10^{-24} = 4 \cdot 10^{-27}$

2.64 En una muestra hay $5{,}23 \cdot 10^6$ bacterias, cada una de las cuales pesa $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ gramos. ¿Cuál es el peso total?

$5{,}23 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-10} = 1{,}3075 \cdot 10^{-3}$ gramos.

2.65 Escribe tres raíces equivalentes a cada uno de los siguientes números.

a) $\sqrt[7]{3^4}$ **b) 5** **c) $8^{\frac{2}{3}}$**

a) $\sqrt[7]{3^4} = \sqrt[14]{3^8} = \sqrt[21]{3^{12}} = \sqrt[28]{3^{16}}$ b) $5 = \sqrt{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[4]{5^4}$ c) $8^{\frac{2}{3}} = 4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{2^4} = \sqrt[3]{2^6}$

2.66 Ordena de menor a mayor $\sqrt[5]{2^7}$, 3, $\sqrt[6]{32}$.

$\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[30]{2^{42}} \approx \sqrt[30]{4{,}4 \cdot 10^{12}}$; $3 = \sqrt[30]{3^{30}} \approx \sqrt[30]{2 \cdot 10^{14}}$, $\sqrt[6]{32} = \sqrt[30]{2^{25}} \approx \sqrt[30]{3{,}3 \cdot 10^7}$

El orden es $\sqrt[6]{32} < \sqrt[5]{2^7} < 3$.

2.67 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt{576}$ **b) $\sqrt{0{,}0081}$** **c) $\sqrt{1{,}777\ldots}$**

a) $\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = 2^3 \cdot 3 = 24$ b) $\sqrt{0{,}0081} = \sqrt{\frac{81}{10\,000}} = \frac{9}{100} = 0{,}09$ c) $\sqrt{1{,}777\ldots} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

2.68 Extrae de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt[5]{\frac{x^{12}y^{54}}{z^{100}}}$ **b) $\frac{2^3}{3^4}\sqrt[6]{\frac{3^{20} \cdot 2^{10}}{5^6}}$** **c) $\sqrt[3]{\frac{4^5 \cdot 6^4 \cdot 3}{18^2}}$**

a) $\sqrt[5]{\frac{x^{12}y^{54}}{z^{100}}} = \frac{x^2y^{10}}{z^{20}}\sqrt[5]{x^2y^4}$

b) $\frac{2^3}{3^4}\sqrt[6]{\frac{3^{20} \cdot 2^{10}}{5^6}} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2}{3^4 \cdot 5}\sqrt[6]{3^2 \cdot 2^4} = \frac{2^4}{3 \cdot 5}\sqrt[6]{3^2 \cdot 2^4} = \frac{2^4}{3 \cdot 5}\sqrt[3]{3 \cdot 2^2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{4^5 \cdot 6^4 \cdot 3}{18^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^4}} = \sqrt[3]{2^{12} \cdot 3} = 2^4 \cdot \sqrt[3]{3}$

2.69 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\sqrt[8]{2^5 \cdot 3^6} \cdot \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^5}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^3}}}$

a) $\sqrt[8]{2^5 \cdot 3^6} \cdot \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^5} = \sqrt[24]{2^{15} \cdot 3^{18} \cdot 2^{36} \cdot 3^{20}} = \sqrt[24]{2^{51} \cdot 3^{38}}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^9 a^6}{a^8}} = \sqrt[12]{a^7}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^3}}} = \sqrt[3\cdot 2\cdot 4]{2^3} = \sqrt[8]{2}$

2.70 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + 3\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{2^5} - 9 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{8}{54}}$

b) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 10\sqrt{18}$ **d)** $\sqrt{0{,}222\ldots} \cdot 36 - 20 \cdot \sqrt{0{,}125}$

a) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 10\sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -17\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{2^5} - 9 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{8}{54}} = 2\sqrt[3]{4} - 9\sqrt[3]{\dfrac{4}{27}} = 2\sqrt[3]{4} - \dfrac{9}{3}\sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$

d) $\sqrt{0{,}222\ldots} \cdot 36 - 20 \cdot \sqrt{0{,}125} = \sqrt{\dfrac{2}{9}} \cdot 36 - 20 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2} \cdot 36 - \dfrac{20}{4}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

2.71 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 100\,000$ **b)** $\log_5 625$ **c)** $\log_7 343$

a) $\log 100\,000 = \log 10^5 = 5$ b) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$ c) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$

2.72 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0{,}125$ **c)** $\log_{81} 3$ **e)** $\log_{1000} 10$

b) $\log_4 \dfrac{3}{48}$ **d)** $\log_{25} 5$ **f)** $\log_{1000} 100$

a) $\log_2 0{,}125 = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

b) $\log_4 \dfrac{3}{48} = \log_4 \dfrac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$

c) $\log_{81} 3 = \log_{81} \sqrt[4]{81} = \dfrac{1}{4}$

d) $\log_{25} 5 = \log_{25} \sqrt{25} = \dfrac{1}{2}$

e) $\log_{1000} 10 = \log_{1000} \sqrt[3]{1000} = \dfrac{1}{3}$

f) $\log_{1000} 100 = \log_{1000} 10^2 = \log_{1000} \left(\sqrt[3]{1000}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$

2.73 Expresa estos logaritmos como sumas y diferencias.

a) $\log (2^5 \cdot 3^7)^4$ **b)** $\log \dfrac{2^5 \cdot 3^4}{7^6}$ **c)** $\log \sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{b}}$

a) $\log (2^5 \cdot 3^7)^4 = \log (2^{20} \cdot 3^{28}) = \log 2^{20} + \log 3^{28} = 20 \log 2 + 28 \log 3$

b) $\log \dfrac{2^5 \cdot 3^4}{7^6} = \log (2^5 \cdot 3^4) - \log 7^6 = 5 \log 2 + 4 \log 3 - 6 \log 7$

c) $\log \sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{b}} = \log \dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{4} \log a - \dfrac{1}{2} \log b$

2.74 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log_2 (\log 10\,000)$ **b) $\log_3 (\log_2 (10 + \log 0{,}01))$**

a) $\log_2 (\log 10\,000) = \log_2 4 = 2$

b) $\log_3 (\log_2 (10 + \log 0{,}01)) = \log_3 (\log_2 (10 - 2)) = \log_3 (\log_2 8) = \log_3 3 = 1$

2.75 **Expresa en metros las siguientes medidas usando la notación científica.**

a) 3 millones de kilómetros **c) $26 \cdot 10^{-12}$ hectómetros**
b) Una millonésima de milímetro **d) 3 trillones de nanómetros**

a) 3 millones de kilómetros $= 3 \cdot 10^6$ kilómetros $= 3 \cdot 10^9$ metros
b) Una millonésima de milímetro $= 10^{-6}$ milímetros $= 10^{-9}$ metros
c) $26 \cdot 10^{-12}$ hectómetros $= 26 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2$ metros $= 2{,}6 \cdot 10^{-9}$ metros
d) 3 trillones de nanómetros $= 3 \cdot 10^{18}$ nanómetros $= 3 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-9}$ metros $= 3 \cdot 10^9$ metros

2.76 **El factorial de un número se define:**

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Con la ayuda de la calculadora, investiga el orden de magnitud de los siguientes números factoriales.

a) 15! **b) 25!** **c) 40!**

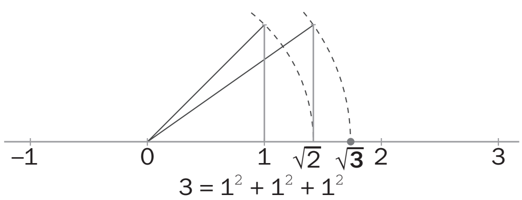
a) $15! = 1{,}3 \cdot 10^{12}$; orden 12 b) $25! = 1{,}55 \cdot 10^{25}$; orden 25 c) $40! = 8{,}159 \cdot 10^{47}$; orden 47

2.77 **En la siguiente fórmula, despeja cada una de las variables que aparecen.**

$$x^3 - \frac{1}{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = 1$$

$$x^3 - \frac{1}{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = \dfrac{1}{y^2} - \sqrt[3]{z^2} + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{y^2} - \sqrt[3]{z^2} + 1} \\ x^3 - 1 + \sqrt[3]{z^2} = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{x^3 - 1 + \sqrt[3]{z^2}}} \\ \sqrt[3]{z^2} = 1 - x^3 + \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow z = \sqrt{\left(1 - x^3 + \dfrac{1}{y^2}\right)^3} \end{cases}$$

2.78 **Cualquier número natural se puede expresar como suma de un máximo de cuatro cuadrados perfectos. Esto nos permite representar la raíz cuadrada de cualquier número usando el teorema de Pitágoras.**



Descompón en suma de cuadrados los siguientes números e indica cómo se representarían sus raíces cuadradas.

a) 41 **b) 27** **c) 31**

a) $41 = 5^2 + 4^2$. Para representar la raíz se construye el triángulo rectángulo de catetos 5 y 4. La hipotenusa mide $\sqrt{41}$.

b) $27 = 5^2 + 1^2 + 1^2$. Se representa primero $\sqrt{2}$, usando dos catetos de longitud 1, y después se usan como catetos $\sqrt{2}$ y 5.

c) $31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$. Como en el ejemplo anterior, se representa primero $\sqrt{2}$, después $\sqrt{6}$ y por último $\sqrt{31}$.

2.79 ¿Cuántas cifras puede tener la raíz cuadrada de un número de seis cifras? ¿Y la raíz cúbica?

Como $10^5 \le x < 10^6$, la raíz cuadrada cumple que $316{,}2 \approx \sqrt{10^5} \le x < \sqrt{10^6} = 10^3$, y la raíz cúbica cumple que $46{,}4 \approx \sqrt[3]{10^5} \le x < \sqrt[3]{10^6} = 100$. Por tanto, la raíz cuadrada tiene tres cifras, y la raíz cúbica tiene dos.

2.80 Considera las fórmulas del área y del volumen de una esfera de radio *r* y, a partir de ellas:

a) Halla una fórmula que permita obtener la superficie de una esfera conociendo su volumen.

b) Halla la fórmula que da la longitud de la circunferencia máxima en función del volumen.

Las fórmulas a utilizar son $L = 2\pi r$, $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = (4\pi r^2)\frac{1}{3}r = S \cdot \frac{1}{3}r \Rightarrow S = \frac{3V}{r}$

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = (2\pi r)\frac{2}{3}r^2 = L \cdot \frac{2}{3}r^2 \Rightarrow L = \frac{3V}{2r^2}$

2.81 Una hoja de papel tiene 0,01 milímetros de grosor. Se dobla ese papel por la mitad, se vuelve a doblar, y así sucesivamente.

Utilizando logaritmos, ¿podrías indicar cuántos dobleces harían falta para obtener un grosor de 100 metros?

Como 100 metros son 100 000 milímetros, se trata de hallar el primer valor natural para el que $0{,}01 \cdot 2^x \ge 100\,000$, donde x indica el número de dobleces.

$0{,}01 \cdot 2^x \ge 100\,000 \Rightarrow 2^x \ge 10^7 \Rightarrow \log 2^x \ge \log 10^7 \Rightarrow x \ge \frac{7}{\log 2} = 23{,}25$.

Hay que realizar un mínimo de 24 dobleces.

PARA REFORZAR

2.82 Escribe los siguientes números empleando notación científica.

a) 0,000 000 000 235 **b) 5 480 000 000 000**

a) $0{,}000\,000\,000\,235 = 2{,}35 \cdot 10^{-10}$

b) $5\,480\,000\,000\,000 = 5{,}48 \cdot 10^{12}$

2.83 Sin hacer las operaciones, indica el orden de magnitud del resultado.

a) $(3{,}5 \cdot 10^{15}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^7)$

b) $(2{,}24 \cdot 10^{-15}) \cdot (3 \cdot 10^{-20})$

c) $(2 \cdot 10^{23}) \cdot (1{,}55 \cdot 10^{-30})$

d) $(2{,}67 \cdot 10^{43}) : (1{,}4 \cdot 10^{33})$

e) $(5{,}78 \cdot 10^{-21}) : (2{,}22 \cdot 10^{-25})$

f) $(9{,}93 \cdot 10^7) : (3{,}12 \cdot 10^{-7})$

a) Orden 22 b) Orden −35 c) Orden −7 d) Orden 10 e) Orden 4 f) Orden14

2.84 Despeja *x* en cada ecuación.

a) $a = x^2$

b) $125 = x^3$

c) $4^2 = x^3$

d) $x^{-3} = 2^4$

a) $a = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

b) $125 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5$

c) $4^2 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4^2}$

d) $x^{-3} = 2^4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2^4}}$

2.85 Expresa en forma de potencia de exponente fraccionario y en forma de raíz y calcula:

a) $32^{0,2}$ **b) $1000^{0,666...}$** **c) $625^{\frac{25}{100}}$**

a) $32^{0,2} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

b) $1000^{0,666...} = 1000^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1000^2} = 100$

c) $625^{\frac{25}{100}} = 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$

2.86 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los siguientes radicales.

$\sqrt[12]{2^7}$ $\sqrt[15]{2^9}$ $\sqrt[18]{2^{13}}$

$\sqrt[12]{2^7} = \sqrt[180]{2^{105}} < \sqrt[15]{2^9} = \sqrt[180]{2^{108}} < \sqrt[18]{2^{13}} = \sqrt[180]{2^{130}}$

2.87 Calcula las siguientes operaciones.

a) $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \sqrt{75} - 4\sqrt{45}$

a) $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 - 7 + 4)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \sqrt{75} - 4\sqrt{45} = \frac{1}{2}2\sqrt{5} - 5\sqrt{3} - 4 \cdot 3\sqrt{5} = -11\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$

2.88 Expresa como un único radical:

a) $5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}}$

a) $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6}$

b) $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 14\sqrt{6} = \sqrt{14^2 \cdot 6}$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{30}$

d) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7}$

f) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3 \cdot 5}{4^2}}$

2.89 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_4 256$

b) $\log_2 1024$

c) $\log 10\,000\,000$

d) $\log_{37} 1$

a) $\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$

b) $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

c) $\log 10\,000\,000 = \log 10^7 = 7$

d) $\log_{37} 1 = 0$

2.90 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 0{,}1$

b) $\log_5 0{,}04$

c) $\log_2 \dfrac{3}{192}$

d) $\log_2 (0{,}5^7)$

a) $\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

b) $\log_5 0{,}04 = \log_5 \dfrac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

c) $\log_2 \dfrac{3}{192} = \log_2 \dfrac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_2 (0{,}5^7) = \log_2 2^{-7} = -7$

2.91 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_{1\,000\,000} 100$

b) $\log_{36} 6$

c) $\log_4 8$

d) $\log_8 4$

a) $\log_{1\,000\,000} 100 = \log_{1\,000\,000} \sqrt[3]{1\,000\,000} = \frac{1}{3}$

b) $\log_{36} 6 = \log_{36} \sqrt{36} = \frac{1}{2}$

c) $\log_4 8 = \log_4 2^3 = \log_4 (\sqrt{4})^3 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

d) $\log_8 4 = \log_8 (\sqrt[3]{8})^2 = \frac{2}{3}$

PARA AMPLIAR

2.92 Estudia el método empleado para racionalizar fracciones de la forma $\frac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

a) Comprueba que la fracción $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ se puede racionalizar multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

b) Comprueba que la fracción $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ se puede racionalizar multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

a) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2.93 Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

d) $\frac{5}{8 - 2\sqrt{2}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{4}}{3 - 2} = \sqrt{6} + 2$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{5}$

d) $\frac{5}{8 - 2\sqrt{2}} = \frac{5(8 + 2\sqrt{2})}{(8 - 2\sqrt{2})(8 + 2\sqrt{2})} = \frac{5(8 + 2\sqrt{2})}{56}$

2.94 **Un mago te pide que elijas un número de dos cifras y lo eleves al cubo. Cuando le dices el resultado, lo escribe en la pizarra e inmediatamente escribe el número original. ¿Cómo lo hace? Copia y completa la tabla, a ver si lo descubres.**

Una pista: si el cubo es 103 823, el mago se fija en la última cifra: 3, e inmediatamente indica la raíz cúbica, 47.

Halla por este método las siguientes raíces cúbicas.

a) $\sqrt[3]{13\,824}$ **b)** $\sqrt[3]{195\,112}$ **c)** $\sqrt[3]{531\,441}$

a) 24 b) 58 c) 81

El mago averigua la raíz cúbica en dos pasos.

En el primer paso, el mago busca en la cuarta columna de la tabla la última cifra del cubo, 3, la columna vecina le proporciona la cifra de las unidades de la raíz cúbica: 7.

En el segundo paso, el mago localiza en la tabla el intervalo al que pertenece el cubo, en el caso de 103 823 está en [64 000, 125 000), así la columna vecina le da la cifra de las decenas de la raíz cúbica: 4.

De este modo, ya tenemos la raíz cúbica: 47.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

2.95 **Crecimiento de poblaciones**

Ana y Juan están estudiando el crecimiento de la población de un cultivo de microorganismos y deben elegir, entre los siguientes modelos matemáticos:

- **El modelo *A* utiliza como dato el aumento de la población en una semana, que es del 84 %.**
- **El modelo *B* utiliza el crecimiento de la población en un día.**
- **El modelo *C* considera el crecimiento en una hora.**

Se denomina P_0 la población inicial, y t, el tiempo en semanas, días u horas, según corresponda.

a) Comprueba, dando valores, que la siguiente es la fórmula del modelo *A*: $P = P_0 \cdot 1{,}84^t$.

b) Escribe las fórmulas de los modelos *B* y *C*.

c) Compara los resultados proporcionados por cada modelo para el caso $P_0 = 1000$ y $t = 2$ semanas.

a) En una semana: $P = P_0 \cdot 1{,}84$
En dos semanas: $P = P_0 \cdot 1{,}84^2 = P_0 \cdot 3{,}3856$

b) El modelo *B*: $P = P_0 \cdot 1{,}09^{7t}$
El modelo *C*: $P = P_0 \cdot 1{,}0036^{168t}$

c) Los resultados son iguales:
Modelo *A*: $P = P_0 \cdot 1{,}84^t = 1000 \cdot 1{,}84^2 = 3386{,}6$
Modelo *B*: $P = P_0 \cdot 1{,}09^{7t} = P_0 \cdot 1{,}09^{7 \cdot 2} = P_0 \cdot (1{,}09^7)^2 = P_0 \cdot 1{,}84^2 = 1000 \cdot 1{,}84^2 = 3386{,}6$
Modelo *C*: $P = P_0 \cdot 1{,}0036^{168 \cdot t} = P_0 \cdot 1{,}0036^{168 \cdot 2} = P_0 \cdot (1{,}0036^{168})^2 = P_0 \cdot 1{,}84^2 = 1000 \cdot 1{,}84^2 = 3386{,}6$

2.96 Ácidos y bases

El pH de una disolución se define como el opuesto del logaritmo decimal de la concentración de iones hidrógeno expresada en moles/litro: pH = $-\log [H^+]$.

Por ejemplo, si la concentración de iones hidrógeno de una disolución es $[H^+] = 4 \cdot 10^{-8}$ mol/L:

$$pH = -\log (4 \cdot 10^{-8}) = -\log 4 - \log 10^{-8} = -\log 4 + 8 = 7{,}4.$$

Si el pH es 7, la disolución se considera neutra; si es inferior a 7, ácida, y si es superior, básica.

Copia y completa la tabla de la ilustración y ordena las disoluciones de menor a mayor acidez.

Disolución	$[H^+]$	pH
Lejía común	**$1{,}26 \cdot 10^{-13}$**	12,9
Amoníaco	$7{,}94 \cdot 10^{-12}$	**11,1**
Agua de mar	10^{-8}	**8**
Agua	**10^{-7}**	7
Leche	**$3{,}16 \cdot 10^{-7}$**	6,5
Vinagre	$1{,}26 \cdot 10^{-3}$	**2,9**
Zumo de limón	**$4 \cdot 10^{-3}$**	2,4
Ácido clorhídrico	**1**	0

AUTOEVALUACIÓN

2.A1 Escribe usando notación científica las siguientes expresiones.

a) 24,3 billones

b) 47 diezmilésimas

c) $3\,220\,000 \cdot 10^7$

d) $45{,}2 \cdot 10^{-27}$

a) $2{,}43 \cdot 10^{13}$

b) $4{,}7 \cdot 10^{-3}$

c) $3{,}22 \cdot 10^{13}$

d) $4{,}52 \cdot 10^{-26}$

2.A2 Calcula las siguientes operaciones usando notación científica.

a) $25\,000\,000 \cdot 48\,000\,000$

b) $0{,}000\,000\,12 \cdot 0{,}000\,007$

c) $42\,000\,000 \cdot 0{,}000\,09$

d) $3\,600\,000 : 0{,}000\,004$

a) $1{,}2 \cdot 10^{15}$

b) $8{,}4 \cdot 10^{-13}$

c) $3{,}78 \cdot 10^{3}$

d) $9 \cdot 10^{11}$

2.A3 Realiza las siguientes operaciones y escribe el resultado como una única raíz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$

b) $3^{0,333\ldots} \cdot 3^{\frac{2}{5}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

d) $3^{\frac{1}{5}} : \sqrt[4]{3^3}$

e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}$

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{2^{13}}$

b) $3^{0,333\ldots} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = 3^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{3^{11}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 7^2}$

d) $3^{\frac{1}{5}} : \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[20]{3^4} : \sqrt[20]{3^{15}} = \sqrt[20]{3^{-11}} = \dfrac{1}{\sqrt[20]{3^{11}}}$

e) $\sqrt[8]{3}$

f) $\sqrt[6]{2^5}$

2.A4 Ordena de menor a mayor los siguientes números.

$5^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[6]{5^5}$, $\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} < 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[12]{5^9} < \sqrt[6]{5^5} = \sqrt[12]{5^{10}}$

2.A5 Realiza las siguientes operaciones cuando sea posible.

a) $\sqrt[4]{4096}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{12}{324}}$

c) $\sqrt{-250\,000}$

d) $\sqrt[3]{-125\,000}$

a) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{12}{324}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

c) No es posible, el radicando es negativo y el índice, par.

d) $\sqrt[3]{-125\,000} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 5^6} = -2 \cdot 5^2 = -50$

2.A6 Realiza las operaciones indicadas.

a) $2\sqrt{32} + 5\sqrt{98} + 8\sqrt{200}$

b) $\sqrt[3]{27a^4} - 5a \cdot \sqrt[3]{8a} + \dfrac{1}{a}\sqrt[3]{1000a^7}$

a) $2\sqrt{32} + 5\sqrt{98} + 8\sqrt{200} = 2\sqrt{2^5} + 5\sqrt{2 \cdot 7^2} + 8\sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 2^2\sqrt{2} + 5 \cdot 7\sqrt{2} + 8 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{2} = 123\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27a^4} - 5a \cdot \sqrt[3]{8a} + \dfrac{1}{a}\sqrt[3]{1000a^7} = 3a\sqrt[3]{a} - 10a\sqrt[3]{a} + \dfrac{1}{a}10a^2\sqrt[3]{a} = 3a\sqrt[3]{a}$

2.A7 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 512$

b) $\log 100\,000\,000$

c) $\log_2 \dfrac{1}{8}$

d) $\log_{36} 6$

a) $\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9$

b) $\log 100\,000\,000 = \log 10^8 = 8$

c) $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 \dfrac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

d) $\log_{36} 6 = \log_{36} \sqrt{36} = \dfrac{1}{2}$

2.A8 Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$, calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 16$

b) $\log 40$

c) $\log \dfrac{5}{4}$

a) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 1{,}204$

b) $\log 40 = \log (4 \cdot 10) = \log 4 + \log 10 = 2 \log 2 + 1 = 1{,}602$

c) $\log \dfrac{5}{4} = \log 5 - \log 4 = \log \dfrac{10}{2} - \log 2^2 = \log 10 - \log 2 - 2 \log 2 = 1 - 3 \log 2 = 0{,}097$

2.A9 Un cubo tiene un volumen de 2 metros cúbicos. Calcula su superficie, expresando el resultado mediante radicales.

$V = a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2} \Rightarrow S = 6a^2 = 6\sqrt[3]{2^2}\ \text{m}^2$

2.A10 Una especie duplica su población cada año. Si la población inicial era de 100 individuos, ¿cuántos años pasarán hasta que se supere el millón?

Llamando t al número de años, hay que resolver:

$100 \cdot 2^t > 1\,000\,000 \Rightarrow 2^t > 10\,000 \Rightarrow \log 2^t > \log 10\,000 = 4 \Rightarrow t > \dfrac{4}{\log 2} \approx 13{,}28$. Pasarán 14 años.

La matrícula del taxi

Cuando Ramanujan enfermó, Hardy iba a verle al hospital. Un día, le comentó que había llegado en un taxi de matrícula 1729, un número que Hardy calificó de soso.

Ramanujan le contestó inmediatamente:

—Es un número muy interesante. Es el número más pequeño que se puede expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes.

Comprueba que Ramanujan tenía razón.

Cada número natural parecía ser amigo personal de Ramanujan. Además, debía saberse de memoria los cubos de unos cuantos números. Efectivamente:

$$1729 = 10^3 + 9^3 \qquad 1729 = 12^3 + 1^3$$

Otros números que cumplen esto:

(9, 15) y (2, 16)
(15, 33) y (2, 34)
(16, 33) y (9, 34)
(19, 24) y (10, 27)

Es decir:

$9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3 = 4104$

$15^3 + 33^3 = 2^3 + 34^3 = 39\,312$

$16^3 + 33^3 = 9^3 + 34^3 = 40\,033$

$19^3 + 24^3 = 10^3 + 27^3 = 20\,683$

Ramanujan tenía razón… 1729 no es un número soso.