Tema 4

Aplicaciones de las Derivadas

4.1 Introducción

Repasaremos en este Tema algunas de las aplicaciones fundamentales de las derivadas. Muchas de ellas son ya conocidas por tratarse de conceptos explicados en el Bachillerato. Nos centraremos particularmente en la Fórmula de Taylor y sus aplicaciones.

4.2 Cálculo de Límites

El Teorema de L'Hôpital (o Regla de L'Hôpital), ya comentado en un tema anterior, permite simplificar extraordinariamente el cálculo de muchos límites donde aparecen indeterminaciones de tipo cociente:

Teorema: Regla de L'Hôpital. Sean f y g dos funciones derivables al menos en un entorno reducido del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Si existe el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces también existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior.

La Regla de L'Hôpital es también aplicable en límites cuando $x \to \pm\infty$, así como en el caso de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 1: Calculemos el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{sen} x}$. Se trata de un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+2x)}}{\cos x} = 2$$

Ejemplo 2: Calculemos el límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2 - x^2}{x^3}$. Se trata de un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en la que además no es posible aplicar infinitésimos equivalentes, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 - 2x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 - 4}{2} = -1$$

4.3 Aproximación de funciones por polinomios. Fórmula de Taylor

El polinomio de Taylor constituye uno de los métodos de aproximación más comunes en las diferentes aplicaciones de las matemáticas. La Fórmula de Taylor nos permite establecer en qué condiciones una función puede ser aproximada por un polinomio que reproduce, en las cercanías de un punto concreto, el comportamiento de la función. Por el Teorema de Taylor, la diferencia entre una función dada y su polinomio de Taylor de grado n en un punto concreto x_0 es un infinitésimo de orden $n+1$ en dicho punto, lo que se traduce en que el polinomio proporciona una aproximación muy buena en las cercanías del punto x_0.

Teorema. Fórmula de Taylor. Sea $f(x)$ una función n veces derivable en un entorno de un punto x_0. Entonces se verifica:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x)$$

para cualquier x perteneciente a dicho entorno, donde:

$$P_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

es el *Polinomio de Taylor de* $f(x)$ *en* x_0 *de grado* $n-1$, mientras que $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden n en x_0.

Demostración: Realmente lo que tenemos que demostrar es que existe una función $R_n(x)$ que haga cierta la fórmula siendo un infinitésimo de orden n. Para ello lanzamos la siguiente hipótesis: $R_n(x) = K(x - x_0)^n$, con K constante. Esta hipótesis no supone pérdida alguna de generalidad puesto que no niega la posibilidad de que existan otras funciones que lo verifiquen. Nuestro problema se reduce por tanto a calcular la constante K, pues la hipótesis ya garantiza el carácter infinitesimal al orden requerido.

Para un valor concreto de x en el entorno de x_0 considerado definiremos la función $\Phi(y)$ dependiente de la variable $y \in [x_0, x]$ (siempre que x sea mayor que x_0, si x fuera menor que x_0 se cambiaría el orden, obviamente) de la siguiente forma:

$$\Phi(y) = f(x) - \left[f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x - y) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}(x - y)^{n-1} + K(x - y)^n \right]$$

$\Phi(y)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[x_0, x]$. Efectivamente, Φ es una función continua en dicho intervalo, además de derivable en el correspondiente abierto. Por otro lado $\Phi(x_0)$ es cero por la propia definición de $R_n(x)$, mientras que $\Phi(x)$ se anula de forma evidente.

Existe, por tanto, al menos un punto $c \in (x_0, x)$ tal que $\Phi'(c) = 0$.

Calculemos dicha derivada, tras las simplificaciones oportunas:

$$\Phi'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + Kn(x-c)^{n-1} = 0 \Rightarrow K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

y queda demostrado el Teorema. Q.E.D.

La función:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

recibe el nombre de *Resto de Taylor* de $f(x)$ en x_0 de orden n, concretamente expresado en forma de *Lagrange*.

Es frecuente escribir la fórmula de la forma:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \; = \; P_n(x) \; + \; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \, (x - x_0)^{n+1}$$

que obviamente es equivalente a la anterior.

Ejemplo 1: Calculemos el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ (Polinomio de McLaurin) de la función $f(x) = e^x$. La simplicidad de las derivadas de la exponencial facilita enormemente este cálculo: $f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x)$. De esta forma: $1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0)$. Por tanto:

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x-0)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 2: Compararemos en este ejemplo la función seno con sus polinomios de McLaurin de grados uno y tres respectivamente. Es fácil comprobar que (ver problema 17): $\operatorname{sen} x \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$, para el grado tres, mientras que $\operatorname{sen} x \approx x$ en el caso de grado uno.

En las figuras 2.2 y 2.3 podemos comprobar cómo la aproximación de tercer grado es bastante buena en un intervalo algo mayor que el $(-1, 1)$ mientras que la de primer grado es correcta tan sólo en $(-0.4, 0.4)$.

Ejemplo 3: En un medio de cultivo adecuado, la evolución en la población de Escherichia Coli viene dada por la expresión:

$$y(t) = \frac{2488986}{414831 + 5585169e^{-0.65\,t}}$$

donde $y(t)$ representa la densidad de células (en millones por mililitro) y el tiempo t viene medido en días.

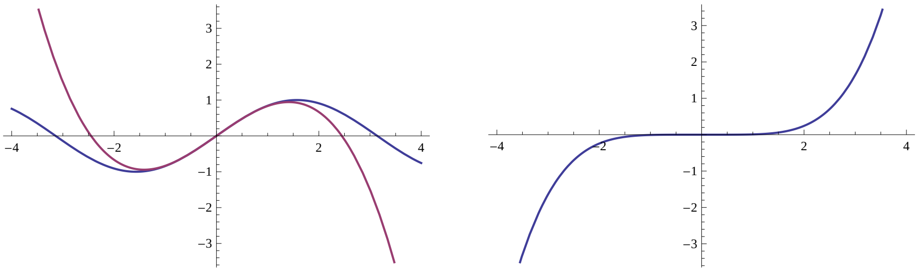

Figura 4.1: *(izquierda) Gráficas de* $\operatorname{sen} x$ *y de* $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ *en un entorno del cero. (derecha) Gráfica de la función diferencia (resto de Taylor)* $h(x) = \operatorname{sen} x - P_3(x)$.

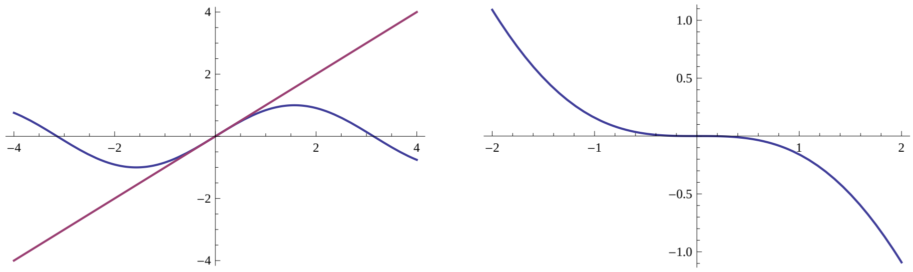

Figura 4.2: *(izquierda) Gráficas de* $\operatorname{sen} x$ *y de* $P_1(x) = x$ *en un entorno del cero. (derecha) Gráfica de la función diferencia (resto)* $h(x) = \operatorname{sen} x - P_1(x)$.

Si utilizamos el polinomio de McLaurin de grado 3 para aproximar la función $y(t)$ tendremos:

$$y(t) \approx 0.414831 + 0.250998\, t + 0.0702944\, t^2 + 0.0108494\, t^3$$

En las figura 4.3 se observa que la aproximación es razonablemente buena en los primeros cuatro días, posteriormente la aproximación es muy mala, de hecho el polinomio crece indefinidamente, mientras que la función $y(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 6$. De hecho, esto significa la existencia de un nivel de saturación, con la consiguiente estabilización en el número de células. El polinomio, por contra, nos indicaría un crecimiento indefinido del número de células.

4.4 Cálculo de extremos relativos

Tal y como se comentó en el tema anterior, para una función derivable en un conjunto abierto A el signo de la derivada determina el crecimiento o decrecimiento de la función. En los puntos en los que la función deja de ser creciente para pasar a ser decreciente, o a la inversa, la derivada será, lógicamente, nula.

Recordemos las siguientes definiciones básicas:

Definición. Sea f una función definida al menos en un intervalo (a, b). $f(x)$ presenta en el punto x_0 un <u>máximo local</u> o máximo relativo si existe un entorno de x_0 contenido en

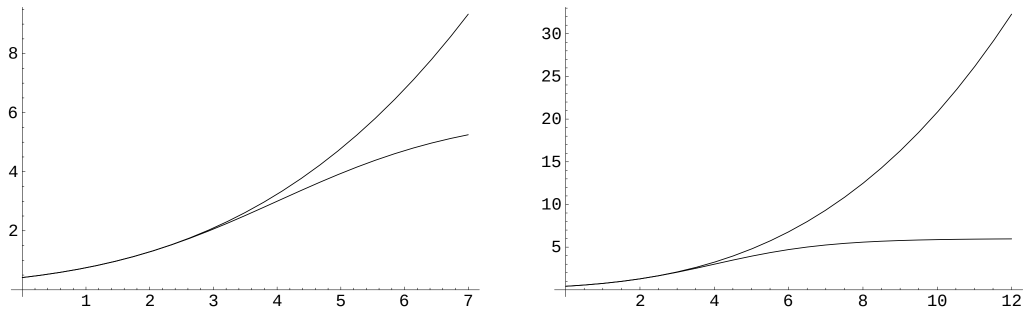

Figura 4.3: *Gráficas de $y(x)$ y de P_3. En la gráfica de la izquierda se aprecia la región donde la aproximación es razonable, la gráfica de la derecha permite intuir claramente la existencia de una asíntota para $y(x)$.*

(a, b) de forma que para todo x perteneciente a dicho entorno se verifica: $f(x) \leq f(x_0)$. De manera análoga se define el concepto de mínimo local o relativo.

Definición. Una función $f(x)$ tiene en x_0 su <u>máximo absoluto</u> si para todo x perteneciente al dominio de $f(x)$ se verifica: $f(x) \leq f(x_0)$. Una función $f(x)$ tiene en x_0 su <u>mínimo absoluto</u> si para todo x perteneciente al dominio de $f(x)$ se verifica: $f(x) \geq f(x_0)$.

Definición. Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo (a, b). $x_0 \in (a, b)$ es un punto crítico de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$.

Proposición. Sea $f(x)$ definida al menos en el intervalo (a, b) y derivable en (a, b), sea $x_0 \in (a, b)$ un extremo relativo (máximo o mínimo) de $f(x)$, entonces x_0 es un punto crítico de $f(x)$.

Comentario: La proposición anterior determina una condición necesaria para que una función derivable presente un extremo relativo. Es fácil encontrar ejemplos de que la condición no es suficiente (ver figuras).

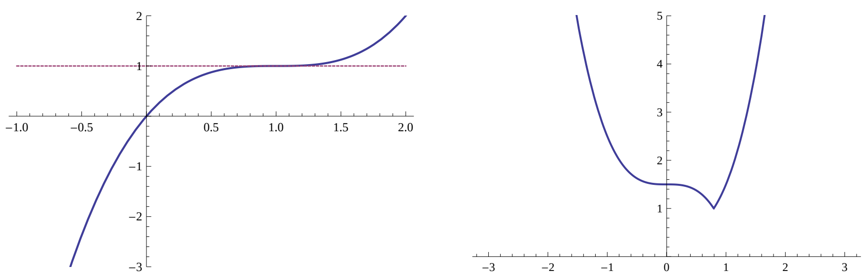

Figura 4.4: *(izquierda) Ejemplo de función que presenta un punto crítico que no es un extremo relativo. (derecha) Ejemplo de función que presenta un mínimo relativo en un punto que no es un punto crítico (evidentemente la función no es derivable en ese punto).*

Recordaremos el resultado que relaciona, para una función al menos dos veces diferenciable, el caracter de sus extremos relativos con los valores que toma la derivada segunda de la función en los mismos:

Proposición: Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en un conjunto abierto A. Sea x_0 un punto crítico de $f(x)$ en A, es decir $f(x_0) = 0$ y tal que $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ presenta en x_0 un mínimo relativo. Igualmente, si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x)$ presenta en x_0 un máximo relativo.

Finalmente este resultado es generalizable de la siguiente forma: si $f(x)$ es una función n veces derivable y $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, pero $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces que x_0 sea o no sea un extremo relativo vendrá determinado por el hecho de que n sea un número par o impar. Así, si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces tendremos un mínimo relativo, mientras que si $f^{(n)}(x_0) < 0$ el punto será un máximo relativo. Por el contrario, si n es impar, la función no presenta en x_0 un extremo, lo que tendremos será un punto de inflexión (ver siguiente apartado).

4.5 Concavidad y Convexidad

La derivada segunda de una función $f(x)$ determina el crecimiento y decrecimiento de la derivada primera, y ello se traduce, desde el punto de vista gráfico, en que la función sea cóncava o convexa según sea la derivada segunda positiva o negativa. En los puntos en los que la derivada segunda se anula, cambia la concavidad, y se les denomina puntos de inflexión (siempre y cuando la derivada tercera sea no nula en dichos puntos).
Como ya se comentó en el Tema 1 no existe unanimidad a la hora de decidir cuándo denominar a una función cóncava y cuándo convexa, por lo tanto usaremos el criterio "cóncava hacia arriba" y "cóncava hacia abajo" para aclarar exactamente qué se está especificando.

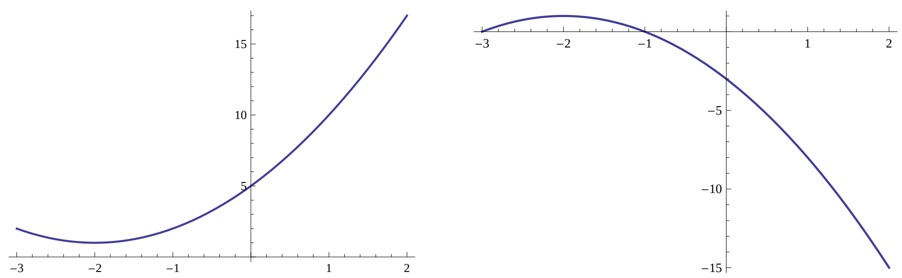

Figura 4.5: *(izquierda) Ejemplo de función cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$). (derecha) Ejemplo de función cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$).*

Finalmente, recordemos que los criterios anteriores son válidos únicamente para funciones dos veces derivables. De hecho, como de vio en el Tema 1, la concavidad y convexidad se definen independientemente de la derivabilidad de una función.

4.6 Representación gráfica de funciones

Es habitual estudiar en Bachillerato el proceso por el cual es posible determinar la representación gráfica de una función dada en forma explícita: $y = f(x)$, estudiando de forma analítica las propiedades básicas de la misma. Incluiremos a continuación un ejemplo concreto de dicho análisis para recordar los conceptos y el método utilizado.

Ejemplo: Representemos gráficamente la función:

$$f(x) = x^2 \, e^{-x}$$

Dominios: En primer lugar es fácil determinar el dominio y el dominio de continuidad de la función:

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{DomCont}\, f = \mathbb{R}$$

Dado que se trata del producto entre un polinomio y una función exponencial, ambas funciones derivables infinitas veces, la función $f(x)$ es también derivable infinitas veces y su dominio de derivabilidad es todo $\mathbb{R}$. Concluimos por tanto que $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en toda la recta real, es decir: $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Cortes con los ejes: Calculando: $f(0) = 0$, y así tenemos que la gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas. Por otro lado la ecuación: $0 = x^2 e^{-x}$ claramente no tiene más soluciones que $x = 0$. Se presenta por tanto un único punto de corte con los ejes coordenados.

Simetrías: $f(x)$ no es par y no es impar. Tampoco se trata de una función periódica.

Asíntotas: Estudiemos en primer lugar los límites que determinan si existe alguna asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad , \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

y así la función presenta al eje de abscisas como asíntota horizontal cuando x tiende a ∞. En el caso $x \to -\infty$ podría darse en caso de una asíntota oblicua, veamos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

por lo que no hay asíntotas oblícuas.

Dado que no existe ningún punto x_0 tal que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

tampoco tenemos asíntotas verticales.

Crecimiento y extremos: Calculemos la derivada de la función:

$$f'(x) = e^{-x} \left(2x - x^2\right)$$

La derivada se anula en $x = 0$ y en $x = 2$. Analizando los signos de la derivada en las diferentes zonas tendremos que:

- $f'(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ es decreciente en la región: $x \in (-\infty, 0)$.
- $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ es creciente en la región: $x \in (0, 2)$.
- $f'(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ es decreciente en la región: $x \in (2, \infty)$.

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. Tras el análisis de crecimiento es evidente que el primero constituye un mínimo relativo y el segundo un máximo relativo. No obstante, podemos calcular la derivada segunda para confirmarlo:

$$f''(x) \;=\; e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)\;, \quad f''(0) > 0\,, \quad f''(2) < 0$$

Concavidad y puntos de inflexión: La derivada segunda se anula en los puntos:

$$x^2 - 4x + 2 \;=\; 0 \;\;\Rightarrow\; x \;=\; x \pm \sqrt{2}$$

Analizando los signos tendremos:

- $f''(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba en la región: $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2})$.
- $f''(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo en la región: $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.
- $f''(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba en la región: $x \in (2 + \sqrt{2}, \infty)$.

Es evidente que la función presenta puntos de inflexión en $x = 2+\sqrt{2} \approx 3.41$ y $x = 2-\sqrt{2} \approx 0.58$. Calculemos no obstante la derivada tercera:

$$f'''(x) \;=\; -e^{-x}\left(x^2 - 6x + 6\right)\;, \qquad f'''(3.41) \neq 0\,, \quad f'''(0.58) \neq 0$$

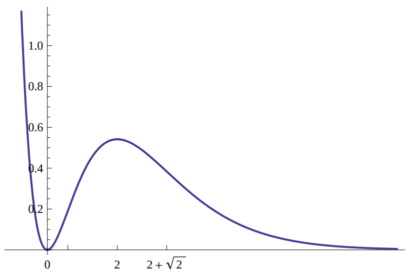

Figura 4.6: Gráfica de $f(x) = x^2\, e^{-x}$.