5. TRIGONOMETRÍA.

5.1. Introducción.

La palabra trigonometría proviene del griego (trigonos=triángulo + metría=medida) y significa "medida de triángulos". Por tanto, es la parte de las Matemáticas que tiene por objeto relacionar las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo.

Se utiliza como auxiliar de otras ciencias, ya que las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la topografía y la astronomía (aunque en este caso se emplea más la trigonometría esférica que la plana), en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la Física, Química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos vectoriales o periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

5.2. Unidades de medida de ángulos.

(A) *Grado sexagesimal* (º) = arco de circunferencia de longitud ***1/360*** de la longitud total de la misma, o ángulo central que corresponde a dicho arco.

Se divide en ***60*** minutos ('), cada uno de los cuales equivale a ***1/21.600*** de la circunferencia de un círculo; cada minuto se divide en ***60*** segundos ("), cada uno de los cuales equivale a ***1/1.296.000***. Por ejemplo, ***41º18'09***" se lee ***41*** grados, ***18*** minutos y ***9*** segundos.

Por tanto, la relación entre los submúltiplos del grado es ***1º = 60' = 3600***".

Algunos ángulos concretos reciben un nombre especial. Así, el *ángulo recto* es un ángulo que mide ***90º***, el *ángulo llano* es el doble del ángulo recto (***180º***) y el *ángulo completo* es el doble del ángulo llano (***360º***).

(B) *Grado centesimal* o *gradiente* (g) = arco de circunferencia de longitud ***1/400*** de la longitud total de la misma, o ángulo central que corresponde a dicho arco.

(C) *Radián* (rad) = ángulo central cuyo arco mide lo mismo que el radio de la circunferencia con que ha sido trazado.

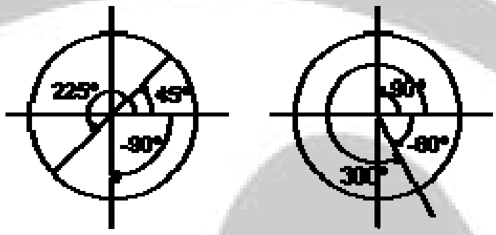
Así pues, la medida en radianes de un ángulo se expresa como la razón entre la longitud del arco y el radio, por lo que su valor es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en ***10*** partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es chica, normal o familiar. De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia: basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes:

Long. arco de circunferencia = Ángulo en radianes x Radio de la circunferencia

Ya que el perímetro de una circunferencia de radio unitario es 2π, entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes, es 2π. Como además este mismo ángulo, medido en grados, mide ***360º***, obtenemos la siguiente equivalencia: $360^\circ = 2\pi$, de la que se pueden deducir otras, pero la que quizás sea más sencilla de recordar y más cómoda para realizar otras transformaciones (usando una regla de tres simple) es $\boxed{\pi\ rad = 180^\circ}$.

Como sistema de referencia para la representación gráfica de ángulos, se utilizan los ejes cartesianos y una circunferencia centrada en el origen y radio arbitrario, que generalmente y por comodidad se toma la unidad, en cuyo caso se llama *circunferencia goniométrica*. Además hay que tener en cuenta que:

- El origen del ángulo de giro es siempre el semieje real positivo.
- El sentido es $\begin{cases} \textit{positivo}: \text{ si es contrario que el de las agujas del reloj} \\ \textit{negativo}: \text{ si es el mismo que el de las agujas del reloj} \end{cases}$.

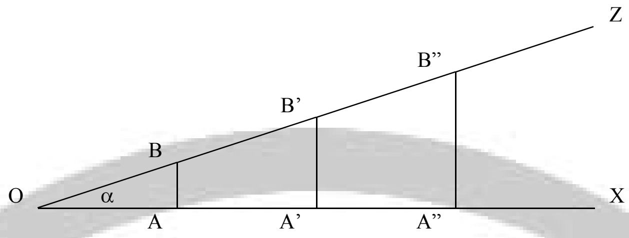


Ejercicios.

1. Un ángulo mide ***3*** radianes. Si dibujamos su arco tomando un radio de ***5*** cm, ¿cuánto medirá dicho arco?
2. Calcula el ángulo central y el interior de un decágono regular, en grados sexagesimales y radianes. Realiza el mismo ejercicio en un pentágono regular.
3. En una circunferencia de ***10*** cm de radio, un arco mide ***6*** cm ¿Cuánto mide (en grados y en radianes) el ángulo correspondiente?
4. En un hexágono regular, calcula el valor del ángulo interior y el valor del ángulo que forman dos diagonales que salen del mismo vértice y llegan a otros dos consecutivos.
5. El radio de una circunferencia mide ***6*** cm. ¿Cuál es la longitud del arco correspondiente a un ángulo de ***20º***?
6. Dos ángulos de un triángulo miden ***50º*** y $\pi/\boldsymbol{6}$ radianes. ¿Cuánto mide el otro ángulo? Expresa el resultado en grados y en radianes.
7. Haciendo una tabla, expresa en radianes los siguientes ángulos:
   0º; ***15º***; ***22º 30'***; ***30º***; ***45º***; ***60º***; ***75º***; ***90º***; ***120º***; ***135º***; ***150º***;
   180º; ***210º***; ***225º***; ***240º***; ***270º***; ***300º***; ***315º***; ***330º***; ***360º***; dos vueltas.
8. Pasar al sistema sexagesimal los siguientes ángulos:
   π ; π/***2*** ; π/***4*** ; π/***12*** ; ***3***·π/***4*** ; ***7***·π/***36*** ; ***1*** rad ; ***5***·π/***12*** rad ; ***7***·π rad
9. A qué cuadrante pertenece un ángulo de:
   500º ; ***1000º*** ; ***786º*** ; ***–120º***
10. A qué cuadrante pertenece la mitad de un ángulo de:
    450º ; ***800º*** ; ***650º*** ; ***–200º*** ; ***–500º***
11. Pasar los siguientes ángulos a los demás sistemas:
    63º 21' 24'' ; ***1288º 76' 64''*** ; ***2,1853***·π rad ; ***5***·π/***3*** rad ; ***225º*** ; ***495º*** ; ***120º 30′ 06''*** ; ***75º 18′***

5.3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Consideremos el ángulo α de vértice *O* y lados *OX* y *OZ*. Sobre él construimos los triángulos rectángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$, $\widehat{A''OB''}$,...:



Se definen las razones trigonométricas del ángulo agudo α de la siguiente forma:

(A) El *seno* de α es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$

(B) El *coseno* de α es la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

(C) La *tangente* de α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$

(D) La *cosecante* de α es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$

(E) La *secante* de α es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente: $\sec\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$

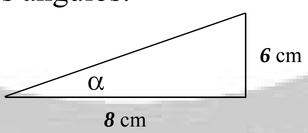
(F) La *cotangente* de α es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto: $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$

Ya que todos los triángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$, $\widehat{A''OB''}$,... están en posición de Thales, son semejantes y, aplicando el teorema de Thales, obtenemos que la definición de las distintas razones trigonométricas es independiente del triángulo rectángulo considerado:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}} = \ldots;\ \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OB''}} = \ldots;\ \ldots$$

Ejemplo:

En un triángulo rectángulo los catetos miden ***6*** y ***8*** cm. Calculemos el valor de las seis razones trigonométricas del menor de sus ángulos:



1º) La hipotenusa $h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

2º) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{5}{3}$; $\sec\alpha = \dfrac{5}{4}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{4}{3}$

Ejercicios:

1. En el ejemplo anterior, calcular las razones trigonométricas del otro ángulo agudo del triángulo.
2. En un triángulo rectángulo los catetos miden ***5*** y ***12*** m. Calcula el valor de las razones trigonométricas de sus dos ángulos agudos.

Veamos las primeras propiedades elementales que se deducen de las definiciones:

i) $\text{sen}\,\alpha \le \mathbf{1}$ y $\cos\alpha \le \mathbf{1}$

Consecuencia de que los catetos de un triángulo rectángulo son menores que la hipotenusa. La igualdad se daría para el caso de un triángulo degenerado en un segmento.

ii) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$; $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\text{sen}\,\alpha}$; $\sec\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\cos\alpha}$; $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

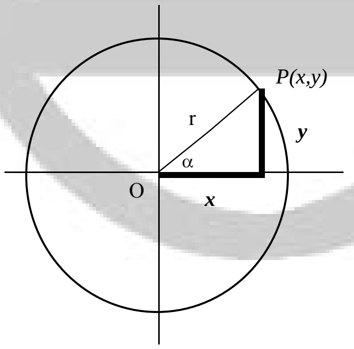
iii) *Fórmula fundamental de la trigonometría:* $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \mathbf{1}$ $\forall\alpha$ ángulo agudo

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} \underset{\text{T}^{\text{ma}}\ \text{Pitágoras}}{=} \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \mathbf{1}$$

iv) Las razones trigonométricas de un ángulo agudo son siempre positivas, ya que se obtienen como cociente de dos longitudes (que lógicamente son positivas).

5.4. Generalización del concepto de razón trigonométrica.

Estudiemos las definiciones anteriores sobre el sistema de ejes cartesianos (OX,OY) y la circunferencia de centro O y radio r:

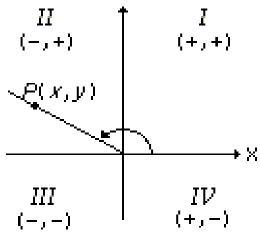


Pues bien, si P(x,y) es un punto de la circunferencia y tenemos en cuenta las definiciones anteriores, obtenemos:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{r}$ $\rightarrow$ Generalizando: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\rightarrow$ Generalizando: $\cos\alpha = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{radio}}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\rightarrow$ Generalizando: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$



Esta última definición nos permite calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo (agudo o no) y saber cuál es el signo de éstas según el cuadrante al que pertenezca el ángulo:

Cuadrante	Ángulo	Signo	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg
1^{er} C	$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$	Ordenada + Abscisa +	+	+	+	+	+	+
2^{o} C	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$	Ordenada + Abscisa -	+	-	-	+	-	-
3^{er} C	$180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$	Ordenada - Abscisa -	-	-	+	-	-	+
4^{o} C	$270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$	Ordenada - Abscisa +	-	+	-	-	+	-

Es importante comentar que en algunos puntos, frontera entre dos cuadrantes consecutivos, algunas razones trigonométricas no están definidas (¡no existen!), pero eso ya lo trataremos un poco más adelante.

Además, la definición anterior generaliza la fórmula fundamental y mejora la acotación que vimos anteriormente. Así, podemos decir que:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \quad \text{y} \quad \begin{cases} |\operatorname{sen}\alpha| \le 1, \text{ es decir, } -1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1 \\ |\cos\alpha| \le 1, \text{ es decir, } -1 \le \cos\alpha \le 1 \end{cases} \quad \text{para cualquier ángulo } \alpha$$

La relación anterior da lugar a otras dos que también pueden resultar de utilidad:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$$

Estas fórmulas permiten calcular las restantes razones de un ángulo cuando se conoce una cualquiera de ellas y el cuadrante en que se encuentra el ángulo (de no conocerse esta segunda circunstancia, el signo puede no estar determinado).

Ejemplos:

(a) Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\alpha \in \left]0^{\circ}, 90^{\circ}\right[\;\Rightarrow\; \operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow\; \cos\alpha = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \sec\alpha = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$$

(b) Si $\cos\alpha = \dfrac{-5}{13}$ y $\alpha \in \left]90^{o}, 180^{o}\right[$ $\Rightarrow$ $\sec\alpha = \dfrac{-13}{5}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{-5}{13}} = \frac{-12}{5} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{-5}{12}$$

(c) Si $\operatorname{tg}\alpha = 2$ y $\alpha \in \left]180^{o}, 270^{o}\right[$ $\Rightarrow$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

Si conocemos la cosecante, la secante o la cotangente, se toman los valores inversos, con lo que se tiene el seno, coseno o tangente respectivamente, y el problema queda reducido a uno de los casos anteriores.

Ejercicios:

1. Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α en los casos siguientes:
   a. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{5}$ y $\alpha \in 2^{o}C$
   b. $\cos\alpha = \dfrac{-4}{5}$ y $180^{o} < \alpha < 270^{o}$
   c. $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in 4^{o}C$
   d. $\operatorname{cosec}\alpha = 4$ y $\alpha \in \left]90^{o}, 180^{o}\right[$
   e. $\operatorname{sen}\alpha = -0'6$ y $\alpha \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$
   f. $\sec\alpha = \dfrac{3}{2}$ y $\alpha \in \left]180^{o}, 270^{o}\right[$
   g. $\cos\alpha = 0'6$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$
   h. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{-4}{3}$ y $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

2. Indicar el signo de $x = \dfrac{\operatorname{sen}128^{o} \cdot \cos 235^{o}}{\operatorname{tg} 310^{o}}$ sin efectuar ninguna operación.

3. Dibujar en cada caso el ángulo correspondiente:
   a) Un ángulo agudo cuyo seno sea ***3/4***.
   b) Un ángulo obtuso cuyo coseno sea ***-1/2***.
   c) Un ángulo cualquiera cuya tangente sea ***1,5***.
   d) Un ángulo cualquiera cuyo coseno sea ***3/2***.
   e) Un ángulo obtuso cuya secante sea ***-1,5***.
   f) Los ángulos comprendidos entre ***0*** y ***2·π***, cuyo coseno sea ***2/3***.

5.5. Razones trigonométricas de los ángulos fundamentales.

(A) Ángulos límites entre cuadrantes:

Todas las razones trigonométricas de los ángulos que aparecen a continuación se pueden deducir fácilmente de la aplicación, en la circunferencia goniométrica, de las definiciones generalizadas.

Ángulo	*sen*	*cos*	*tg*	*cosec*	*sec*	*cotg*
0º = 360º	***0***	***1***	***0***		***1***	
90º	***1***	***0***		***1***		***0***
180º	***0***	***-1***	***0***		***-1***	
270º	***-1***	***0***		***-1***		***0***

(B) Otros ángulos importantes:

Todas las razones trigonométricas de los ángulos que aparecen a continuación se pueden deducir fácilmente de la aplicación de las definiciones originales en el triángulo rectángulo obtenido al dividir, por una altura, uno equilátero de lado ***1*** (razones de ***30º*** y ***60º***) o en un triángulo rectángulo isósceles de catetos ***1*** (razones de ***45º***).

Lo interesante es el truco que permite recordar las razones trigonométricas de los ángulos ***0º***, ***30º***, ***45º***, ***60º*** y ***90º***. Realizamos la siguiente tabla y vamos siguiendo los pasos que se indican:

1er paso	***0º***	***30º***	***45º***	***60º***	***90º***	
sen	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	En esta fila empezamos a escribir los nos naturales desde ***0***
cos	***4***	***3***	***2***	***1***	***0***	En esta fila escribimos los nos naturales anteriores pero al revés

2º paso	***0º***	***30º***	***45º***	***60º***	***90º***	
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los nos anteriores y se dividen todos ellos entre ***2***
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	

3er paso	***0º***	***30º***	***45º***	***60º***	***90º***	
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	Se simplifica y obtenemos las razones trigonométricas buscadas
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

Ejercicio:

1. Calcular el valor de *x*:

   a) $x=(\text{sen } 30^\circ-\text{sen } 60^\circ)/(\text{sen } 30^\circ+\text{sen } 60^\circ)$

   b) $x=\left[(1-\text{sen } 45^\circ)^2+2\cdot\cos 45^\circ\right]/\cos 60^\circ$

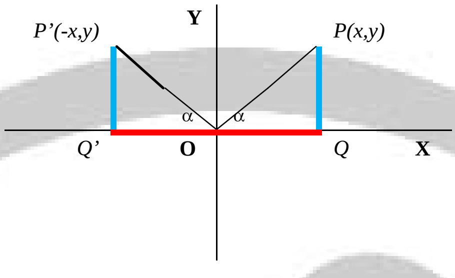
   c) $x=(\text{sen } 90^\circ\cdot\text{sen } 60^\circ+\cos 0^\circ\cdot\cos 30^\circ)/(\text{sen } 45^\circ\cdot\cos 45^\circ\cdot\text{tg } 30^\circ)$

   d) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\text{sen }\frac{\pi}{3}\cdot\text{tg }\frac{\pi}{4}$

5.6. Reducción de razones trigonométricas al primer cuadrante.

Veamos que dado un ángulo cualquiera comprendido entre ***90º*** y ***360º***, existe otro ángulo en el primer cuadrante con razones trigonométricas iguales, en valor absoluto, a las del dado.

(A) Razones trigonométricas de ángulos suplementarios (suman π radianes).



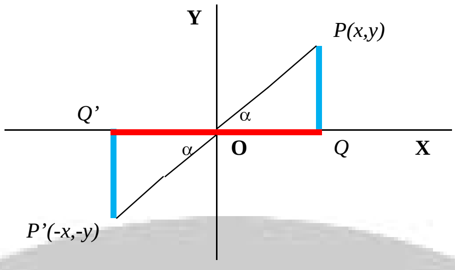
Si consideramos el ángulo $\pi-\alpha=\widehat{\mathrm{XOP}'}$, éste es suplementario del ángulo $\alpha=\widehat{\mathrm{XOP}}$ (donde el punto P es el simétrico de P' respecto del eje OY) ya que ambos suman ***180º***. Además, podemos observar que los triángulos rectángulos $\mathrm{P\overset{\triangle}{O}Q}$ y $\mathrm{P'\overset{\triangle}{O}Q'}$ son iguales. Así las razones trigonométricas son:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=y=\operatorname{sen}\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-x=-\cos\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\ \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Ejemplo: Calcular las razones trigonométricas de ***120º***.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\boldsymbol{120^\circ}=\operatorname{sen}(\boldsymbol{180^\circ-60^\circ})=\operatorname{sen}\boldsymbol{60^\circ}=\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}\\ \cos\boldsymbol{120^\circ}=\cos(\boldsymbol{180^\circ-60^\circ})=-\cos\boldsymbol{60^\circ}=\dfrac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\boldsymbol{120^\circ}=-\sqrt{\boldsymbol{3}}\\ \operatorname{cosec}\boldsymbol{120^\circ}=\dfrac{\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{3}}\\ \sec\boldsymbol{120^\circ}=\boldsymbol{-2}\\ \operatorname{cotg}\boldsymbol{120^\circ}=\dfrac{-\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{3}}\end{array}\right.$$

(B) Razones trigonométricas de ángulos que difieren en π radianes.



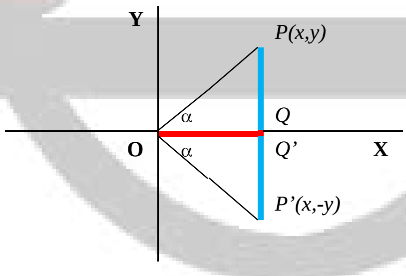
Si consideramos los ángulos $\alpha = \widehat{XOP}$ y $\pi + \alpha = \widehat{XOP'}$ (donde el punto P es el simétrico de P' respecto del origen O), ambos se diferencian en ***180º***. Además, podemos observar que los triángulos rectángulos $P\overset{\triangle}{O}Q$ y $P'\overset{\triangle}{O}Q'$ son iguales. Así las razones trigonométricas son:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -x = -\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Ejemplo: Calcular las razones trigonométricas de ***210º***.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\mathbf{210}^\circ = \operatorname{sen}(\mathbf{180}^\circ + \mathbf{30}^\circ) = -\operatorname{sen}\mathbf{30}^\circ = \dfrac{-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \cos\mathbf{210}^\circ = \cos(\mathbf{180}^\circ + \mathbf{30}^\circ) = -\cos\mathbf{30}^\circ = \dfrac{-\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\mathbf{210}^\circ = \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} \\ \operatorname{cosec}\mathbf{210}^\circ = -\mathbf{2} \\ \sec\mathbf{210}^\circ = \dfrac{-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} \\ \operatorname{cotg}\mathbf{210}^\circ = \sqrt{\mathbf{3}} \end{array}\right.$$

(C) Razones trigonométricas de ángulos opuestos (suman ***2***π radianes).



Si consideramos los ángulos $\alpha = \widehat{XOP}$ y $2\pi - \alpha = \widehat{XOP'}$ (donde el punto P es el simétrico de P' respecto del eje de abscisas), ambos suman ***360º***. Además, podemos observar que los triángulos rectángulos $P\overset{\triangle}{O}Q$ y $P'\overset{\triangle}{O}Q'$ son iguales. Así las razones trigonométricas son:

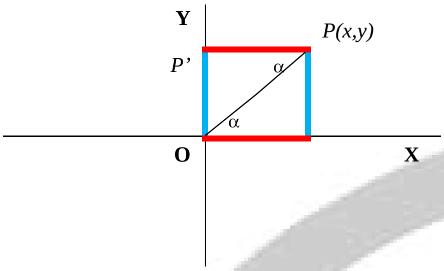
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha) = x = \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Ejemplo: Calcular las razones trigonométricas de ***-45º=360º-45º=315º***.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\mathbf{315}^\circ = \operatorname{sen}(\mathbf{360}^\circ - \mathbf{45}^\circ) = -\operatorname{sen}\mathbf{45}^\circ = \dfrac{-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \\ \cos\mathbf{315}^\circ = \cos(\mathbf{360}^\circ - \mathbf{45}^\circ) = \cos\mathbf{45}^\circ = \dfrac{-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\mathbf{315}^\circ = -\mathbf{1} \\ \operatorname{cosec}\mathbf{315}^\circ = -\sqrt{\mathbf{2}} \\ \sec\mathbf{315}^\circ = \sqrt{\mathbf{2}} \\ \operatorname{cotg}\mathbf{315}^\circ = -\mathbf{1} \end{array}\right.$$

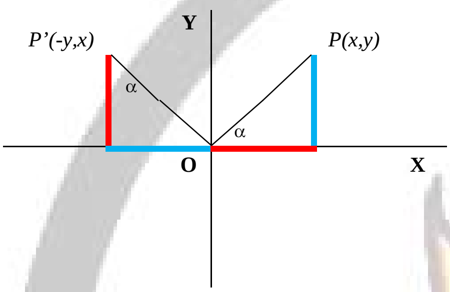
Siguiendo razonamientos análogos a los anteriores, existen otras formas de reducir razones trigonométricas de ángulos al primer cuadrante:

(D) Razones trigonométricas de ángulos complementarios (suman $\pi/2$ radianes).



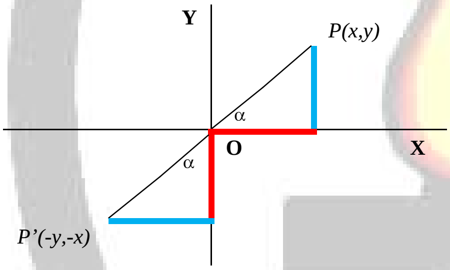
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha \end{cases}$$

(E) Razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en $\pi/2$ radianes.



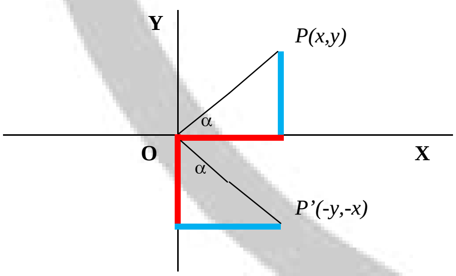
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha \end{cases}$$

(F) Razones trigonométricas de ángulos que suman $3\pi/2$ radianes.



$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha \end{cases}$$

(G) Razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en $3\pi/2$ radianes.



$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha \end{cases}$$

Por último, comentar que los ángulos que son más grandes que 2π contienen un número entero de vueltas de circunferencia más un ángulo que ya sí está contenido entre 0 y 2π radianes, es decir, si un ángulo es mayor que 2π se escribirá de la forma $\beta=\alpha+2k\pi$ donde $k\in\mathbb{Z}$ es el número de veces que el ángulo contiene a la circunferencia completa y α lo que queda. Así pues, estos ángulos tendrán el mismo origen y el mismo extremo y, por tanto, tienen las mismas razones trigonométricas: $\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{tg}\alpha$

Ejercicios:

1. Expresa las siguientes razones en función de ángulos del primer cuadrante:
   a) sen ***150º*** =
   b) tg ***300º*** =
   c) cos ***120º*** =
   d) sen ***730º*** =
   e) tg ***135º*** =
   f) tg ***3903º 20'*** =
   g) cotg ***158º 10'*** =
   h) cosec ***214º 40'*** =
   i) sen ***100º 30'*** =
   j) sen ***240º*** =
   k) sen ***240º*** =
   l) tg ***225º*** =
   m) cos ***210º*** =
   n) tg ***300º*** =
   o) tg ***225º*** =
   p) sen ***390º*** =
   q) cotg ***210º 50'*** =
   r) sec ***135º*** =
   s) sen ***330º*** =
   t) sec ***660º*** =
   u) sec ***315º*** =

2. Calcular *x* en las siguientes expresiones:
   a) $x = \text{sen } 30^\circ + 2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \text{tg} 150^\circ$
   b) $x = \left(\text{sen}^2 120^\circ - \cos^3 60^\circ\right) / \left(\text{tg } 30^\circ \cdot \text{cotg } 135^\circ\right)$
   c) $x = \text{sen } 3\pi \cdot \cos \pi/3 + \text{tg } \pi/4 \cdot \cos\left(-\pi/6\right)$
   d) $x = (\text{a} + \text{b}) \cdot \text{tg } 45^\circ - \text{a} \cdot \cos 0^\circ + \text{b} \cdot \text{sen } \pi$
   e) $x = \cos 0^\circ \cdot \text{sen } 450^\circ \cdot \text{tg } 135^\circ$

3. Determinar el valor de *x* sabiendo que $0 \le x \le \pi$:
   a) $\text{sen } x = \cos 210^\circ \cdot \text{sen}\left(-45^\circ\right)$
   b) $\sec x = \text{tg } 145^\circ\ 18' \cdot \text{cosec}\left(-19^\circ\right)$
   c) $\text{tg } x = \text{sen } 145^\circ\ 15' \cdot \text{tg } 209^\circ\ /\ \cos 18^\circ$
   d) $\cos x = \text{sen } 910^\circ \cdot \cos\left(-1000^\circ\right) /\ \text{tg } 335^\circ$

4. Calcular, utilizando la calculadora, todos los posibles valores de *x* en los siguientes casos:
   a) *x* = sen ***38º 15'***
   b) *x* = tg ***90º***
   c) cotg *x* = ***0,57735***
   d) tg *x* = ***3,25***
   e) sen *x* = ***0,0364***
   f) sen *x* = ***0,9807***
   g) *x* = cos ***72º 05' 15''***
   h) *x* = cos ***75º***
   i) sen *x* = -($3^{1/2}$/***2***)
   j) cosec *x* = ***-3,5***
   k) tg *x* = ***0,8699***
   l) cos *x* = ***0,7729***
   m) *x* = tg ***3º 19' 25''***
   n) $x = \cos \pi/12$
   o) cos *x* = ***-0,68236***
   p) tg *x* = ***1,7302***
   q) sen *x* = ***0,5466***
   r) *x* = sen ***15º***
   s) *x* = cotg ***29º 19'***
   t) cos *x* = ***0,4893***
   u) sec *x* = ***22***
   v) *x* = tg ***75º***
   w) cos *x* = ***0,1175***
   x) cotg *x* = ***0,6749***

5. Expresa en función de las razones de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los ángulos: ***310º***, ***2010º***, ***3718º***, ***7425º***.

6. Dibuja el ángulọ , di a qué cuadrante pertenece y calcula todas sus razones trigonométricas en cada uno de los siguientes casos:
   a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ *y* $\cos\alpha > 0$
   b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ *y* $\operatorname{sen}\alpha < 0$
   c) $\operatorname{tg}\alpha = -4$ *y* $\cos\alpha > 0$

7. Si $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$, ¿cómo pueden ser entre sí los ángulọs y ß?

8. ¿Para qué ángulọs es $\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$?

9. Calcula la forma general de los ángulọs tales que $\cos\alpha = \operatorname{tg} 45^\circ$.

10. Decide si los ángulos ***42º***, ***138º*** y ***222º*** tienen el mismo seno.

11. ¿Cuánto deben diferir dos ángulos para que sus tangentes coincidan?

12. ¿Existirá algún ángulọ para el cual se cumpla que $\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 4$? Justifica la respuesta sin realizar operaciones.

13. ¿Qué relación existe entre tg ***25º*** y tg ***335º***?

14. ¿En qué cuadrante se halla situado un ángulo si el seno y el coseno son negativos? ¿Y si son negativos el coseno y la tangente?

15. Calcula el signo de las razones trigonométricas de: ***750º***, ***1197º***, ***920º*** y ***1200º***.

16. Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica también su seno? ¿Por qué?

17. Si en un triángulo se conoce el seno de un ángulo, ¿queda determinado ese ángulo? ¿Y si se conoce el coseno? ¿Y si se conoce la tangente?

18. ¿Qué condiciones deben cumplir el seno y el coseno de un ángulọ para que la tangente sea positiva y mayor que ***1***? ¿En qué cuadrantes puede hallarse dicho ángulo?

19. Simplifica la expresión: $\cos(90^\circ - \alpha)\cdot\cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)\cdot\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$

20. Si un ángulo mide ***1'5*** rad, ¿es mayor, menor o igual que un ángulo recto? ¿Y si mide ***1'5708*** rad (utilizar tres decimales en los cálculos)?

21. Demostrar la siguiente igualdad: $\dfrac{1-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\left(2-\cos^2\alpha\right)}=\operatorname{cotg}^2\alpha$

22. Comprobar si es verdadera o falsa la siguiente igualdad: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

23. Simplificar la expresión $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$.

24. Calcular razonadamente el valor de la siguiente expresión:
$-\operatorname{sen} 150^{\circ}-\cos 330^{\circ}+\operatorname{tg} 225^{\circ}-\sec 240^{\circ}+\operatorname{cosec} 315^{\circ}-\operatorname{cotg} 45^{\circ}$

25. Si $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{2}{5}$, calcular:
   a) las demás razones trigonométricas de α.
   b) los ángulos α que tienen dichas razones trigonométricas.

26. Sabiendo que $\operatorname{tg} 325^{\circ}=-0.7$, calcular las siguientes razones trigonométricas:
   a) $\operatorname{sen} 35^{\circ}$; b) $\cos 125^{\circ}$; c) $\operatorname{cotg} 215^{\circ}$; d) $\operatorname{cosec} 305^{\circ}$; e) $\sec 145^{\circ}$

27. Calcular las siguientes razones trigonométricas en función de alguna de alguno de los ángulos fundamentales del primer cuadrante:
   a) $\operatorname{sen} 120^{\circ}$
   b) $\operatorname{cotg} 135^{\circ}$
   c) $\operatorname{cosec}\left(-30^{\circ}\right)$
   d) $\sec 330^{\circ}$
   e) $\cos\left(-45^{\circ}\right)$
   f) $\sec 150^{\circ}$
   g) $\operatorname{cotg} 240^{\circ}$
   h) $\operatorname{tg} 315^{\circ}$
   i) $\operatorname{tg} 210^{\circ}$
   j) $\operatorname{cosec} 225^{\circ}$
   k) $\operatorname{sen} 240^{\circ}$
   l) $\cos 300^{\circ}$

28. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{-1}{2}$,
   a) Determinar en qué cuadrantes puede estar α.
   b) Calcular las demás razones trigonométricas de α.
   c) Explicar razonadamente quién es α.

29. Demostrar que para cualquier ángulo α se verifica la siguiente relación:
$\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$

30. Sabiendo que $\text{cotg}\, 27^\circ = 2$, calcular las siguientes razones trigonométricas:
a) cosec ***63º*** ; b) cos ***333º*** ; c) tg ***153º*** ; d) sen ***243º*** ; e) sec ***117º***

31. Comprobar si la siguiente igualdad es cierta: $\dfrac{\text{cotg}\,\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}+\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\text{cosec}\,\alpha\cdot\sec\alpha$

32. Calcular, explicando razonadamente cada paso, el valor de la siguiente expresión:
$$\frac{\text{sen}\,120^\circ-\cos 225^\circ+\text{tg}\,300^\circ}{\text{cotg}\,210^\circ+\sec 150^\circ-\text{cosec}\,135^\circ}$$

33. a) Expresar ***37º*** en radianes.
b) Calcular sus razones trigonométricas si $\text{tg}\,37^\circ=\dfrac{3}{4}$
c) Calcular razonadamente un ángulo α tal que ***270º*** < α <***360º*** y $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{-3}{4}$

34. Sabiendo que $\text{cotg}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{-3}$,
a) Determinar en qué cuadrantes puede estar α.
b) Calcular las demás razones trigonométricas de α.
c) Explicar razonadamente quién es α.

35. Decidir si es verdadera o falsa la igualdad $\dfrac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$.

36. Simplificar la expresión $\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$.

37. Calcular, explicando razonadamente cada paso, el valor de la siguiente expresión:
$$\frac{\text{sen}\,135^\circ+\cos 240^\circ-\text{tg}\,300^\circ}{\text{cotg}\,225^\circ+\sec 120^\circ+\text{cosec}\,330^\circ}$$

38. Decidir si es verdadera o falsa la igualdad $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$.

39. Comprobar si son ciertas las igualdades siguientes:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$

c) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=1+\operatorname{sen}2\alpha$

d) $\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1$

e) $\frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sec 2\alpha$

f) $\frac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha$

g) $(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)\cdot(\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha)=1$

h) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=1$

i) $1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}(45^{\circ}+\alpha)}{\cos 45^{\circ}\cdot\cos\alpha}$

j) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

k) $(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=2$

l) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1-\operatorname{tg}\alpha)+\sec^2\alpha=2$

m) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta-1}$

n) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)^2=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$

o) $\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$

p) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$

q) $\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

r) $\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

s) $\frac{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\sec\alpha-\cos\alpha$

t) $\frac{\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha}=4\cos^2\alpha-2$

40. Simplificar las expresiones:

a) $\frac{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

b) $\frac{\operatorname{sen}3\beta-\operatorname{sen}5\beta}{\cos 3\beta+\cos 5\beta}$

c) $\frac{\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha\cdot(2-\cos^2\alpha)}$

d) $\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$

e) $\frac{\operatorname{sen}2a}{1-\cos^2 a}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos a}$

f) $\frac{\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}3\beta}{\cos\beta-\cos 3\beta}$

g) $\frac{\operatorname{sen}3b\cdot\cos 3b}{\cos 8b-\cos 4b}$

h) $\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}$

i) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\operatorname{sen}2\alpha}-\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$

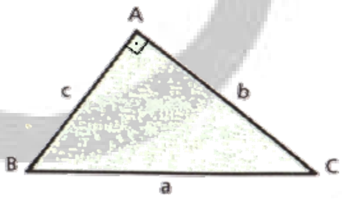
j) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2$

41. Calcular x en los siguientes casos:

a) $x = \text{sen}\, 38^\circ 15'$
b) $\text{cotg}\, x = 0'57735$
c) $\text{sen}\, x = 0.0364$
d) $x = \cos 72^\circ 5' 15''$
e) $x = \text{tg}\, 3^\circ 19' 25''$
f) $\text{sen}\, x = -\left(3^{1/2} / 2\right)$
g) $\text{tg}\, x = 0{,}8699$
h) $\cos x = -0.68236$
i) $\text{sen}\, x = 0'5466$
j) $x = \text{cotg}\, 29^\circ 19'$
k) $\sec x = 22$
l) $\cos x = 0{,}1175$
m) $x = \text{tg}\, 90^\circ$
n) $\text{sen}\, x = 0.9807$
o) $\text{tg}\, x = 3{,}25$
p) $\text{sen}\, x = -0.9807$
q) $x = \cos 75^\circ$
r) $\text{cosec}\, x = -3'5$
s) $\cos x = 0'7729$
t) $x = \cos \dfrac{\pi}{12}$
u) $\text{cotg}\, x = 0{,}6749$
v) $\text{tg}\, x = -1'7302$
w) $\cos x = -0'4893$
x) $x = \text{tg}\, 75^\circ$
y) $x = \text{sen}\left(-15^\circ\right)$
z) $\text{sen}\, x = 1'0345$

5.7. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es calcular las medidas de todos sus lados y ángulos. Para ello nos debemos basar en las relaciones que existen entre los lados, entre los ángulos y entre ambos. Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



(A) Relaciones entre los lados:

- *Teorema de Pitágoras*: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$
  El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- Cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia (en valor absoluto).

(B) Relación entre los ángulos:

- La suma de los tres ángulos de un triángulo es **180º**: $\boxed{A + B + C = 180^\circ}$

Por tanto, ya que $A = 90^\circ$, B y C son complementarios: $B + C = 90^\circ$

(C) Relaciones entre los lados y los ángulos (razones trigonométricas):

$\boxed{\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \cos C}$ y $\boxed{\cos B = \frac{c}{a} = \operatorname{sen} C}$

Ejemplos:

1. En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = \mathbf{15}\ cm$ y el ángulo $B = \mathbf{20}^\circ$. Halla los restantes elementos:

$$\left.\begin{array}{l} a = \mathbf{15}\ cm \\ A = \mathbf{90}^\circ \\ B = \mathbf{20}^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = \mathbf{90}^\circ - \mathbf{20}^\circ = \mathbf{70}^\circ \\ c = a \cdot \cos B = \mathbf{15} \cdot \cos \mathbf{20}^\circ = \mathbf{14{,}09}\ cm \\ b = a \cdot \operatorname{sen} B = \mathbf{15} \cdot \operatorname{sen} \mathbf{20}^\circ = \mathbf{5{,}13}\ cm \end{array}\right.$$

2. En un triángulo rectángulo se conocen el cateto $b = \mathbf{102{,}4}\ m$ y el ángulo $B = \mathbf{55}^\circ$. Halla los restantes elementos:

$$\left.\begin{array}{l} b = \mathbf{102{,}4}\ m \\ A = \mathbf{90}^\circ \\ B = \mathbf{55}^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \dfrac{b}{\operatorname{tg} B} = \dfrac{\mathbf{102{,}4}}{\operatorname{tg} \mathbf{55}^\circ} = \mathbf{71{,}7}\ m \\ C = \mathbf{90}^\circ - \mathbf{55}^\circ = \mathbf{35}^\circ \\ a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\mathbf{102{,}4}}{\operatorname{sen} \mathbf{55}^\circ} = \mathbf{125{,}01}\ m \end{array}\right.$$

3. En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = \mathbf{25}\ dm$ y el cateto $b = \mathbf{20}\ dm$. Halla los restantes elementos:

$$\left.\begin{array}{l} a = \mathbf{25}\ dm \\ b = \mathbf{20}\ dm \\ A = \mathbf{90}^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \sqrt{\mathbf{25}^2 - \mathbf{20}^2} = \sqrt{\mathbf{225}} = \mathbf{15}\ dm \\ \cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{25}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \Rightarrow C = \mathbf{36}^\circ\,\mathbf{52}'\,\mathbf{12}'' \\ B = \mathbf{90}^\circ - \mathbf{36}^\circ\,\mathbf{52}'\,\mathbf{12}'' = \mathbf{53}^\circ\,\mathbf{7}'\,\mathbf{48}'' \end{array}\right.$$

4. En un triángulo rectángulo se conocen los catetos $b = \mathbf{8}\ m$ y $c = \mathbf{24}\ m$. Halla los restantes elementos:

$$\left.\begin{array}{l} b = \mathbf{8}\ m \\ c = \mathbf{24}\ m \\ A = \mathbf{90}^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{\mathbf{8}^2 + \mathbf{24}^2} = \sqrt{\mathbf{640}} = \mathbf{25{,}3}\ m \\ \operatorname{tg} C = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\mathbf{24}}{\mathbf{8}} = \mathbf{3} \Rightarrow C = \mathbf{71}^\circ\,\mathbf{33}'\,\mathbf{54}'' \\ B = \mathbf{90}^\circ - \mathbf{71}^\circ\,\mathbf{33}'\,\mathbf{54}'' = \mathbf{18}^\circ\,\mathbf{26}'\,\mathbf{6}'' \end{array}\right.$$

Ejercicios:

1. Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

a) $a = \mathbf{27{,}6}\ m$, $C = \mathbf{40° 57' 24''}$

b) $a = \mathbf{42{,}18}\ m$, $c = \mathbf{33{,}40}\ m$

c) $b = \mathbf{75}\ cm$, $C = \mathbf{30° 19' 47''}$

d) $b = \mathbf{4{,}20}\ cm$, $c = \mathbf{17{,}15}\ cm$

2. Resolver el triángulo rectángulo de la figura, utilizando los datos que se indican en cada caso:

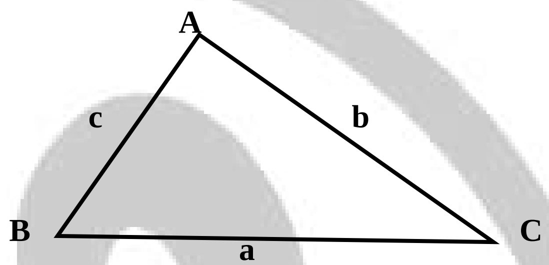
a) $a = \mathbf{120}\ m \ ;\ \hat{B} = \mathbf{35° 15'}$

b) $a = \mathbf{3500}\ m \ ;\ \hat{C} = \mathbf{15° 18' 32''}$

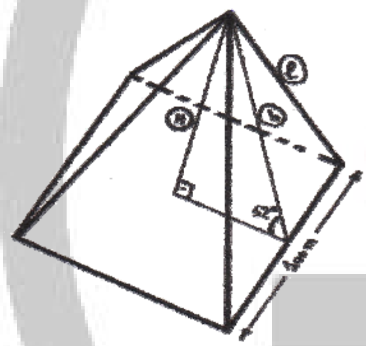
c) $c = \mathbf{130}\ m \ ;\ \hat{B} = \mathbf{72° 10'}$

d) $b = \mathbf{239}\ m \ ;\ \hat{B} = \mathbf{29° 12' 15''}$

e) $b = \mathbf{15}\ m \ ;\ c = \mathbf{7}\ m$

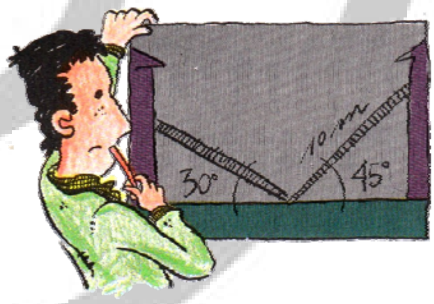


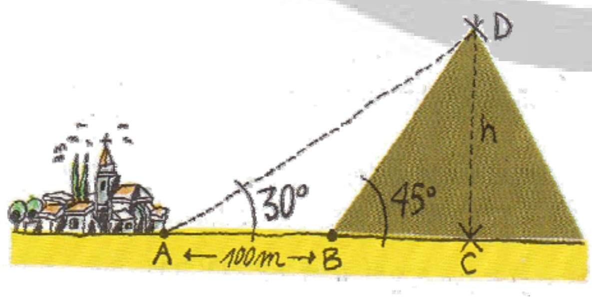
3. Consideremos la siguiente pirámide de base cuadrangular.



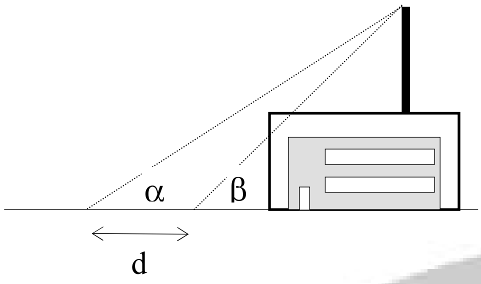
Calcular:
a) La altura *H* de la pirámide.
b) El ángulo que forma la base con una cualquiera de las aristas.
c) La altura *h* de una cara.
d) La longitud *l* de una arista.
e) El ángulo que forma la altura de la pirámide con una arista.

4. Una escalera de bomberos de ***10 m*** de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de ***45º***, y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de ***30º***. Halla la anchura de la calle y la altura que se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas.





5. Javi, Pablo y Juan van a escalar una pirámide de la que desconocen su altura. A la salida del pueblo han medido un ángulo de elevación que es de ***30º***. Han avanzado ***100 m*** hacia la base y han vuelto a medir, obteniendo en esta ocasión un ángulo de ***45º***. Calcula la altura de la montaña.



6. Quiero medir la altura de la chimenea de una fábrica. Como no me puedo acercar al pie de la chimenea, pues está en el interior de una nave, he tomado, desde dos puntos, los ángulos bajo los cuales veo el extremo de la chimenea (α y β). Y he medido la distancia de separación de los dos puntos (d). Calcular la altura de la chimenea (h) si α=***45º***, β=***55º*** y *d* =**14.9896** *m*.

7. El teleférico más corto y de pendiente más elevada del mundo se localiza en Dubuque (Iowa, EEUU). Su longitud aproximada es de ***296*** pies y asciende hasta una altura de ***189*** pies (***1*** pie=***0,3*** *m*):
   a) Determina el ángulo que forma la vía del ferrocarril con la horizontal.
   b) Si la pendiente es la tangente del ángulo anterior, expresada en %, calcúlala.

8. Si un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante una cuerda que mide ***80 m*** y forma un ángulo con el suelo de ***30º***, ¿a qué altura se encontrará situado dicho globo?

9. Una piscina olímpica mide ***50 m*** de largo y ***25 m*** de ancho. Supongamos que hay cuatro escaleras justo en las esquinas de la piscina y que un nadador que va por la calle central lleva recorridos ***30 m***. Si en ese preciso instante el nadador quiere desviarse hacia la escalera más cercana, ¿cuál es la distancia mínima que tiene que recorrer? y ¿qué ángulo (expresado en grados, minutos y segundos) se tiene que desviar, con respecto a la trayectoria que lleva, para alcanzar la escalera por el camino más corto?

10. Romeo se encuentra situado de forma que ve a Julieta, que se encuentra en su balcón, bajo un ángulo de ***30º***. Si ambos se encuentran a una distancia de ***80 m***, ¿a qué altura se encontrará el balcón de Julieta?

11. Dos radares A y B que distan entre sí ***20 km*** detectan a un avión bajo ángulos de ***30º*** y ***60º*** respectivamente. Halla la altura a la que vuela el avión y la distancia que lo separa de cada uno de los radares.

12. Un poste de ***2'5 m*** de altura se sostiene verticalmente atando su extremo superior con un cable de ***5 m*** de longitud que se fija al suelo mediante una estaca. Calcula:
    a) Los ángulos que forma el cable con el poste y con el suelo.
    b) La distancia del pie del poste a la estaca que sostiene el cable.

13. Una escalera de ***2'5 m*** de longitud tiene su extremo superior apoyado sobre una tapia de ***5 m*** de altura. Calcula:
    a) Los ángulos que forma la escalera con el suelo y con la tapia.
    b) La distancia del pie de la escalera a la tapia.

5.8. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada).

2º Como ayuda para desarrollar y completar algunos apartados:

-Apuntes del profesor Jesús Escudero Martín del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca).
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/

-Apuntes y ejercicios de las páginas web:
http://www.fisicanet.com
http://www.imaginativa.cl/~profesores

- Libro de texto: Anzola, M. y Vizmanos J.R.: *"Algoritmo 3"*, Ediciones SM, 1990.