

## EJERCICIOS RESUELTOS DE CÓNICAS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:
- a) el centro en el punto (2, 5) y el radio es igual a 7.
- b) un diámetro con extremos los puntos (8, -2) y (2, 6).

### Solución

a) La ecuación de la circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $r$  es  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

Así, la ecuación de la circunferencia pedida es  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$ .

Realizando operaciones queda  $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$ .

b) El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro de extremos (8, -2) y (2, 6), es

decir,  $\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (5, 2)$

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo al (8, -2),

es decir,  $r = d((8, -2), (5, 2)) = \sqrt{(8-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ .

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es  $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$  y realizando operaciones

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

2. Calcular el centro y el radio de la circunferencia  $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$ .

### Solución

Escribiendo la ecuación de la forma  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  se obtiene que el centro es  $(a, b)$  y el radio  $r$ .

Pasando el término independiente de la ecuación  $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$  al segundo miembro

y dividiendo por 2 queda  $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}$ .

Agrupando términos hasta obtener cuadrados perfectos queda:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} &\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = \frac{5}{2} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{37}{8} \end{aligned}$$

Por tanto, el centro es el punto  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$  y el radio es igual a  $\sqrt{\frac{37}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37}{2}}$

3. Decir la posición relativa de la recta  $y = 3 - 2x$  respecto de las circunferencias:

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$

c)  $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

**Solución**

Si la recta corta a la circunferencia en dos, uno o ningún punto será respectivamente secante, tangente o exterior a dicha circunferencia.

Como los puntos de corte pertenecen tanto a la recta como a la circunferencia, para calcularlos hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

**a)** Sustituyendo la ecuación de la recta  $y = 3 - 2x$  en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (3 - 2x)^2 - 2x + 3(3 - 2x) + 2 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 2x + 9 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

La única solución es  $x = 2$ , y sustituyendo en  $y = 3 - 2x$ , se obtiene  $y = -1$ .

Así, la recta corta a la circunferencia en un único punto, el  $(2, -1)$ , y por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

**b)** Sustituyendo la ecuación de la recta  $y = 3 - 2x$  en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (3 - 2x)^2 - 3x + 4(3 - 2x) - 3 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 3x + 12 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 23x + 18 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 360}}{10} = \frac{23 \pm 13}{10} = \begin{cases} \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \\ \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Al haber dos soluciones, hay dos puntos de corte y, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

**c)** Sustituyendo la ecuación de la recta  $y = 3 - 2x$  en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2(3 - 2x)^2 + 3x + 5(3 - 2x) - 5 &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(9 - 12x + 4x^2) + 3x + 15 - 10x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18 - 24x + 8x^2 - 7x + 10 &= 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 31x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 1120}}{20} \end{aligned}$$

Al no existir solución, por ser el discriminante negativo, no hay puntos de corte y, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

**4.** Dada la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$ , calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta  $x + y + 4 = 0$ .

**Solución**

La ecuación de cualquier recta paralela a  $x + y + 4 = 0$  se puede escribir de la forma  $x + y + k = 0$ . Para que sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$ , el sistema formado por ambas ecuaciones deberá tener una única solución.

Sustituyendo  $y = -k - x$  en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (-k - x)^2 - 12x + 10(-k - x) - 11 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + k^2 + 2kx + x^2 - 12x - 10k - 10x - 11 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (2k - 22)x + k^2 - 10k - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Para que esta ecuación de segundo grado tenga una única solución es necesario que su discriminante sea nulo, es decir,  $(2k - 22)^2 - 4 \cdot 2 (k^2 - 10k - 11) = 0$ .

Realizando operaciones se obtiene la ecuación  $k^2 + 2k - 143 = 0$  que tiene por soluciones:

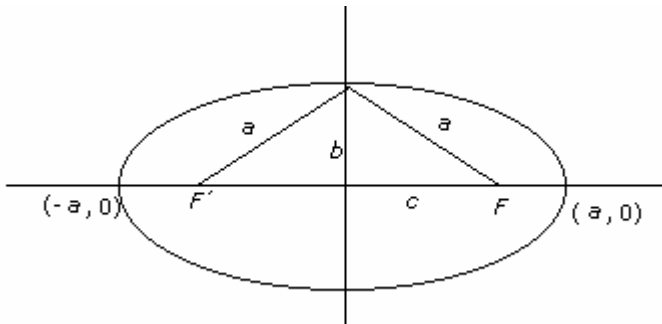
$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2} = \begin{cases} 11 \\ -13 \end{cases}$$

Por tanto, las rectas pedidas son  $x + y + 11 = 0$  y  $x + y - 13 = 0$ .

**5.** Hallar la ecuación reducida de la elipse que verifica:

- a) pasa por  $(25, 0)$  y la distancia semifocal es 7.  
b) pasa por  $(4, 1)$  y por  $(0, 3)$ .

**Solución**



La ecuación reducida de una elipse es  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  siendo  $c$  la distancia semifocal,  $a$  el semieje mayor,  $b$  el semieje menor y  $b^2 = a^2 - c^2$ .

a) El punto  $(25, 0)$  de la elipse es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto,  $a = 25$ . Al ser la distancia semifocal  $c = 7$ , se tiene que  $b^2 = a^2 - c^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$ .

Por tanto, la ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$ .

b) El punto  $(0, 3)$  de la elipse es el punto de corte con el eje de ordenadas, por tanto,  $b = 3$ . Así la ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Imponiendo que ha de pasar por  $(4, 1)$  se tiene  $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{9} = 1$  y despejando  $a^2$  se tiene,  $a^2 = 18$ .

Por tanto, la ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**6.** Hallar la ecuación reducida de la hipérbola con focos en  $(7, 0)$  y  $(-7, 0)$  y que pasa por el punto  $(4, 0)$

**Solución**

La ecuación reducida de la hipérbola es  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

El punto  $(4, 0)$  de la hipérbola es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto,  $a = 4$ . Al ser la distancia semifocal  $c = 7$ , se tiene que  $b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$ .

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$ .

**7.** Hallar la ecuación que verifican los puntos del plano que equidistan del punto  $(3, 0)$  y de la recta  $x = -4$ .

### Solución

Los puntos buscados forman una parábola de foco el punto  $F = (3, 0)$  y directriz la recta  $x = -4$ .

Como el punto y la recta no están a la misma distancia del origen es necesario partir de la igualdad  $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$ , es decir,  $\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = x + 4$ . Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene:  $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow y^2 = 14x + 7$

NOTA: Este ejercicio también se puede resolver sin considerar "a priori" que la ecuación corresponde a una parábola, de la siguiente forma:

Los puntos  $(x, y)$  que están a la misma distancia de  $(3, 0)$  que de la recta  $r$  de ecuación  $x = -4$  verifican  $d((x, y), (3, 0)) = d((x, y), r)$ , es decir,  $\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = x + 4$ .

Realizando operaciones, se obtiene  $y^2 = 14x + 7$ , ecuación que corresponde a una parábola de eje horizontal.

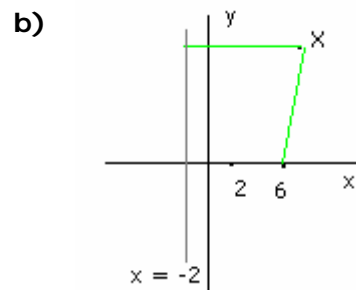
**8.** Hallar las ecuaciones de las parábolas que verifican:

a) su directriz es  $y = -6$  y su foco  $(0, 6)$ .

b) su vértice  $(2, 0)$  y su foco  $(6, 0)$ .

### Solución

a) Como el foco y la directriz están a la misma distancia del origen se puede utilizar la ecuación reducida que, al ser la directriz horizontal, es de la forma  $x^2 = 2py$  con  $p = 2 \cdot 6 = 12$ . Por tanto, su ecuación es  $x^2 = 24y$ .



Como el vértice no coincide con el origen de coordenadas se parte de igualdad:  $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$ .

Para calcular la directriz hay que tener en cuenta que la distancia de vértice,  $V = (2, 0)$ , al foco,  $F = (6, 0)$ , es de 4 unidades. Como la distancia de vértice a la directriz es la misma que la del vértice al foco, se concluye que la directriz es la recta  $x = -2$ .

Teniendo en cuenta la igualdad  $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$ , se tiene,  $\sqrt{(x - 6)^2 + y^2} = x + 2$ .

Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene:

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 16x - 32$$

9. Clasificar las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:

a)  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b)  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$

c)  $x^2 + 4y^2 = 100$

d)  $8x^2 - 3y^2 = 120$

e)  $y^2 = 36x$

f)  $y = x^2 - 2x + 3$

g)  $x = -3y^2 + y + 5$

### Solución

a) Para comprobar si la ecuación  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$  corresponde a una circunferencia, se forman cuadrados perfectos para determinar su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

En efecto, la ecuación corresponde a una circunferencia de centro  $(-1, -3)$  y radio 3.

b) La ecuación  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$  puede corresponder a una circunferencia, veamos si es así dividiéndola primero por 2 y formando luego cuadrados perfectos.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 2y + \frac{19}{2} = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + \frac{19}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + \frac{19}{2} = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{-15}{2} \end{aligned}$$

Esta ecuación no corresponde a ninguna cónica, es más, no existe ningún punto del plano que la verifique, ya que la suma de cuadrados no puede ser igual a un número negativo.

c) Como la ecuación  $x^2 + 4y^2 = 100$  tiene los coeficientes de  $x^2$  y de  $y^2$  distintos, pero del mismo signo, puede corresponder a la ecuación reducida de una elipse,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 100 quedando  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ , que corresponde a la ecuación reducida de una elipse de semiejes 10 y 5.

d) Como la ecuación  $8x^2 - 3y^2 = 120$  tiene los coeficientes de  $x^2$  y de  $y^2$  distintos y de signo contrario, puede corresponder a la ecuación reducida de una hipérbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 120 quedando  $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{40} = 1$ .

En efecto, la ecuación corresponde a la ecuación reducida de una hipérbola.

e) La ecuación  $y^2 = 36x$  corresponde a la ecuación reducida de una parábola del tipo  $y^2 = 2px$ , con  $p = 18$ .

Por tanto, corresponde a una parábola de foco el punto  $F = (9, 0)$  y directriz la recta vertical  $x = -9$ .

f) La ecuación  $y = x^2 - 2x + 3$  corresponde a una parábola de eje vertical  $x = \frac{2}{2} = 1$  y ramas hacia arriba, ya que el coeficiente de  $x^2$  es positivo.

g) La ecuación  $x = -3y^2 + y + 5$  corresponde a una parábola de eje horizontal  $y = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$  y ramas hacia la izquierda, ya que el coeficiente de  $y^2$  es negativo.