ÍNDICE

UNIDAD 1 – Conjuntos Numéricos

Introducción

En este capítulo se trabajará con los conjuntos numéricos ya conocidos.

En primer lugar se presenta una síntesis que abarca conceptos básicos relacionados con ellos.

Además se proponen actividades de aprendizaje para ejercitar las operaciones y la aplicación de propiedades.

Dado que en el título de la Unidad aparece la palabra conjuntos y considerando que se necesitan algunas nociones acerca de este tema, se incluye la notación y las definiciones principales en el Apéndice A que aparece al final del libro.

Allí también se presentan otros Apéndices que contienen los siguientes temas: Sistema de Unidades; Notación Científica; Aproximación y redondeo; Cifras Significativas y Fórmulas más usadas para el cálculo de perímetro, área y volumen.

1.1.- Los números naturales

Los números naturales son aquellos que se usan para contar y numerar. Este conjunto numérico presenta el 1 como primer elemento, pero no tiene último elemento.

La notación que se emplea para identificar el conjunto de números naturales es: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Algunas propiedades importantes son:

- N es un conjunto discreto porque entre dos números naturales siempre hay un número finito de números naturales.
- Todo número natural a, tiene su sucesor $a+1$.
- Tanto la suma como el producto de números naturales es un número natural, en cambio no sucede lo mismo con la resta y la división.
- Un número natural se puede expresar como producto de otros números naturales, que se llaman factores o divisores del primero.

  Ejemplo: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

1.2.- Los números enteros

El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto de los números naturales. La necesidad de restar $3-8$, por ejemplo, justificó la creación de los números negativos.

Al conjunto formado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero se lo llama **conjunto de los números enteros**.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Números naturales : N} \\ 0\,\textit{(cero)} \\ \textit{Números negativos} \end{array}\right\} \textit{Números enteros : Z}$$

La notación que se usa para identificar al conjunto de los números enteros es: $Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Propiedades importantes:

- Z no tiene primero ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- Z es un conjunto discreto.
- Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
- Al realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre se obtiene como resultado un número entero.

1.3.- Los números racionales

La necesidad de realizar la división $3 \div 8$, por ejemplo, en la que el dividendo no es múltiplo del divisor, justificó la creación de los números fraccionarios. Para indicar la operación $3 \div 8$ se usa la fracción $\frac{3}{8}$ y se lee tres octavos.

En un número fraccionario $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$; a recibe el nombre de numerador y b se llama denominador.

Al conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios se lo llama **conjunto de los números racionales** y se lo designa con el símbolo Q.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \textit{Números naturales : N} \\ 0\,\textit{(cero)} \\ \textit{Números negativos} \end{array}\right\} \textit{Números enteros : Z} \\ \textit{Números fraccionarios} \end{array}\right\} \textit{Números racionales : Q}$$

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir como cociente de dos números enteros. La única condición es que el denominador sea distinto de cero.

Estos números se pueden expresar de distintas formas, por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = 0{,}25 = \ldots$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5 = \frac{15}{10} = 1\tfrac{1}{2} = \ldots$$

$$-\frac{20}{10} = \frac{-20}{10} = -2 = \ \ldots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0{,}3333\ldots = 0{,}3 = \ldots$$

$0{,}25$; $1{,}5$; $0{,}3$; $\ldots$ se llaman expresiones decimales de un número racional. Algunas de estas expresiones presentan un número finito de cifras decimales mientras que otras tienen un desarrollo decimal periódico.

Propiedades importantes de este conjunto numérico:

- Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso se dice que Q es un conjunto denso. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- Q no tiene primero ni último elemento.

1.4.- Los números irracionales

Hay números que se caracterizan porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman *irracionales*, ya que no se pueden expresar nunca como **cociente** o **razón** de dos números enteros.

Son números irracionales:

- Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$.
- Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero. Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.
- Números de gran importancia en Matemática, como el número π, que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia; el número e, base de los logaritmos naturales; etc.

El **conjunto de los números irracionales** se designa con la letra I .

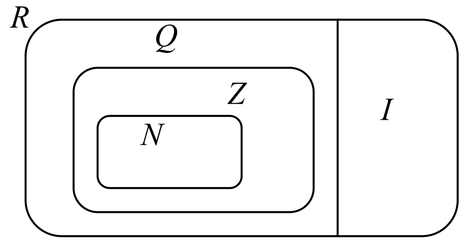
1.5.- Los números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo designa con R .

Por lo tanto, $R = Q \cup I$, donde el símbolo $\cup$ indica la operación unión entre conjuntos (Ver Apéndice A – Conjuntos).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \textit{Números naturales}: N \\ 0\ \textit{(cero)} \\ \textit{Números negativos} \end{array}\right\} \textit{Números enteros}: Z \\ \textit{Números fraccionarios} \end{array}\right\} \textit{Números racionales}: Q \\ \textit{Números irracionales}: I \end{array}\right\} \textit{Números reales}: R$$

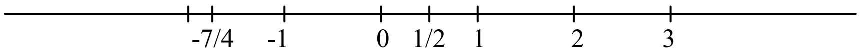
A continuación se presenta un diagrama de Venn que muestra gráficamente la relación existente entre los conjuntos numéricos vistos.



1.6.- Representación gráfica de los números reales

El conjunto de los números reales se representa gráficamente sobre una recta que se conoce con el nombre de *recta real* o *recta numérica*.

Se fija un punto origen que representa el número 0 y se establece un segmento unidad. Los números reales positivos quedan representados a la derecha del cero y los reales negativos a la izquierda, tal como se muestra en la figura.



A cada número real le corresponde un único punto de la recta y cada punto de la recta representa un único número real. Por esto se dice que existe una correspondencia *biunívoca* entre los puntos de la recta y los númerosa reales.

1.7.- Valor absoluto de un número real

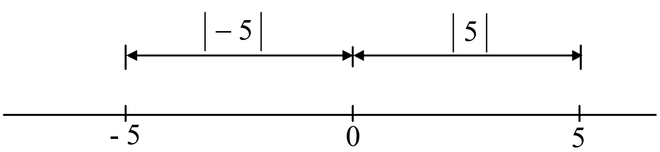
Para indicar valor absoluto de un número real x, se usa la notación $|x|$.

Se define $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia entre el punto de la recta representativo del número x y el origen (cero).

<u>Ejemplo:</u>

$|5| = 5 \qquad |-5| = -(-5) = 5$



Otra forma de expresar el valor absoluto de un número real x es: $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo:

Si $x^2 = 36$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

Resulta $|x| = 6$ y por lo tanto: $x = 6$ o $x = -6$.

1.8.- Intervalos en la recta real

La representación de los números reales en la recta numérica permite visualizar que este conjunto es totalmente ordenado.

Dados dos números reales distintos a y b, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.

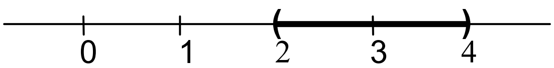
Es decir, se verifica alguna de las siguientes desigualdades: $a < b$ o $a \le b$ o $a > b$ o $a \ge b$.

Con frecuencia, es necesario trabajar con subconjuntos de los números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden, por ejemplo: "los números reales mayores que 2 y menores que 4".

La expresión anterior puede escribirse empleando la siguiente desigualdad: $2 < x < 4$.

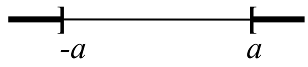
El subconjunto al que se hace referencia es $A = \{ x \in R \mid 2 < x < 4 \}$ (Ver Apéndice A – Conjuntos).

Este subconjunto también puede indicarse a través del intervalo abierto $(2,4)$ cuya representación gráfica es la que se muestra en la figura. El intervalo es abierto porque no contiene los extremos 2 y 4, lo que se indica con el uso de paréntesis.



En la siguiente tabla se muestran algunas desigualdades con los correspondientes intervalos

Desigualdades	Intervalo	Tipo de intervalo	Representación gráfica
$a < x < b$	$x \in (a,b)$	Abierto	
$a \le x \le b$	$x \in [a,b]$	Cerrado	
$a \le x < b$	$x \in [a,b)$	Semiabierto	
$a \le x$	$x \in [a,+\infty)$	Infinito	

$\lvert x \rvert < a \Rightarrow -a < x < a$	$x \in (-a, a)$	Abierto	 -a a
$\lvert x \rvert \geq a \Rightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a$	$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$	Unión de intervalos infinitos	 -a a

En la notación $(a, b]$, el paréntesis "(" indica que a no pertenece al intervalo, mientras que el corchete "]" indica que b sí pertenece al intervalo.

1.9.- Operaciones con números reales

Dada la importancia que tiene operar correctamente con números reales y en vista de los inconvenientes que suelen presentarse en este sentido, se recuerdan algunas reglas básicas para realizar operaciones, especialmente aquellas que involucran números fraccionarios.

1.9.1.- Suma

- Con igual denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad con \quad b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

- Con distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad con \quad b \neq 0 \quad y \quad d \neq 0$$

O bien

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(m:b)a + (m:d)c}{m} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \quad \text{y} \quad d \neq 0$$

donde m es el múltiplo común menor de b y d.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

1.9.2.- Producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad con \quad b \neq 0 \quad y \quad d \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$$

1.9.3.- Cociente

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \; , \; d \neq 0 \quad \text{y} \quad c \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

1.9.4.- Potenciación

Se recuerda que $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ veces}, \qquad n \in N$.

El número a recibe el nombre de base, y n es el exponente.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \;, \quad a \neq 0 \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \;, \quad a \neq 0$$

1.9.5.- Radicación

$\sqrt[n]{a} = b$ si y sólo si $b^n = a$, $n \in N$

El número a recibe el nombre de radicando, n es el índice y el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical.

En la radicación de números reales, si el índice n es par, el radicando a debe ser mayor o igual que cero, de lo contrario el resultado no es un número real.

Se recuerda que:

- Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |\, a \,|$

1.10.- Propiedades de las operaciones definidas en *R*

Se presenta a continuación un listado de las principales propiedades de las operaciones con números reales.

1.10.1.- Propiedades de la suma

Conmutativa: $a + b = b + a$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a + 0 = a$

Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$

1.10.2.- Propiedades del producto

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Elemento neutro: 1 (uno) tal que $a \cdot 1 = a$

Recíproco: cada número real $a \neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco $\left(\dfrac{1}{a}\right)$ tal que $a \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$

1.10.3.- Propiedad distributiva que combina las operaciones de suma y producto

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$

$c \cdot (a-b) = c \cdot a - c \cdot b$

$(a+b) : c = a : c + b : c$ Esta igualdad, considerando el recíproco de *c*, también puede expresarse como producto, del siguiente modo: $(a+b) \cdot \dfrac{1}{c} = a \cdot \dfrac{1}{c} + b \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

$(a-b) : c = a : c - b : c$ o bien $(a-b) \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c}$

1.10.4.- Propiedades de la potenciación y de la radicación

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n, \quad b \neq 0$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in Z, \quad n \in N$. En particular $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.	

1.11.- Racionalización de denominadores

A veces, cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen fracciones con números irracionales en los denominadores, como por ejemplo $\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; etc.

Para transformar estas fracciones en otras equivalentes pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado racionalización.

A continuación se recordarán algunas reglas para racionalizar denominadores, aunque actualmente se utiliza cada vez menos este procedimiento debido a que se cuenta con calculadoras y computadoras que facilitan los cálculos.

Se considerarán los siguientes casos:

a. El denominador es un radical único irreducible de índice 2.

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Se multiplica numerador y denominador de la fracción por el mismo radical del denominador.

b. El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2\cdot 2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

En general, para racionalizar una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $b\neq 0$, se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

c. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ó $a\pm\sqrt{b}$ ó $\sqrt{a}\pm b$.

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, se debe tener en cuenta que $(p+q)\cdot(p-q)=p^2-p\cdot q+q\cdot p-q^2=p^2-q^2$, con $p,q\in R$.

Ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{-1}=-4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

Se puede observar que se ha multiplicado el numerador y el denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador.

1.12.- Los números complejos

Si se quisiera obtener el valor de $\sqrt{-9}$, sería necesario encontrar un número que elevado al cuadrado sea igual a -9. Pero se sabe que el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero, por lo tanto no es posible calcular $\sqrt{-9}$ en el conjunto de los números reales R.

Para que este tipo de operaciones pueda resolverse, se introducen los *números imaginarios*.

Se define el número $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ como unidad imaginaria.

De este modo, $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$, donde $3i$ es un número imaginario.

La introducción de los números imaginarios da origen a una nueva ampliación del campo numérico y de este modo aparece el conjunto de los números complejos que se designa con el símbolo C.

Los números complejos tienen la forma binómica $a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Si z es un número complejo, entonces:

$$\boxed{z = a + bi}$$

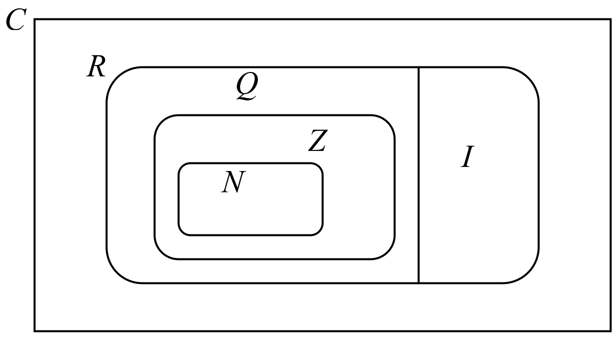
a es la parte real de z

b es la parte imaginaria de z

Un número complejo también puede expresarse como un par ordenado de números reales $z = (a, b)$.

Por ejemplo, en el número complejo $3 - 5i$, 3 es la parte real y -5 es la parte imaginaria. Este número expresado como par ordenado resulta $(3,-5)$.

El conjunto R de los números reales está incluido en el conjunto C de los números complejos. Basta considerar a un número real como un número complejo con la parte imaginaria nula.



1.12.1.- Representación gráfica de los números complejos

Para representar gráficamente los números complejos es necesario recurrir al plano complejo, ya que la recta numérica quedó completa con los números reales.

El número $a+bi$ se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a,b).

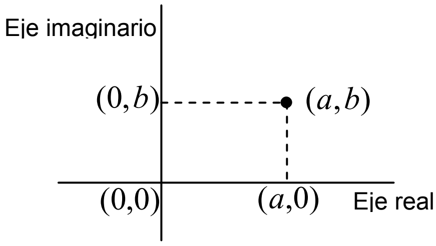
El origen de coordenadas $(0,0)$ representa el complejo $0+0i=0$.

Todos los puntos del eje de abscisas tienen coordenadas de la forma $(a,0)$ y corresponden a números reales $a+0i=a$. Por este motivo el eje de las abscisas recibe el nombre de eje real.

Todos los puntos del eje de ordenadas tienen coordenadas de la forma $(0,b)$ y corresponden a números imaginarios puros $0+bi=bi$.

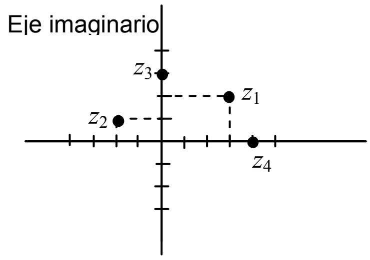
El eje de ordenadas, por lo tanto, recibe el nombre de eje imaginario.

De esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.



En la siguiente figura se muestra la representación gráfica de los números complejos:

$z_1=3+2i$ $\quad z_2=-2+i$ $\quad z_3=3i$ $\quad z_4=4$



1.12.2.- Opuesto de un número complejo

El opuesto del número complejo $z=a+bi$, es el número $-z=-a-bi$.

Por ejemplo, el opuesto de $5-7i$ es $-5+7i$.

1.12.3.- Números complejos conjugados

El conjugado del número complejo $z=a+bi$, es el número $\bar{z}=a-bi$.

Se observa que los números complejos conjugados tienen la misma parte real y las partes imaginarias de igual valor absoluto, pero de signos opuestos.

Son complejos conjugados: $z_1=2+9i$ y $\bar{z}_1=2-9i$.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Nº 1

1.- Conjuntos

1.1. Dados:

$Z = \{x \,/\, x \text{ es un número entero}\}$ $\quad$ $Q = \{x \,/\, x \text{ es un número racional}\}$

$I = \{x \,/\, x \text{ es un número irracional}\}$ $\quad$ $R = \{x \,/\, x \text{ es un número real}\}$

$B = \{x \,/\, x \text{ es un número natural par menor que } 12\}$

$C = \{x \,/\, x \text{ es un número natural divisor de } 18\}$

a. Definir por extensión los conjuntos *B* y *C*

b. Determinar $B \cap C$ y $B - C$

c. Elegir entre los conjuntos dados los que correspondan para completar las siguientes proposiciones

   i. $\ldots\ldots \subset Z$

   ii. $\ldots\ldots \cap \ldots\ldots = \varnothing$

   iii. $I \subseteq \ldots\ldots$

   iv. $R \supset \ldots\ldots$

   v. $\ldots\ldots \cup \ldots\ldots = R$

1.2.

a. Definir por extensión el conjunto *A* formado por todos los números naturales divisores de 210 menores que 10.

b. Completar indicando verdadero (**V**) o falso (**F**) según corresponda.

$3 \subset A$	$7 \in A$	$\{1,3,7\} \in A$	$10 \notin A$	$\{2,4,6\} \not\subset A$

1.3.

$S = \{x \mid x \text{ es número natural divisor de } 36\}$

$T = \{x \mid x \text{ es número natural múltiplo de } 3\text{, menor o igual que } 18\}$

a. Expresar por extensión los conjuntos dados

b. Determinar:

   i. $S \cup T =$ $\quad$ ii. $S \cap T =$

   iii. $S - T =$ $\quad$ iv. $T - S =$

c. Indicar verdadero (**V**) o falso (**F**) para cada proposición planteada:

$T \subset S$ ☐ $\quad$ $1 \in T$ ☐ $\quad$ $T \in (S \cup T)$ ☐

$\varnothing \not\subset S$ ☐ $18 \subset (S \cap T)$ ☐ $15 \notin (S \cap T)$ ☐

$1 \in S$ ☐ $(S \cap T) \subset T$ ☐

En el caso que la proposición sea falsa (**F**), modificarla para que resulte verdadera (**V**).

1.4. Dados los conjuntos A y B, tal que $A \subset B$.

a. Representar gráficamente:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$

b. Determinar:

i) $A \cup B =$

ii) $A \cap B =$

1.5. Marcar con una cruz el conjunto numérico o los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los siguientes números.

	3	-1	$0,5$	0	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{4}$	$2,7$	π	$-\frac{9}{8}$	$\frac{2}{3}$
N										
Z										
Q										
I										
R										

1.6. Para cada item, expresar por extensión el conjunto formado por los números enteros:

a. mayores que 5 y menores que 11.

b. mayores o iguales a -5 y menores que 5.

1.7. Dados los siguientes intervalos:

$[-1,45 \, , \, 2,50]$ $\left(-\sqrt{5} \, , \, -0,3\right)$

$\left[4 \, , \, \frac{25}{3}\right)$ $(-7,83 \, , \, +\infty)$

Indicar a cuál o a cuales de ellos pertenece cada uno de los números que se presentan a continuación.

a. $-0,3$ b. $0,25$ c. $-\frac{4}{3}$ d. $\sqrt{25}$

e. $\frac{5}{6}$ f. $1,22$ g. $8,3$ h. $-7,80$

1.8. Dados los siguientes subconjuntos de los reales:

$$A=\{x\in R/-5\le x\le 1\},\ B=\left\{x\in R/-\frac{5}{2}<x\le -\frac{1}{2}\right\},\ C=\{x\in R/1{,}5<x<4\},$$

$$D=\{x\in R/x\le -2\},\qquad E=\{x\in R/|x|<3\}\text{ y}\qquad F=\left\{x\in R/\ |x|\ge \frac{3}{2}\right\}$$

a. Expresar cada uno de ellos como intervalos.
b. Representarlos gráficamente en la recta numérica

2.- Operaciones con Números Reales. Aplicación de propiedades.

2.1. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a. $(x+y)^2=x^2+y^2$ ☐

b. $\sqrt{a+b}\ne\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ☐

c. $\sqrt{(-3)^2}=3$ ☐

d. $a^n+a^n=a^{2n}$ ☐

e. $a^n\cdot a^n=a^{2n}$ ☐

f. $a^n\cdot a^n=a^{n^2}$ ☐

2.2. Un alumno del Curso de Ingreso resolvió los siguientes ejercicios y han sido corregidos como CORRECTOS. Justificar la calificación en cada caso.

a. $(x^2y)^3\div(xy)^2=x^4y$

b. $\left(\dfrac{x^r}{y^{2s}}\left(\dfrac{x^{2r}}{y^{3s}}\right)^{-2}\right)^{-2}=\dfrac{x^{6r}}{y^{8s}}$

2.3. Para cada una de las siguientes expresiones, determinar el conjunto de valores de x para los cuales el resultado corresponde a un número real.

a. $\sqrt{5x}$ b. $\sqrt[3]{x-2}$ c. $\sqrt{x^{-1}}$

d. $\sqrt{-x^5}$ e. $\sqrt{(-x)^2}$ f. $\sqrt{(1-x)^3}$

g. $\sqrt{x^3}$ h. $\sqrt{(1-x)^4}$

2.4. Para los siguientes ejercicios indicar con una cruz cuál es el resultado correcto. Mostrar los cálculos realizados para determinarlo.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \frac{3}{5} \div 3 - 2 =$

$-\frac{7}{15}$ ☐ $\frac{29}{15}$ ☐

b. $\left[4 \cdot \left(\frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{5}\right)\right] - \left(\frac{5}{3} - 2\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^{-2} =$

$-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{11}{4}$ ☐

c. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)\right] : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} .3^{-3}\right] - \left(5.\frac{7}{8}\right)^0 =$

$\frac{2}{3}$ ☐ 2 ☐

d. $\sqrt{2 + \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(2 - \frac{1}{6}\right)\right]^2} =$

2 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐

e. $\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) =$

$-\frac{5}{6}$ ☐ $-\frac{11}{6}$ ☐

2.5. Aplicar las propiedades adecuadas y encontrar la forma más simple posible para expresar el resultado de:

a. $\left(p^2\right)^3 . \left(p^3 p^5\right)^2 =$

b. $\left(\frac{0}{x^{11}}\right) + \left(\frac{x^9}{x^7}\right) + x^3 x - \frac{x^4}{3} =$

c. $\left[\left(u^{-8}\right)^2 \div \left(u^5\right)^{-3}\right] . u^4 =$

d. $\sqrt[3]{(-81)y^9} \div \sqrt[3]{(-3)y^6} =$

e. $\left(\dfrac{x^{-\frac{3}{2}} x^{9}}{x^{3}} \right)^{\frac{1}{3}} =$

f. $\dfrac{x^{2}\left(x^{3}\right)^{-1} x^{\frac{2}{3}}}{x\left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}} =$

g. $\dfrac{\sqrt[3]{25^{-1} \div \left(\dfrac{1}{5} \right)^{-1}}}{\sqrt{\sqrt[3]{25 \cdot 5}}} =$

h. $\dfrac{\sqrt{a\,b^{2}} \cdot \sqrt{a^{3}\,b}}{\sqrt{a\,b}} =$

2.6. Marcar la opción que corresponda

i. $\sqrt[3]{(-3+2)^{2}} + 5 \div (0{,}4 - 1) =$

a. -10

b. -8

c. $-9/25$

d. Otro resultado

ii. $\sqrt{\dfrac{a^{2}+b^{2}}{b^{2}}} =$

a. $\dfrac{1}{b}\sqrt{a^{2}+b^{2}}$

b. $\sqrt{a^{2}+1}$

c. $\dfrac{a}{b}+1$

d. Ninguna de las anteriores es correcta

2.7. Indicar cuáles de los siguientes cálculos son correctos y cuáles no. Cuando no sean correctos, corregirlos.

a. $\sqrt{36+64} = \sqrt{36} + \sqrt{64} = 14$

b. $\sqrt{16.4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

c. $\sqrt[3]{-27} = 3$

2.8. Un alumno del Curso de Ingreso resolvió los siguientes ejercicios y han sido corregidos como CORRECTOS. Mostrar cómo llegó a cada resultado.

a. $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b. $\sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1} = 2$

2.9. Indicar con una cruz cuál es el resultado correcto justificando la respuesta con la aplicación de propiedades.

a. $\left(\sqrt{2a} - \sqrt{8a}\right)^2 =$ siendo a un número real positivo.

$-6a$ ☐ $2a$ ☐

b. $\dfrac{4}{3\sqrt{3} - \sqrt{12} - \sqrt{27}} =$

$\dfrac{7}{6}$ ☐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ ☐ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ☐

2.10. Dados los números irracionales $m = 3 - 2\sqrt{5}$ y $q = 3 + 2\sqrt{5}$, determinar el valor exacto para el resultado de las siguientes operaciones. No trabajar con decimales.

a. $q - m =$

b. $m \cdot q =$

c. $m^2 =$

2.11. Indicar si las siguientes igualdades son correctas o incorrectas. Justificar en cada caso la respuesta.

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{2}$

b. $\left(\sqrt{6} - 2\right)\left(\sqrt{6} + 3\right) = \sqrt{6}$

c. $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = 0$

e. $\dfrac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 4 - \sqrt{6}$

2.12. Indicar con una cruz cuál es el resultado correcto y mostrar cómo llegar a él.

$$\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} =$$

$5+4\sqrt{6}$ ☐ $5+2\sqrt{6}$ ☐

2.13. Obtener una expresión equivalente sin radicales en el denominador: (Racionalizar los denominadores)

a. $\dfrac{2\cdot\sqrt{3}-2}{2\cdot\sqrt{3}+2} =$

b. $\dfrac{5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}} =$

3.- Situaciones Problemáticas

3.1. Un campo rectangular tiene una superficie de 380 hectáreas. Las tres quintas partes de ese campo están sembradas de maíz. La superficie sembrada con soja es igual a la mitad de la sembrada con maíz. El resto del campo se destina a la vivienda del capataz y a los corrales de animales.

a. ¿Cuántas hectáreas están sembradas de maíz?
b. ¿Cuántas hectáreas están sembradas con soja? ¿Qué parte del campo representan?
c. ¿Cuántas hectáreas se destinan a la vivienda del capataz y a los corrales de animales? ¿Qué porcentaje del área del campo representan?

3.2. En un juego de computadora de batalla aérea, los enemigos le capturan a Martín la mitad de sus aviones, le derriban $\frac{2}{3}$ de los que quedan y los restantes vuelven a la base. Si Martín tenía 60 aviones al comenzar el juego:

a. ¿Cuántos fueron derribados?
b. ¿Cuántos aviones volvieron a la base?
c. ¿Qué fracción del total representan los aviones que volvieron a la base?

3.3. Al iniciarse una jornada de trabajo (8h) se les asigna a Ricardo y Gabriel una tarea idéntica. Al finalizar la jornada Ricardo completó $\frac{3}{10}$ de su tarea y Gabriel $\frac{4}{9}$ de la suya.

a. ¿Qué empleado es más eficiente?
b. ¿Cuántas jornadas de trabajo ocupa cada uno de los empleados para terminar la tarea asignada?
c. Si trabajan juntos durante 8h, ¿qué porcentaje de la tarea completarán en ese tiempo?

3.4. Se abonaron \$87,50 por un pantalón y una camisa, incluido el IVA (21%). ¿Cuál es el precio sin IVA?

3.5. El precio de lista de un televisor es de \$860. Si se abona al contado cuesta \$820. ¿Cuál es el porcentaje de descuento en esta forma de pago?

3.6. De un total de 150 aspirantes el 20% no aprobó la evaluación y 12 alumnos obtuvieron calificación superior a ocho. Determinar cuántos alumnos no aprobaron y que porcentaje de alumnos aprobaron con calificación superior a ocho.

3.7. En una ciudad la población aumentó en un 30% de 1975 a 1985. ¿Cuál era la cantidad de habitantes en el año 1975, si en 1985 había 52.000 habitantes?

4.- Notación Científica y Unidades

4.1. Expresar en **notación científica**:

a. 10 000 000
b. 0,1
c. 240 000
d. 0,004 44
e. 0,000 3
f. 0,000 004 5
g. 289,678
h. 0,000 000 039 8

4.2.- Ya que se pretende usar la notación científica como una herramienta para agilizar cálculos, se sugiere realizar las siguientes operaciones sin calculadora, expresar el resultado en notación científica:

a. $10 \cdot \left(10^3 + 10^5\right) =$
b. $0{,}0003 \div 3 =$
c. $34 \cdot 10^5 \times 2 \cdot 10^{-3} =$
d. $\left(0{,}000\,3 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^{-1}\right)^2 =$
e. $\dfrac{3 \cdot 10^6 \times 8 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{17} \times 6 \cdot 10^5} =$
f. $0{,}035 + 1{,}22 \cdot 10^{-3} =$

4.3. Calcular utilizando potencias de diez, sin usar la calculadora (Comprobará que es más rápido):

a. $\sqrt{1{,}6 \cdot 10^5} =$
b. $\sqrt[4]{0{,}000\,1} =$

c. $\sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-3}} =$

d. $\dfrac{\sqrt[3]{27\ 000\ 000}}{\sqrt[4]{0{,}0081}} =$

e. $\dfrac{0{,}003 \times 49\ \ 000 \times 0{,}9 \times 0{,}081}{8\,100 \times 270 \times 0{,}7^2} =$

4.4. Completar:

a. 5 mm = ... m

b. 0,1cm = ... dm

c. 100m = ... km

d. 500mm = ... µm

e. 0,2km = ... cm

f. 2,3 m^2 = ... dm^2

g. 1,2 cm^2 = ... mm^2

h. 23 cm^3 = ... mm^3

i. 0,004 m^3 = ... cm^3

j. 2 l = ... m^3

k. 10 ml = ... l

l. 0,003 l = ... cm^3

4.5. Completar:

a. $13{,}6\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

b. $1\,\dfrac{\text{kg}}{\ell} = \cdots\cdots\cdots\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

c. $\left(\dfrac{2\,10^{-4}}{1\,10^{-2}}\right)^{-1} \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = \cdots\cdots\cdots\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

d. $1{,}02\,\dfrac{\text{mg}}{\text{mm}^3} = \cdots\cdots\cdots\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

4.6. Si un péndulo tarda 6min 32s en realizar 196 oscilaciones, ¿cuánto tiempo tardará en realizar 1568 oscilaciones?

4.7. Si el radio de un tubo capilar mide 0,000 002 4m. ¿Cuál o cuáles de las siguientes longitudes corresponden al valor del diámetro?

a. $0{,}48 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$ ☐

b. $48 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$ ☐

c. $0{,}000048\text{m}$ ☐

d. $48 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ ☐

Expresar el resultado correcto en notación científica.

4.8. Un surtidor pierde agua a razón de 50 gotas por minuto. Si el volumen estimado de una gota es de 4,5 mm^3, expresar dicha pérdida en litros por mes.

5.- Situaciones Problemáticas usando Notación Científica

5.1. Se ha encontrado que 1kg de arena contiene $6{,}023.10^{23}$ granos de arena. ¿Cuál es la masa en gramos de $18{,}069.10^{28}$ granos de arena?

5.2. En un gramo de carbón hay $5 \cdot 10^{22}$ átomos. Calcular la masa (en gramos) de cada átomo y expresarla en notación científica.

6.- Aproximación y Redondeo

6.1. Redondear al centésimo:

a. $\frac{1}{6} \cong \cdots\cdots$ b. $\frac{7}{9} \cong \cdots\cdots$ c. $\frac{5}{18} \cong \cdots\cdots$

d. $0{,}581 \cong \cdots\cdots$ e. $0{,}4281 \cong \cdots\cdots$ f. $0{,}931 \cong \cdots\cdots$

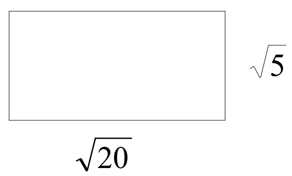
g. $2{,}239 \cong \cdots\cdots$ h. $2{,}9 \cong \cdots\cdots$ i. $\sqrt{2} \cong \cdots\cdots$

7.- Perímetros, Áreas, Volúmenes y Densidad

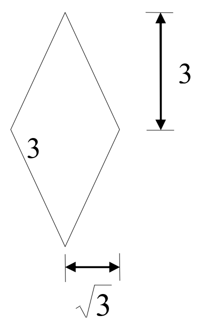
7.1. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{8}\,\text{cm}$ y su altura es $(1+\sqrt{2})cm$? ¿Cuál es la medida de su área?

7.2. Hallar el valor exacto del perímetro de la figura a) y del área de cada una de las siguientes figuras geométricas. (Las medidas están dadas en cm)

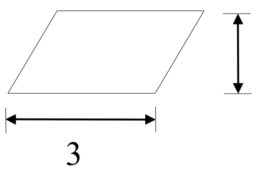
a.



b.



c.



7.3. Una fotografía mide 6,5 cm por 2,5cm. Se quiere amplificar de manera que el lado mayor mida 26 cm ¿Cuál es la longitud del perímetro de la fotografía amplificada?

7.4. La Antártida tiene una forma casi semicircular con un radio de 2000km. El espesor promedio de la capa de hielo es de 3000m. ¿Cuántos centímetros cúbicos de hielo contiene la Antártida? (Desprecie la curvatura de la Tierra).

7.5. Una unidad de área, a menudo usada al expresar áreas de terreno, es la ***hectárea* (ha)**, que se define como **1hm^2**. Una mina de carbón a cielo abierto consume 77ha de terreno con una profundidad de 26m cada año. ¿Qué volumen de tierra, en kilómetros cúbicos, es retirada en este tiempo?

7.6. Un vaso cilíndrico que contiene agua pura tiene un radio de 2cm. En dos horas el nivel del agua baja 1mm. Calcular, en gramos por hora, la rapidez de evaporación del agua. Considere: $\delta_{H_2O} = 1\frac{kg}{dm^3}$

7.7. Una piscina para casa de familia tiene las siguientes dimensiones: 4m de ancho,, 8,5m de largo y 1,45m de profundidad.

a. Si el nivel de agua que contiene la pileta llega hasta 20cm antes del borde:

   i. ¿Cuál es el volumen de agua que posee? Exprese el resultado en hl.

   ii. Si se extrae agua a razón de 1,95 litros por segundo, ¿cuánto demorará en vaciarse la piscina?

b. Si ahora se desea llenar nuevamente la pileta 374hl de agua, ¿hasta qué altura llegará el nivel de agua?.

7.8. ¿Cuánto demora en llenarse de aceite un tanque cilíndrico de 30 dm de radio y 2 m de altura hasta el 90% de su capacidad: a) si entra a razón de 1litro/s; b) si el flujo de suministro es de 0,7kg/s? Considerar que el aceite tiene una densidad de 0,92g/cm^3.

7.9. ¿Cuántos gramos de cobre se requieren para construir un cascarón esférico hueco con un radio interior de 5,7 cm y un radio exterior de 5,75 cm? La densidad del Cu es: 8,93 kg/dm^3.

7.10. Una persona adulta requiere 2,00 mg de vitamina B_2 por día. ¿Cuántos kg de queso debería comer diariamente si ésta fuera la única fuente de vitamina B_2, sabiendo que el queso contiene 5,50 µg por g?

7.11. Juan debe pintar el interior y el exterior del tanque australiano de su quinta. Sabe que está enterrado hasta la mitad, que tiene una profundidad de 1,2m; la longitud de su circunferencia es de 25m y que con un litro de pintura puede pintar 8m^2.

a. ¿Cuál es la medida del área que tiene que pintar?
b. ¿Cuántos litros de pintura necesita?
c. ¿Cuánto gastará si la pintura se vende fraccionada en latas de 4 litros ($40) y de 2 litros ($24)?
d. ¿Cuánto demorará en llenarse de agua (hasta un 75% de su altura) si ésta entra a razón de 0,8kg/s?
e. Considere que el agua tiene una densidad de 1,02g/cm^3.

8.- Números Complejos

8.1. Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = -2-3i \qquad z_2 = 8+i \qquad z_3 = i \qquad z_4 = 1-i \qquad z_5 = -2+i$$

a. Escribir el complejo conjugado y el opuesto de cada uno.
b. Representar gráficamente cada uno de los números complejos dados.