

Unidad 1: Números reales.

1.- Números racionales e irracionales

Números racionales: Son aquellos que se pueden escribir como una fracción.

- Números enteros $\left\{ \begin{array}{l} \text{Los números naturales: } 1, 2, 3, \dots \\ \text{El número } 0 \\ \text{Los enteros negativos} \end{array} \right\}$
- Números decimales exactos y periódicos.

Ejercicios de repaso

1.- Calcula la fracción irreducible:

$$a) \frac{5}{200} \quad b) \frac{-1080}{432} \quad c) \frac{26}{130} \quad d) \frac{-702}{1053}$$

2.- Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles:

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

3.- Halla x para que las fracciones sean equivalentes:

$$a) \frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x} \qquad b) \frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$$

4.- ¿Puedes escribir una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ cuyo denominador sea 10? ¿Por qué?

5.- Realiza las siguientes operaciones:

$$a) 2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{3} : \frac{3}{4} \quad b) 9 - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} + \frac{2}{5} \quad c) \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{5}\right)$$
$$d) \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad e) \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$f) \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}} \quad g) \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2}$$

6.- Ordena de menor a mayor, reduciendo a común denominador:

$$\frac{-7}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{-6}{5} \quad \frac{7}{6}$$

7.- Expresa cada decimal en forma de fracción y calcula:

a) $12,\hat{6} + 7,\hat{3}$ b) $3,7\hat{6} \cdot 4,\hat{8}$ c) $1,25 : 2,2\hat{5}$

Números irracionales: Son los que no se pueden expresar como fracción. Su expresión decimal es ilimitada no periódica. (\sqrt{n} con n un número natural no cuadrado perfecto, π , ...)

2.- Números Reales:

Es el conjunto de números formado por los números racionales e irracionales. Se representa por **R**.

La recta numérica en la que se representan todos los números reales se llama **recta real**.

Ejercicios de repaso

8.- Representa en la recta real.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{18}$

9.- Ordena de menor a mayor:

4 $\frac{3}{2}$ $\frac{-1}{2}$ -5 $\sqrt{5}$ $-\sqrt{2}$ 0 3,1415 ...

10.- Ordena y representa los números.

$\frac{-3}{2}$ 0,5 $\sqrt{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

Los subconjuntos más importantes de la recta real son los **intervalos**, que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real.

Cada intervalo viene determinado por sus extremos, siendo dos extremos en el caso de los segmentos y un extremo en el caso de las semirrectas.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser **abiertos**, **semiabiertos** o **cerrados**.

11.- Describe y representa los siguientes intervalos.

a) (0,10) b) (3,7] c) $(-\infty, -2)$ d) [2, 5] e) [5, 10) f) $[-4, +\infty)$ g) $(-\infty, 6]$ h) $(100, +\infty)$

12.- Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$ b) $9 < x \leq 7$ c) $5 \leq x < 9$ d) $10 \leq x \leq 12$

13.- Escribe el intervalo que corresponde a:

a) $x \leq -2$ b) $x < 5$ c) $x > -3$ d) $x \geq 7$ e) $x < -9$ f) $x \geq -6$

14.- Representa los intervalos (0,5) y (-2, 3) en la misma recta, y señala el intervalo intersección.

15.- Representa en la recta los siguientes conjuntos:

a) $[-3,0) \cup (-1,3]$ b) $(-3,1) \cap [0,3]$ c) $|x| > 2$ d) $|x| < 1$

16.- Representa en la recta real los conjuntos $A = \{x \in R/x \geq 4\}$ y $B = (-3,4)$. ¿Cuál es el conjunto $A \cup B$? ¿Y $A \cap B$?

3.- Radicales. Potencias de exponente fraccionario.

$\sqrt[n]{a}$, en caso de existir, es un número x que elevado a n (índice) da como resultado a (radicando). Es decir: $x^n = a$

Ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 16$

Recuerda que:

- Si el índice es par sólo existe raíz si el radicando es positivo o cero. En este caso, la raíz tiene dos soluciones que son opuestas ($\sqrt[4]{16} = \pm 2$)
- Si el índice es impar siempre tiene solución que es única y del mismo signo que el radicando ($\sqrt[3]{-64} = -4$)

Ejercicios de repaso

17.- Decide si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$ b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$ c) $\sqrt[3]{1000000} = \pm 1000$ d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

18.- Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{-10000}$ d) $\sqrt[5]{243}$

Las **potencias de exponente fraccionario** se definen como un radical:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Por ejemplo:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

19.- Transforma los radicales en potencias, y viceversa:

$$a) 3^{\frac{1}{4}} \quad b) 5^{\frac{2}{3}} \quad c) 2^{\frac{1}{6}} \quad d) 7^{\frac{3}{5}} \quad e) 10^{\frac{2}{7}} \quad f) \sqrt[4]{5^7}$$

Dos **radicales** son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$$

Reducir dos o más radicales a índice común consiste en transformarlos en radicales equivalentes con igual índice (mcm de los índices).

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

El reducir a común índice permite comprobar si dos radicales son o no equivalentes y ordenar dos o más radicales.

Por ejemplo: a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt{4}$, pues $\sqrt[4]{4^2} = \sqrt{4}$ (radicales equivalentes)

$$b) \sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt{2} \text{ pues } \sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{64}$$

20.- Reduce a índice común los siguientes radicales:

$$a) \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5} \quad b) \sqrt[4]{4} \text{ y } \sqrt[3]{7}$$

21.- Indica si son equivalentes o no los siguientes radicales.

$$a) \sqrt[4]{3^6} \text{ y } \sqrt{3^3} \quad b) \sqrt[5]{2^{10}} \text{ y } \sqrt{2} \quad c) \sqrt[4]{3^6} \text{ y } \sqrt{6} \quad d) \sqrt[4]{5^{10}} \text{ y } \sqrt{5^4}$$

22.- Ordena de mayor a menor, reduciendo a índice común.

$$a) \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{4} \text{ y } \sqrt[6]{6} \quad b) \sqrt[4]{4} \text{ y } \sqrt[5]{5} \quad c) \sqrt[5]{2}, \sqrt[3]{7} \text{ y } \sqrt[4]{9}$$

Simplificar radicales consiste obtener el radical más simple equivalente al dado. Para ello se **extraen** de la raíz todos los **factores** posibles.

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2^1 \sqrt{2^1} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^1 \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \text{dividiendo entre dos el índice y el exponente} = \sqrt{2}$$

23.- Extrae los factores que puedas de la raíz.

$$a) \sqrt{8} \quad b) \sqrt{18} \quad c) \sqrt{50} \quad d) \sqrt{98} \quad e) \sqrt{12} \quad f) \sqrt{75} \quad g) \sqrt[3]{1000} \quad h) \sqrt[3]{40}$$

24.- Extrae factores de los radicales.

$$a) \sqrt[3]{8a^5} \quad b) \sqrt[4]{16a^7} \quad c) \sqrt{2^6 a^4 b^8} \quad d) \sqrt[4]{a^6 b^5 c^9} \quad e) \sqrt[5]{a^6 b^{10}}$$

25.- Simplifica los siguientes radicales.

$$a) \sqrt{27} \quad b) \sqrt[3]{16} \quad c) \sqrt[3]{54} \quad d) \sqrt[4]{32} \quad e) \sqrt{75} \quad f) \sqrt[5]{128} \quad g) \sqrt[6]{27} \quad h) \sqrt[8]{625}$$

Los **factores** que están fuera de la raíz se pueden **introducir dentro** de ésta elevándolos al índice de la raíz.

$$6ab\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 3} = \sqrt{108 \cdot a^2 \cdot b^2}$$

$$2a\sqrt[3]{2ab^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 2ab^2} = \sqrt[3]{16a^4b^2}$$

26.- Introduce los factores bajo el radical.

$$a) 2\sqrt[3]{5} \quad b) 4\sqrt[4]{20} \quad c) 3\sqrt[5]{15} \quad d) \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad e) 2\sqrt[3]{7} \quad f) 5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

Operaciones con radicales

- **Suma o resta de radicales.** Para poder sumar y/o restar radicales, estos deben tener el mismo índice e idéntico radicando (los radicales que cumplen esto se llaman radicales semejantes).

$$b^n\sqrt[n]{a} + c^n\sqrt[n]{a} = (b + c)^n\sqrt[n]{a}$$

$$a) 3^3\sqrt[3]{3} - 4^3\sqrt[3]{3} + 9^3\sqrt[3]{3} = 8^3\sqrt[3]{3}$$

$$b) \sqrt{24} - 3\sqrt{6} + \sqrt{54} + 5 = \sqrt{3 \cdot 2^3} - 3\sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{3^3 \cdot 2} + 5 = \\ 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$$

- **Multiplicación o división de radicales.** Para multiplicar y/o dividir radicales, estos deben tener el mismo índice. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y después se opera.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{25^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^4} = \sqrt[6]{1250}$$

- **Potencia de un radical y raíz de un radical.**

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^{n \cdot m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$a) (2^3\sqrt[3]{5})^4 = 2^4 \cdot \sqrt[3]{5^4} = 16 \cdot 5^3\sqrt[3]{5} = 80^3\sqrt[3]{5}$$

$$b) \sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{24}$$

27.- Expresa mediante un solo radical.

$$a) \sqrt[5]{3\sqrt{5}} \quad b) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} \quad c) \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} \quad d) \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad e) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \quad f) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$$

28.- Efectúa estas operaciones.

$$a) \sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} \quad b) 7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$$

29.- Opera y simplifica.

$$a) 4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} \quad b) \left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 \quad c) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \quad d) \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$$

30.- Opera y simplifica.

$$a) (3\sqrt{2} - 5)(4\sqrt{2} - 3) \quad c) (2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$b) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad d) (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5})(2 + 4\sqrt{5})$$

31.- Halla el resultado.

$$a) \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \quad b) \sqrt[3]{5\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} + 1}$$

32.- Opera y simplifica.

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} \quad b) \sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{486} \quad c) \sqrt[3]{128} - 2\sqrt[3]{32}$$

$$d) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{128} \quad e) \sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \quad f) \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} \quad g) \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$$

La **racionalización** consiste en transformar “fracciones” que tengan radicales en el denominador en otras equivalentes que no los tengan. Por ejemplo:

$$\frac{6}{\sqrt[7]{3^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}} = \frac{6\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{6\sqrt[7]{3^5}}{3} = 2\sqrt[7]{3^5}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2}$$

$$= -2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

33.- Racionaliza y simplifica.

$$a) \frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}} \quad b) \frac{-5}{2\sqrt{5}} \quad c) \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad d) \frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[5]{3^2}} \quad e) \frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$$

34.- Elimina las raíces del denominador.

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad d) \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad e) \frac{7}{\sqrt{11}-3}$$

$$c) \frac{-5}{\sqrt{3}-2} \quad f) \frac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$$

Para resolver operaciones entre fracciones con radicales lo que se suele hacer es:

1° Se racionaliza cada una de las fracciones con radicales en el denominador.

2° Se opera con las fracciones racionalizadas.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \text{racionalizamos cada fracción} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{1} \\ &= \text{ahora operamos y da como resultado} = \frac{1-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

35.- Realiza estas operaciones.

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad b) \frac{1}{\sqrt[9]{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$$

36.- Efectúa las operaciones.

$$a) \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad b) \frac{1}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

4.- LOS LOGARITMOS.

Dados dos números reales positivos a y b ($b \neq 1$), el **logaritmo en base b de a** es el **exponente x** al que hay que elevar la base b para que el resultado sea a .

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$$

Ejemplos:

$$a) \log_3 27 = 3 \quad \text{porque} \quad 3^3 = 27$$

$$b) \log_7 7 = 1 \quad \text{porque} \quad 7^1 = 7$$

$$c) \log_2 32 = 5 \quad \text{porque} \quad 2^5 = 32$$

$$d) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \quad \text{porque} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

Cuando los logaritmos son en base 10 se llaman **logaritmos decimales**, y no se escribe la base.

$$\log 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$$

Ejemplos:

$$a) \log 1000 = 3 \quad \text{porque} \quad 10^3 = 1000$$

$$b) \log 0,1 = -1 \quad \text{porque} \quad 10^{-1} = 0,1$$

La calculadora científica nos permite calcular logaritmos decimales con la tecla **log**

Si la base es el número $e = 2,7182\dots$, se llaman **logaritmos neperianos** o logaritmos naturales, y se escribe

$$\ln a$$

Ejemplos:

$$a) \ln e^3 = 3$$

$$b) \ln 1 = 0$$

La calculadora científica nos permite obtener logaritmos naturales o neperianos usando la tecla **ln**

Se puede considerar que el logaritmo es la operación inversa de la exponencial.

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

37.- Calcula, mediante la definición estos logaritmos.

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 81$ c) $\log 10000$ d) $\log 0,001$ e) $\ln e^{33}$ f) $\ln e^{-4}$ g) $\log_4 16$ h) $\log_4 0,25$

38.- Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 243$ b) $\log_9 81$ c) $\log 100000$ d) $\log 0,00001$ e) $\ln e^2$ f) $\ln e^{-14}$ g) $\log_7 343$ h) $\log_4 0,0625$

Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo de 1 es siempre 0, y el logaritmo de la base es 1.

$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1$$

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b a^c = c \log_b a$$

- Cambio de base en los logaritmos.

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esta última propiedad nos permite calcular cualquier logaritmo conociendo solo los logaritmos decimales o neperianos. Por ejemplo:

$$\log_3 81 = \frac{\log 81}{\log 3} = \frac{\ln 81}{\ln 3} = 4$$

39.- Sabiendo que $\log_3 2 = 0,63$; halla $\log_3 24$ mediante las propiedades de los logaritmos (no puedes hacer uso de la calculadora).

40.- Halla el resultado de estas expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

$$a) 2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$$

$$b) \log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 =$$

$$c) \log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 =$$

41.- Determina, utilizando las propiedades y la calculadora.

$$a) \log_5 36^2$$

$$b) \log_2 \sqrt{31}$$

$$c) \log_6 100$$

$$d) \log_4 31^5$$

42.- Calcula el valor de x .

$$a) \log_3 x = 5 \quad b) \log_5 x = 3 \quad c) \log_2 x = -1 \quad d) \log_{\frac{2}{3}} x = 4$$

$$e) \log_3(x - 2) = 5 \quad f) \log_3(x + 2) = 3 \quad g) \log_2(2 - x) = -1 \quad h) \log_3(x + 3) = 4$$

43.- Halla cuánto vale x .

$$a) \log_x 3 = -1 \quad b) \log_x 5 = 2 \quad c) \log_x 3 = -2 \quad d) \log_x 2 = 5$$

44.- Calcula el valor de x .

$$a) \log_3 9^x = 2 \quad b) \log 2^x = \frac{3}{2} \quad c) \ln 3^x = -1 \quad d) \log_2 4^{x+4} = -2$$

$$e) \log_3 9^{x+3} = 3 \quad f) \log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \quad g) \ln 3^{x+6} = 3 \quad h) \log_3 27^{3x+4} = -2$$

45.- Determina el valor de x .

$$a) 8^x = 1024 \quad b) 3^{x^2} = 27 \quad c) 3^{x^2-6} = 27 \quad d) 10^{x-1} = 10^3$$

$$e) 8^{x-2} = 1024 \quad e) (3^x)^2 = 27 \quad f) 3^{x^2} + 18 = 27 \quad g) 2^{x^2-2x+1} = 1$$

Soluciones

1.- a) $\frac{1}{40}$ b) $\frac{-45}{18}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{-2}{3}$

2.- $\frac{10}{13}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{18}{7}$

3.- a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{21}{35}$ b) $\frac{-5}{2} = \frac{-20}{8} = \frac{10}{-4} = \frac{25}{-10}$

5.- a) $\frac{-26}{45}$ b) $\frac{529}{60}$ c) $\frac{21}{25}$ d) $\frac{5401}{4}$ e) $\frac{-42}{63}$ f) 7 g) $\frac{-9488}{147}$

6.- $\frac{-7}{3} < \frac{-6}{5} < \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$

7.- a) 20 b) $\frac{2486}{135}$ c) $\frac{225}{406}$

9.- $-5 < -\sqrt{2} < \frac{-1}{2} < 0 < \frac{3}{2} < \sqrt{5} < 3,1415 \dots < 4$

10.- $\frac{-3}{2} < \frac{1}{4} < 0,5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$

17.- Todas son falsas

18.- a) 2 b) -2 c) No existe ninguna raíz real d) 3

21.- a) Sí b) No c) Sí d) No

22.- a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[5]{4}$ b) $\sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$ c) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{9} > \sqrt[5]{2}$

23.- a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $7\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $5\sqrt{3}$ g) 10 h) $2\sqrt[3]{5}$

24.- a) $2a^3\sqrt{a^2}$ b) $2a^4\sqrt{a^3}$ c) $2^3a^2b^4$ d) $abc^2\sqrt[4]{a^2bc}$ e) $ab^2\sqrt[5]{a}$

25.- a) $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt[3]{2}$ c) $3\sqrt[3]{2}$ d) $2\sqrt[4]{2}$ e) $5\sqrt{3}$ f) $2\sqrt[5]{4}$ g) $\sqrt{3}$ h) $\sqrt{5}$

26.- a) $\sqrt[3]{40}$ b) $\sqrt[4]{5120}$ c) $\sqrt[5]{3645}$ d) $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$ e) $\sqrt[3]{56}$ f) $\sqrt[3]{25}$

27.- a) $\sqrt[10]{3^2 \cdot 5}$ b) $\sqrt[12]{2}$ c) $\sqrt[8]{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ e) $\sqrt[12]{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

28.- a) $-7\sqrt{5}$ b) $\frac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

29.- a) $180\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\sqrt[6]{108}$ d) $\sqrt[12]{3^7}$

30.- a) $-29\sqrt{2} + 39$ b) 1 c) $6 + 4\sqrt{3}$ d) -72

31.- a) 5 b) $\sqrt[3]{74}$

32.- a) $4\sqrt{2}$ b) $-9\sqrt{6}$ c) $4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}$ d) 16 e) $\sqrt[6]{7^5}$ f) 2 g) $\sqrt[6]{3}$

33.- a) $6 - \sqrt{6}$ b) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ d) $\frac{15\sqrt[10]{3}-4\sqrt[5]{-3^3}}{3}$ e) $\frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

34.- a) $\sqrt{2} - 1$ b) $-3(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ c) $5\sqrt{3} + 10$ d) $\frac{24+4\sqrt{10}}{13}$ e) $\frac{7\sqrt{11}+21}{2}$ f) $5\sqrt{6} - 5\sqrt{7}$

35.- a) $\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{2^5}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2+18\sqrt[6]{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

36.- a) $\frac{\sqrt[3]{5-\sqrt{5}-5}}{\sqrt[6]{5^5+5^3\sqrt{5}}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{9-\sqrt[9]{3}}}{\sqrt[9]{3^7}}$

37.- a) 3 b) 4 c) 3 d) - 4 e) 33 f) - 4 g) 2 h) - 1

38.- a) 5 b) 2 c) 6 d) - 5 e) 2 f) - 14 g) 3 h) - 2

39.- 2,89

40.- a) 3 b) 9 c) 4

41.- a) 4,4531 b) 2,4771 c) 2,5701 d) 12,3855

42.- a) 243 b) 125 c) 0,5 d) $\frac{16}{81}$ e) 245 f) 123 g) 1,5 h) 279838

43.- a) $\frac{1}{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ d) $5\sqrt{2}$

44.- a) 1 b) 4,9829 c) - 0,9102 d) - 5 e) - 2 f) 9,9658 g) - 3,2693 h) $\frac{-14}{9}$

45.- a) $\frac{10}{3}$ b) $\pm\sqrt{3}$ c) ± 3 d) 4 e) $\frac{16}{3}$ f) $\frac{3}{2}$ g) $\sqrt{2}$ h) 1

Teorema: Raíz de 2 es irracional – Demostración por Reducción al Absurdo

La demostración comienza suponiendo que raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, es decir, debe ser igual a una fracción así:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de p y q es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son primos relativos. Elevamos al cuadrado y operando queda:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Por tanto p^2 debe ser múltiplo de 2, lo que implica que p también es un múltiplo de 2. Es decir, $p = 2k$ para un cierto k . Sustituimos este valor de p en la expresión anterior y simplificamos un 2 de esa igualdad:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Esa expresión nos asegura que q^2 es múltiplo de 2, y por tanto también lo es q . Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que p y q no tenían factores comunes (es decir, $\text{mcd}(p,q) = 1$) y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen al 2 como factor común, y por tanto su mcd debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos.

Conclusión: **Raíz de 2 es irracional.**