SOLUCIÓN DE INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Resolver una inecuación es hallar el conjunto de soluciones de las incógnitas que satisfacen la inecuación.

Terminología: $\underbrace{ax + b}_{\text{Primer miembro}} > \underbrace{cx + d}_{\text{Segundo miembro}}$

Resolver cada una de las siguientes inecuaciones o desigualdades, expresando cada conjunto de soluciones en notación por desigualdad, intervalo y gráfico:

1. Resolviendo una inecuación lineal $\mathbf{6x > 10 + 2}$

   Solución.

   Operando el segundo miembro:

   $6x > 12$

   Dividiendo entre 6 a ambos lados para despejar x:

   $$\frac{6x}{\mathbf{6}} > \frac{12}{\mathbf{6}}$$

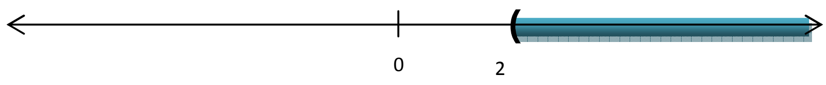
   Simplificando resulta que (solución por desigualdad):

   $\boxed{x > 2}$

   Por consiguiente el conjunto solución para x son todos los valores mayores que 2.

   Solución por intervalo: $(2, \infty)$

   Gráficamente:



2. Resolviendo una inecuación lineal $\mathbf{2x - 3} < x + 5$

Solución:

Pasando x al primer miembro y 3 al segundo:

$2x - x < 5 + 3$

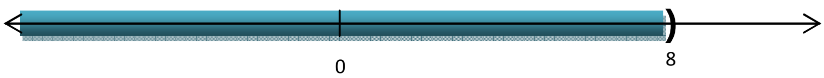
Operando término a término resulta que (solución por desigualdad):

$\boxed{x < 8}$

Por consiguiente el conjunto solución para x son todos los valores menores que 8.

<u>Solución por intervalo</u>: $(-\infty, 8)$

<u>Gráficamente</u>:



3. Resolviendo una inecuación lineal con fracciones $\mathbf{1 - \frac{3x}{2} \geq x - 4}$

Solución:

Multiplicando cada miembro por 2 y simplificando:

$$\mathbf{2}\left(1 - \frac{3x}{2}\right) \geq \mathbf{2}(x - 4)$$

$$2 - 3x \geq 2x - 8$$

Pasando 2x al primer miembro y el 2 al segundo:

$$-3x - 2x \geq -8 - 2$$

Operando término a término:

$$-5x \geq -10$$

Dividiendo entre -5 a ambos lados e invirtiendo el sentido de la desigualdad:

$$\frac{-5x}{\mathbf{-5}} \geq \frac{-10}{\mathbf{-5}}$$

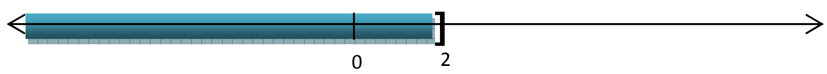
Simplificando resulta que (solución por desigualdad):

$\boxed{x \leq 2}$

Por consiguiente el conjunto solución para x son todos los valores menores o iguales que 2.

<u>Solución por intervalo</u>: $(-\infty, 2]$

<u>Gráficamente</u>:



4. Resolviendo una inecuación con nociones algebraicas
$\mathbf{(x+3)(x-1) < (x-1)^2 + 3x}$

Solución.

Aplicando la propiedad distributiva en el primer miembro y resolviendo el producto notable en el segundo:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

Suprimiendo x^2 en ambos miembros y transponiendo términos semejantes:

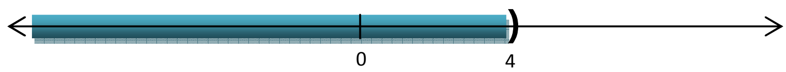
$$2x + 2x - 3x < 1 + 3$$

$\boxed{x < 4}$

Por consiguiente el conjunto solución para x son todos los valores menores que 4.

<u>Solución por intervalo</u>: $(-\infty, 4)$

<u>Gráficamente</u>:



5. Resolviendo una inecuación lineal con fracciones algebraicas

$$\frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{x+2}} > \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}$$

Solución.

Multiplicando en cruz el primer miembro:

$$\frac{(x+3)(x+2)-12}{3(x+2)} > \frac{x}{3}$$

Multiplicando por 3 a ambos lados y simplificando:

$$\mathbf{3}\left(\frac{(x+3)(x+2)-12}{(x+2)}\right) > \mathbf{3}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\frac{(x+3)(x+2)-12}{(x+2)} > x$$

Pasando x al primer miembro y multiplicando en cruz en el mismo:

$$\frac{(x+3)(x+2)-12}{(x+2)} - x > 0$$

$$\frac{(x+3)(x+2)-12-x(x+2)}{(x+2)} > 0$$

Efectuando operaciones algebraicas en el numerador y simplificando:

$$\frac{x^2+2x+3x+6-12-x^2-2x}{(x+2)} > 0$$

$$\frac{3x-6}{(x+2)} > 0$$

$\frac{3(x-2)}{(x+2)} > 0$, ahora multiplicando por $\frac{1}{3}$ a ambos lados, quedando finalmentes:

$$\boxed{\frac{(x-2)}{(x+2)} > 0}$$

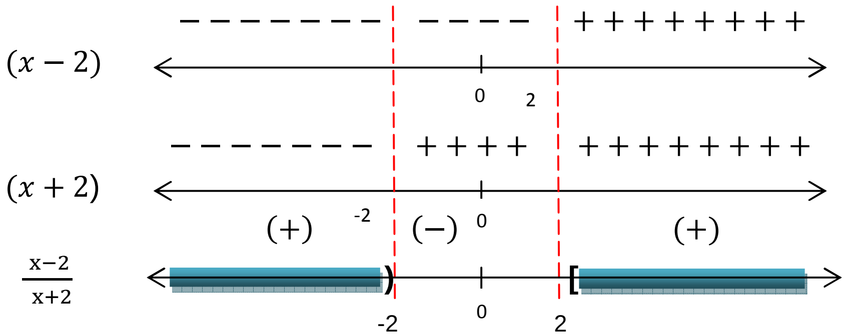
Observación: a diferencia de los ejemplos anteriores no se puede multiplicar a ambos lados $(x + 2)$ puesto que se estaría eliminando una solución.

Así que el paso a seguir es sacar los *valores críticos (valores que anulan el numerador y denominador)* los cuales se obtienen igualando a cero tanto al numerador como al denominador por separado, de la siguiente manera:

$x - 2 = 0 \; entonces \;\; x = 2$
$x + 2 = 0 \; entonces \; x = -2$

Los valores críticos son: x = 2 y x = -2. (Éstos se ubican en la recta numérica)

Aplicando el "***método del cementerio***" podemos obtener la solución del mismo:



Ahora como la inecuación es mayor que cero, entonces el conjunto de soluciones consiste de todos los números reales en el intervalo $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$. Nótese que el valor de -2 en la solución no se incluye puesto que éste hace cero al denominador.

6. Resolviendo una inecuación con fracciones algebraicas $\frac{2}{x^2+x} > \frac{2}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-1}$

Solución

Factorizando cada una de las expresiones del denominador:

$$\frac{2}{x(x+1)} > \frac{2}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)}$$

Sacando el m.c.m (mínimo común múltiplo) al segundo miembro:
$x(x-1)(x+1)$

$$\frac{2}{x(x+1)} > \frac{2(x+1)+3x}{x(x-1)(x+1)}$$

Pasando el segundo miembro al primero y realizando los cálculos y simplificaciones respectivas:

$$\frac{2}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)+3x}{x(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{2(x-1)-2(x+1)-3x}{x(x-1)(x+1)} > 0 \quad \text{, recuerda el cambio de signo}$$

$$\frac{2x-2-2x-2-3x}{x(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-4-3x}{x(x-1)(x+1)} > 0, \quad \text{factorizando el signo negativo en el numerador}$$

$$\frac{-(4+3x)}{x(x-1)(x+1)} > 0\ , \quad \text{cambiando el sentido de la desigualdad, queda finalmente:}$$

$$\boxed{\frac{3x+4}{x(x-1)(x+1)} < 0} \ (*)$$

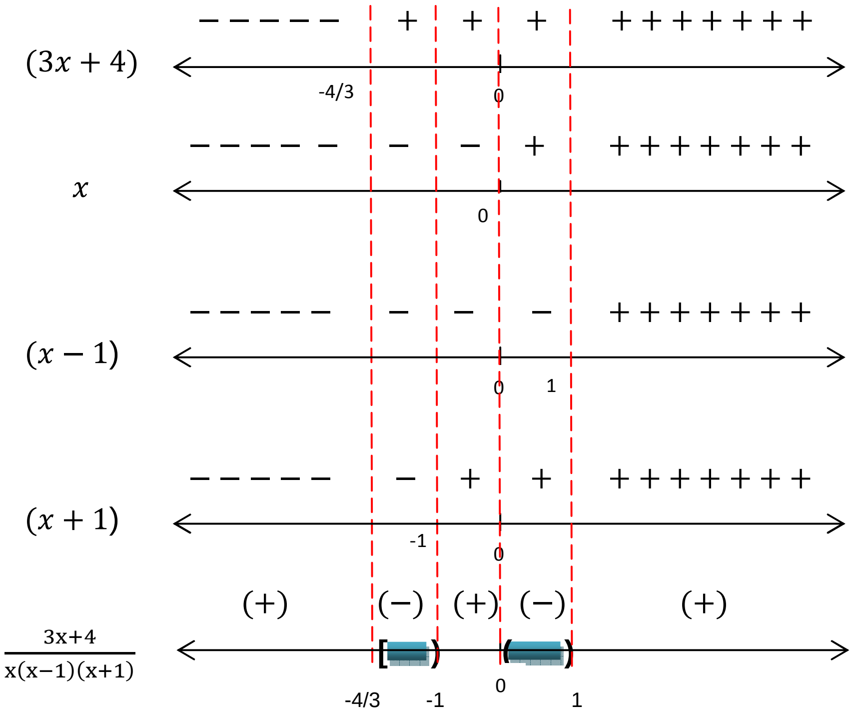
Es importante tener en cuenta que para aplicar el método del cementerio, hay que encontrar los valores críticos tanto del numerador como del denominador, los cuales son:

$$3x+4=0 \ \ entonces \ \ x = -\frac{4}{3}$$

$x = 0$

$x - 1 = 0 \;\; entonces \;\; x = 1$
$x + 1 = 0 \;\; entonces \;\; x = -1$

Aplicando el "***método del cementerio***" podemos obtener la solución del mismo:



Ahora como lo que interesa son los valores menores que 0 debido a $(*)$, el conjunto de soluciones consiste de todos los números reales en el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, -1\right) \cup (0,1)$. Nótese que los valores de -1, 0 y 1 en la solución no se incluyen puesto que éstos hacen cero al denominador.

7. Resolviendo una inecuación racional $\frac{\mathbf{2x-7}}{\mathbf{x-5}} \leq \mathbf{3}$

Solución.

<u>Nota aclaratoria</u>: aun cuando éste ejercicio parezca mucho más sencillo que los dos anteriores, éste tiene un caso particular:

Pasando el 3 al primer miembro:

$$\frac{2x-7}{x-5} - 3 \leq 0$$

Sumando fracciones y simplificando términos semejantes:

$$\frac{2x-7-3(x-5)}{x-5} \leq 0$$

$$\frac{2x-7-3x+15}{x-5} \leq 0$$

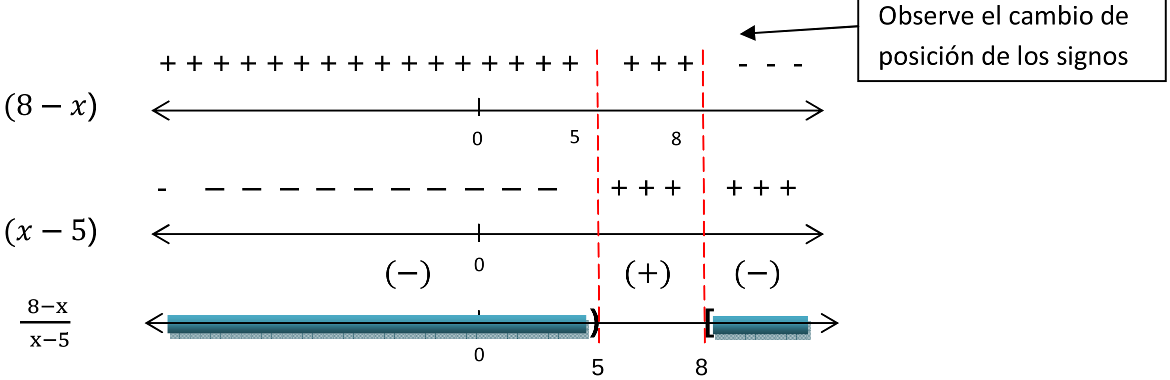
$$\frac{-x+8}{x-5} \leq 0$$

$$\boxed{\frac{8-x}{x-5} \leq 0} \quad (*)$$

Así como en los dos ejercicios anteriores, el paso a seguir es sacar los valores críticos:

$$8 - x = 0 \; entonces \;\; x = 8$$
$$x - 5 = 0 \; entonces \; x = 5$$

Aplicando el "***método del cementerio***" podemos obtener la solución del mismo:



Ahora como lo que interesa son los valores menores que 0 debido a $(*)$, el conjunto de soluciones consiste de todos los números reales en el intervalo $(-\infty, 5) \cup [8, \infty)$. Nótese que el valor de 5 en la solución no se incluye puesto que éste hace cero al denominador.

8. Resolviendo una doble desigualdad $\mathbf{-3 \leq 6x - 1} < 3$

Solución.

Agregando +1 a cada parte de la desigualdad y simplificando:

$$-3 + \mathbf{1} \leq 6\text{x} - 1 + \mathbf{1} < 3 + \mathbf{1}$$

$$-2 \leq 6\text{x} < 4$$

Dividiendo cada parte por 6 y simplificando:

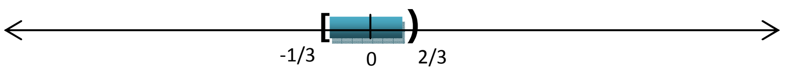
$$\frac{-2}{\mathbf{6}} \leq \frac{6\text{x}}{\mathbf{6}} < \frac{4}{\mathbf{6}}$$

$$\boxed{\frac{-1}{3} \leq \text{x} < \frac{2}{3}}$$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son mayores o iguales a $\frac{-1}{3}$ y menores que $\frac{2}{3}$.

Solución por intervalo: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Gráficamente:



9. Resolviendo una doble desigualdad $\mathbf{-1 \leq 2 - 3x \leq 11}$

Solución.

Agregando -2 a cada parte de la desigualdad y simplificando:

$$-1 \mathbf{- 2} \leq 2 - 3\mathrm{x} \mathbf{- 2} \leq 11 \mathbf{- 2}$$

$$-3 \leq -3\mathrm{x} < 9$$

Dividiendo cada parte por – 3, invirtiendo el sentido de la desigualdad y simplificando:

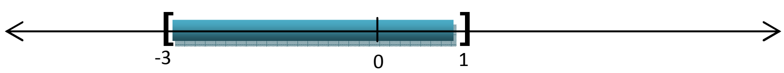
$$\frac{-3}{\mathbf{-3}} \leq \frac{-3\mathrm{x}}{\mathbf{-3}} \leq \frac{9}{\mathbf{-3}}$$

$$\boxed{-3 \leq \mathrm{x} \leq 1}$$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son mayores o iguales a – 3 y menores o iguales a 1.

Solución por intervalo: $[-3, \ 1)$

Gráficamente:



10. Resolviendo una doble desigualdad con fracciones
$\frac{2}{3}\mathrm{x} - 2 < 2x - 3 < 6 + \frac{2}{3}\mathrm{x}$

Solución.

Agregando +3 y $-\frac{2}{3}\mathrm{x}$ a cada parte de la desigualdad y simplificando:

$$\frac{2}{3}\mathrm{x} - 2 \mathbf{+ 3 - \frac{2}{3}x} < 2x - 3 \mathbf{+ 3 - \frac{2}{3}x} < 6 + \frac{2}{3}\mathrm{x} \mathbf{+ 3 - \frac{2}{3}x}$$

$$1 < 2x - \frac{2}{3} < 9$$

Operando el centro de la desigualdad, multiplicando por $\frac{3}{4}$ a cada parte de la desigualdad y simplificando:

$$1 < \frac{4}{3}\mathrm{x} < 9$$

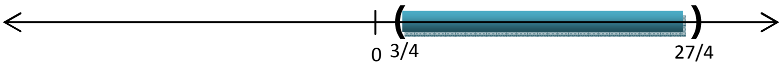
$$\boldsymbol{\frac{3}{4}} \cdot 1 < \boldsymbol{\frac{3}{4}} \cdot \frac{4}{3}\mathrm{x} < \boldsymbol{\frac{3}{4}} \cdot 9$$

$$\boxed{\frac{3}{4} < x < \frac{27}{4}}$$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son mayores a $\frac{3}{4}$ y menores a $\frac{27}{4}$.

<u>Solución por intervalo</u>: $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{4}\right)$

<u>Gráficamente</u>:



11. Resolviendo una inecuación con valor absoluto $|x - 5| < 2$

Solución.

Recordar que: $|\mathrm{x}| < a$ equivale a decir $-\mathrm{a} < x < a$.

Reescribiendo la desigualdad aplicando la equivalencia anterior:

$$-2 < x - 5 < 2$$

Agregando +5 a cada parte de la desigualdad y simplificando:

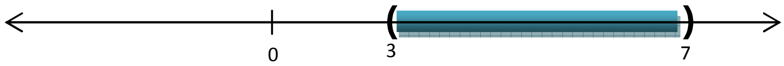
$$-2 \boldsymbol{+ 5} < x - 5 \boldsymbol{+ 5} < 2 \boldsymbol{+ 5}$$

$$\boxed{3 < x < 7}$$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son mayores a 3 y menores a 7.

Solución por intervalo: $(3, 7)$

Gráficamente:



12. Resolviendo una inecuación con valor absoluto $|x + 3| \geq 7$

Solución.

Recordar que: $|x| > a$ equivale a decir $x < -a$ o $x > a$

Reescribiendo la desigualdad aplicando la equivalencia anterior:

$x + 3 \leq -7 \qquad o \qquad x + 3 \geq 7$

Agregando -3 a cada lado de las dos desigualdades y simplificando:

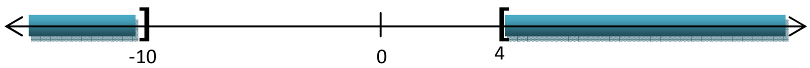
$x + 3 \mathbf{- 3} \leq -7 \mathbf{- 3} \qquad o \qquad x + 3 \mathbf{- 3} \geq 7 \mathbf{- 3}$

$x \leq -10 \qquad o \qquad x \geq 4$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son menores o iguales a -10 o mayores o iguales a 4.

Solución por intervalo: $(-\infty, -10] \cup [4, \infty)$

Gráficamente:



13. Resolviendo una inecuación con valor absoluto $8 - |2x - 1| \geq 6$

Solución.

A diferencia de los dos anteriores en éste hay que tener la expresión de valor absoluto en un solo lado de la desigualdad.

Pasando el 8 al segundo miembro y simplificando:

$$-|2x - 1| \geq 6 - 8$$

$$-|2x - 1| \geq -2$$

Multiplicando a ambos lados por (-1) y cambiando el sentido de la desigualdad:

$$|2x - 1| \leq 2$$

Reescribiendo la desigualdad aplicando la equivalencia correspondiente:

$$-2 \leq 2x - 1 \leq 2$$

Agregando +1 a cada parte de la desigualdad y simplificando:

$$-2 \mathbf{+1} \leq 2x - 1 \mathbf{+1} \leq 2 \mathbf{+1}$$

$$-1 \leq 2x \leq 3$$

Dividiendo entre 2 cada parte de la desigualdad y simplificando:

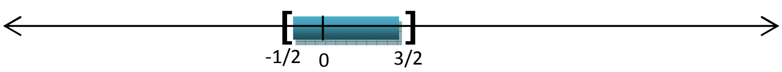
$$\frac{-1}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}}$$

Por consiguiente el conjunto de soluciones son todos los números reales que son mayores o iguales a $-\frac{1}{2}$ y menores o iguales a $\frac{3}{2}$.

Solución por intervalo: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Gráficamente:



14. Resolviendo una inecuación no lineal: $x^2 - x - 6 < 0$

Solución.

Observación: para resolver inecuaciones no lineales se debe hacer uso de los casos de factorización.

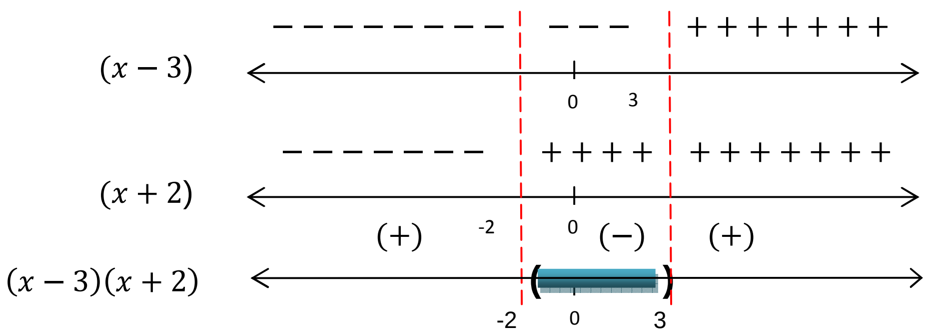
Factorizando el primer miembro:

$(x-3)(x+2) < 0$

Los valores críticos son:

$x - 3 = 0 \;\; entonces \;\; x = 3$
$x + 2 = 0 \;\; entonces \;\; x = -2$

Aplicando el "***método del cementerio***" podemos obtener la solución del mismo:



Ahora como la inecuación es menor que cero, el conjunto de soluciones consiste de todos los números reales en el intervalo $(-2,3)$.

15. Resolviendo una inecuación no lineal $2x^3 + 2x \geq 5x^2$

Solución

Observación: Para desarrollar inecuaciones no lineales lo primero que hay que hacer es pasar todos los términos a un solo lado de la desigualdad, dejando siempre el segundo miembro como cero.

Pasando $5x^2$ al primer miembro y organizando el polinomio:

$$2\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x} - 5\mathrm{x}^2 \geq 0$$

$$2\mathrm{x}^3 - 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} \geq 0$$

Factorizando el primer miembro dos veces:

$$x(2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 2) \geq 0$$

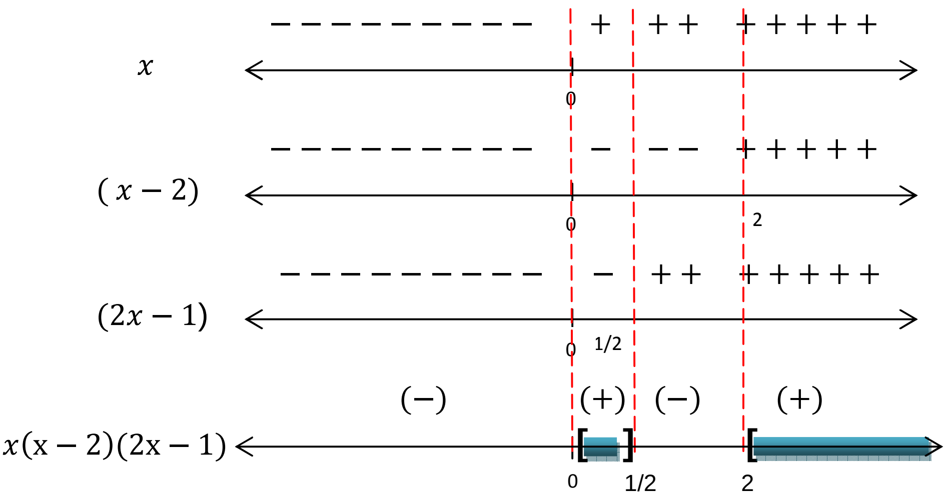
$$x(\mathrm{x} - 2)(2\mathrm{x} - 1) \geq 0$$

Los valores críticos son:

$$x = 0$$
$$x - 2 = 0 \;\; entonces \;\; x = 2$$
$$2x - 1 = 0 \;\; entonces \;\; x = \frac{1}{2}$$

Aplicando el "***método del cementerio***" podemos obtener la solución del mismo:

3



Ahora como la inecuación es mayor o igual que cero, el conjunto de soluciones consiste de todos los números reales en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right) \cup [-2,\infty)$.
