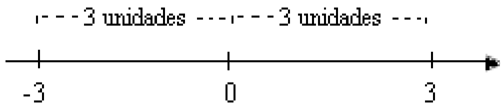
VALOR ABSOLUTO

Cualquier número *a* tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto *a* al origen. Observe en el dibujo que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3. En notación, esto es $|-3| = 3$. Las barras se leen como el valor absoluto de lo que esta dentro de ellas. En el valor absoluto no importa en que lado de la recta real está representado el número. Analíticamente podemos ver que si *a* es positivo, es decir esta a la derecha del cero, entonces $|a| = a$ y si está a la izquierda del origen, es decir si *a* es negativo, entonces $|a| = -a$. Esto lo escribimos en la siguiente definición



Definición.- El valor absoluto de un número real, *x*, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1

a.- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b.- $\left|-\frac{1}{2}\right| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Observe como el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo.

c.- Si *x*>2 entonces $|x-2| = x-2$, pues *x*-2>0 y así usamos la primera parte de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo positivo y el valor absoluto lo deja igual.

d.- Si *x*<2 entonces $|x-2| = -(x-2)$, pues *x*-2<0 y así usamos la segunda formula de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo negativo y el valor absoluto le cambia de signo.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si *x* es una incógnita en la expresión $|x-3|$, entonces no sabemos si *x*-3 es positivo o negativo. Ahora bien, si tenemos la ecuación:

$$|x-3|=5,$$

deberíamos considerar las dos posibilidades de signo. Es decir hay dos alternativas:

$$x-3=5 \quad \text{o} \quad x-3=-5$$

La primera es en el caso que *x* -3 sea positivo, la segunda en la situación que sea negativo.
Resolviendo las dos ecuación, tenemos que

$$x=8 \quad \text{o} \quad x=-2$$

Efectivamente estos valores de *x* satisfacen la ecuación: $|x-3|=5$.

Veamos más ejemplos de resolución de ecuaciones en valor absoluto.

Ejemplo 1.- Resolver $|x-4|=3$
Solución: Hay dos posibilidades

$$x-4=3 \quad \text{o} \quad x-4=-3.$$

Las soluciones de ellas son 7 y 1.
Efectivamente el lector puede comprobar que si sustituimos estos valores en la ecuación ellas satisfacen la igualdad.

Ejemplo 2.- Resolver $3\,|5-4x|=9$
Solución: Sabemos resolver una ecuación con valor absoluto cuando el valor absoluto está solo en el lado izquierda, así que lo llevamos a esta forma, dividiendo entre 3. De esta manera la ecuación dada es equivalente a:

$$|5-4x|=3$$

Ahora esta ecuación en valor absoluto es equivalente a

$$5-4x=3 \quad \text{ó} \quad 5-4x=-3$$

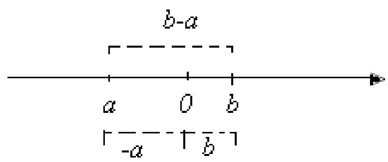
La solución de ellas son $\frac{1}{2}$ y 2.
Podemos representar el conjunto solución de nuestra ecuación $3|5-4x|=9$ a través de la notación de conjunto como: $\{\frac{1}{2},2\}$.

Recuerde que un valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, nunca negativo.

Ejemplo 3.- Resolver $|x-5|=-2$

Solución: Esta igualdad es imposible de cumplirse. Por tanto la solución es vacía**...**

$|a-b| = |b-a|$ representa la distancia entre *a* y *b.*

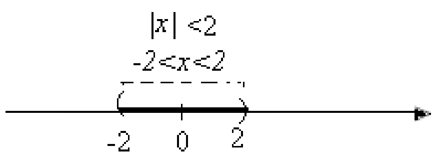


Ejemplo 4- Conseguir todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.
Solución: Sea *x* los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.
Entonces $|x-3|=4$. El lector puede chequear que las soluciones de está ecuación son -1 y 7.

DESIGUALDADES CON VALORES ABSOLUTOS

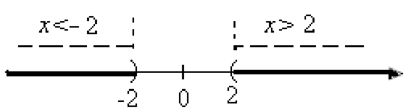
La expresión $|x|<2$ la podemos interpretar como los *x* cuya distancia al origen es menor que 2, estos *x* son todos los números que están entre -2 y 2. Así la desigualdad

$|x|<2$ es equivalente a $-2<x<2$



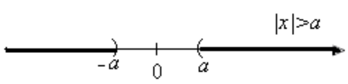
La expresión $|x|>2$ la podemos interpretar como los *x* cuya distancia al origen es mayor que 2, estos *x* son todos los números mayores que 2 y los menores que -2 . Así la desigualdad

$|x|>2$ es equivalente a $x<-2$ ó $x>2$



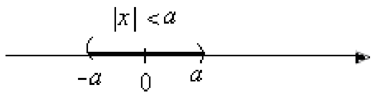
Generalizando, **si** *a>0,* entonces

1) $|x|>a$ si y sólo si $x<-a$ ó $x>a$.



Este tipo de conjunto se suele representar usando el símbolo unión ($\cup$) y se escribe como $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$, que significa todos los números que están en $(-\infty,-a)$ ó en (a,∞).

2) $|x|<a$ si y sólo si $-a<x<a$



Estas equivalencias entre desigualdades nos permitirán resolver desigualdades en valores absolutos al convertirlas en desigualdades sin valor absoluto. Una estrategia a utilizar será interpretar que *x* puede ser una expresión más complicada.

Ejemplo 1 Convertir las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto.

a) $|2x-1|>1$ **b)** $|2-5x|\leq 3$ **c)** $4-|1-x|\leq 1$

Solución:

a) Usamos la forma 1.

$|2x-1|>1$ es equivalente a $2x-1>1$ o $2x-1<-1$.

(Note que 2*x*-1 hace las veces de *x*)

b) Usamos la forma 2. Observe que un resultado similar a 2 se cumple en el caso de la desigualdad con $\leq$.

$|2-5x|\leq 3$ es equivalente a $-3\leq 2-5x\leq 3$.

c) Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$4-|1-x|\leq 1$ Como el 4 está sumando, pasa restando al otro lado

$-|1-x|\leq -3$ Multiplicamos por – ambos lados de la desigualdad, hay que recordar que la desigualdad cambia de sentido.

$|1-x|\geq 3$. Esta es la forma 2

Finalmente:

$|1-x|\geq 3$ es equivalente a $1-x\geq 3$ ó $1-x\leq -3$

$$-x \geq 3-1 \quad ó \quad -x \leq -3-1$$
$$-x \geq 2 \quad ó \quad -x \leq -4$$
$$x \leq -2 \quad ó \quad x \geq 4$$

A través de la notación el conjunto solución será $S_t = (-\infty, -2] \quad [4, +\infty)$

Ejercicio: Convertir la siguiente desigualdad en otra expresión equivalente sin valor absoluto.

$$2\,|\,x-2\,|-1 \leq 2$$

Solución: Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$$2\,|\,x-2\,| \leq 2+1$$
$$|x-2| \leq \frac{3}{2}$$

$|\,x-2\,| \leq \frac{3}{2}$, que es equivalente a

$$-\frac{3}{2} \leq x-2 \leq \frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2}+2 \leq x-2 \leq \frac{3}{2}+2$$
$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$$

A través de la notación el conjunto solución será $S_t = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$

Para resolver completamente una desigualdad con valor absoluto, primero deberemos expresarla de una manera equivalente pero sin valor absoluto, estas últimas serán las que resolveremos con las reglas vistas anteriormente.

Ejemplo 2.- Resolver **a)** $|\,2x-1\,| \leq 3$ **b)** $10-3\,|\,2x-3\,| < 4$

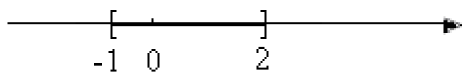
Solución

a) $|\,2x-1\,| \leq 3$ es equivalente a $-3 \leq 2x-1 \leq 3$, es decir tiene las mismas soluciones. Esta última es la que resolvemos:

$-3+1 \leq 2x \leq 3+1$ Primero restamos 1 a cada lado de la desigualdad.

$-\frac{2}{2} \leq x \leq \frac{4}{2}$ Dividimos entre 2 cada miembro de la desigualdad.

$-1 \leq x \leq 2$. Así la solución son todos los números contenidos en el intervalo cerrado [-1,2]



b) Primero, se busca escribir esta desigualdad con el valor absoluto despejado del lado izquierdo. En la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ primero pasamos el 10 restando al otro lado

$-3|2x-3|<-6$ Dividimos entre -3 ambos lados

$|2x-3|>2$

Esta desigualdad es de la forma 2. Por tanto es equivalente a

$$2x-3>2 \qquad \text{ó} \qquad 2x-3<-2$$

Este tipo de desigualdades dobles no pueden ser resueltas de la manera sintetizada como en el caso a). En el lado izquierdo resolvemos la primera y en el lado derecho resolvemos la segunda desigualdad, manteniendo el conectivo "o"

$2x-3>2$ ó $2x-3<-2$ Sumamos 3 a cada lado de la desigualdad

$2x>5$ ó $2x<1$ Dividimos entre 2 ambos miembros

$x>\frac{5}{2}$ ó $x<\frac{1}{2}$

Así las soluciones de la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ es el conjunto

$$(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},\infty)$$

Representados por

El siguiente ejemplo muestra algunas desigualdades en valor absoluto cuya soluciones son **triviales: R ó** $\varnothing$ o un punto.

Ejemplo 3.- Resolver **a)** $|x-1|\leq -3$ **b)** $1-|2x-3|<4$; **c)** $|x-3|\leq 0$
Solución:
a) En la primera desigualdad estamos comparando un valor absoluto, el cuál es positivo, con un número negativo. Obviamente esta relación no se cumple para ningún *x*. Así la solución es el conjunto $\varnothing$.

b) En este caso primero despejamos el valor absoluto en el lado izquierdo, dando $|2x-3|>-3$. Para cualquier valor de *x* tenemos que $|2x-3|\geq 0$, esto es por la propia definición de valor absoluto y por tanto mayor que -3. Así la solución de está desigualdad son todos los número reales **R**.

c) Como el valor absoluto siempre da una cantidad mayor o igual a 0, la única forma que se cumpla esta proposición es cuando $|x-3|=0$ y esto ocurre solo cuando $x=3$. Así que la única solución de esta desigualdad es el punto $x=3$

Comentario: Observe que el ejemplo 3a no es de la forma 2, pues *a* tiene que ser positivo. Por la misma razón, $|2x-3|>-3$ no es de la forma 1.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Daremos algunas propiedades útiles del valor absoluto:

1.- $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

2.- $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, con $b\neq 0$.

3.- $|x|=\sqrt{x^2}$.

4.- $|a-b|=|b-a|$

5.- $|x|\leq a$ si y sólo si $-a\leq x\leq a$ análogo a ($x\leq a$ y $x\geq -a$)

6.- $|x|\geq a$ si y sólo si $x\geq a$ ó $x\leq -a$

7.- $|x|=a$ si y sólo si $a\geq 0$ y $x=a$ ó x=-a

Ejemplo 4.-

a) La ecuación $\frac{|6-6x|}{3}=1$ es equivalente a las siguientes:

$\frac{|3(2-2x)|}{3}=1$ Se factoriza

$\frac{|3||2-2x|}{3}=1$ Propiedad de la multiplicación

$\frac{3|2-2x|}{3}=1$ Se simplifica

$|2x-2|=1$ Propiedad 4

b) La desigualdad $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| \leq 4$ es equivalente a las siguientes:

$$\frac{|1-2x|}{|3|} \leq 4 \qquad \text{Propiedad del cociente}$$

$$\frac{|1-2x|}{3} \leq 4 \qquad \text{Propiedad 4}$$

$$|2x-1| \leq 12$$

En ocasiones se utiliza el valor absoluto para expresar ciertas relaciones entre cantidades:

Ejemplo 5.- Escriba las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos

a.- *x* está a más de 3 unidades de -7: $|x-(-7)| > 3$

b.- *x* está al menos a 3 unidades de 5: $|x-5| \geq 3$

c.- *x* dista de 7 en menos de 3 unidades: $|x-7| < 3$

d.- El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, *x,* difiere de 12 en menos de 2 horas: $|x-12| < 2$