VIAJE POR 5 NÚMEROS MATEMÁTICOS

David Jou
La Vanguardia (Ciencia y Vida) 1995-1996

Mayo: El número pi (**π**)
Septiembre: El número e (***e***)
Noviembre: El número de oro (**Φ**)
Diciembre: El número i (***i***)
Enero: El número cero (**0**)

1. El número pi:
π = 3, 1415926535897932384626433832795028...

Nuestra percepción del mundo depende casi tanto de los números como de los sentidos. Cada ampliación del mundo de los números ha dilatado nuestra capacidad de ver el mundo, nuestra sensibilidad por los detalles sutiles de nuestro entorno. Por ello, el atractivo de los números no se agota en el cálculo, sino que se extiende hasta rozar la realidad física o el arrobamiento místico.

Trataremos en esta serie de artículos cinco números especialmente significativos: el número **π**, esencial en la geometría; el número **i**, nacido del álgebra; el número ***e***, producto del análisis; el número **0**, capital en la aritmética; y la razón áurea o divina proporción o número **Φ**, cargado, como pocos, de simbolismos mágicos y estéticos. Números excepcionales de orígenes extremadamente diversos, interpuestos entre nosotros y el mundo, que han ensanchado nuestra percepción, nuestra comprensión, nuestra racionalidad y nuestra sensibilidad.

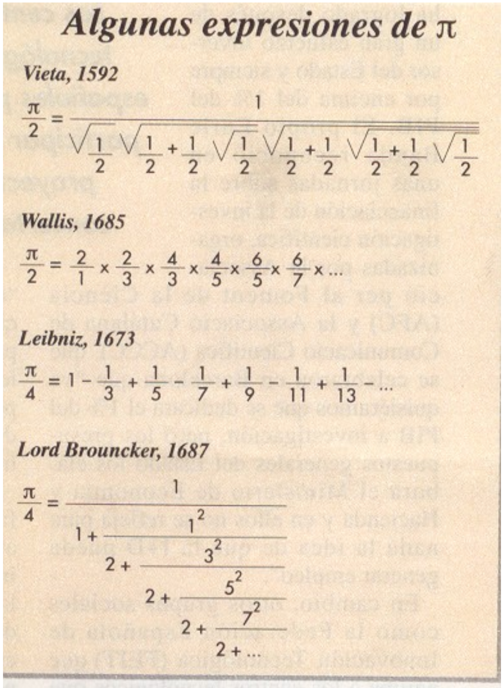
Todos ellos tienen una historia fascinante. Oscuras premoniciones, conciencia creciente de su importancia, cálculo cada vez más detallado de su valor, demostración de diversas propiedades, constatación de nuevas aplicaciones, nuevos problemas abiertos, atribución de cualidades místicas y propiedades mágicas, entre otros. ¡Qué profundidades insospechadas en los números que solemos recitar, a menudo, desde la rutina! Pretendemos hacer llegar al lector un poco de la aventura de estos números: personajes, lugares, fechas, tejen en la geografía y en la historia perspectivas inéditas. Quizás ello haga restallar en sus símbolos la luz y el aire de la aventura, junto al rigor de su significado matemático. Empezamos la serie con el primer número, llamado **pi**.

El número **π**, definido originalmente como el cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro, nos sugiere una variedad de ejercicios infantiles sobre círculos y esferas. $2\pi r$ y πr^2 son asociaciones casi automáticas en la mente de cualquier escolar. Pero, en muchas ocasiones, el número **π** parece agotarse en éstas y otras pocas fórmulas. Para los espíritus sensibles a la belleza de la simetría, **π** parece inagotable. Ya con Pitágoras y con Platón, **π** había poblado el cielo, las órbitas de los planetas y las estrellas. Conocer **π** suponía mucho más que un juego: era como penetrar, por un resquicio, en la esencia oculta del Universo. Por este motivo, los atractivos del número **π** superaban al de su cálculo, que era cada vez más detallado. Pero efectuar este cálculo era como ir desvelando un secreto esencial.

La cuestión del cálculo de **π** es, en efecto, un tema que ha captado largamente la atención de los matemáticos. Al principio, las evaluaciones de **π** son puramente empíricas. A partir de Arquímedes (siglo III a.C.) y hasta el siglo XVII, los métodos de cálculo se basan en sistemas geométricos, consistentes en acotar la longitud de la circunferencia mediante el perímetro de polígonos que la inscriben y circunscriben. Al usar polígonos de más lados, se hallan aproximaciones detalladas. Con Arquímedes, **π** salta de la geometría del plano a la del espacio, del círculo a la esfera, se convierte en emblema de perfección y simetría.

En el siglo XVII, los progresos en el análisis matemático conducen a otras aproximaciones, no de tipo geométrico, sino analítico, basadas en sumas, productos o fracciones continuas infinitas. Se tratará de hallar sumas, productos o fracciones que converjan lo más rápidamente posible hacia su valor exacto. Pero los retos del número **π** no se limitan a problemas de cálculo. Se trata, en primer lugar, de saber si **π** es un número racional, es decir, si puede expresarse como cociente de dos números enteros, lo que conduciría a que, tarde o temprano, se hallara un conjunto de decimales de **π** que se irían repitiendo periódicamente. No será hasta el año 1761 que podrá demostrarse que **π** es un número irracional, es decir, que sus decimales son una sorpresa inagotable. Otra cuestión relacionada con **π** se refiere a la posibilidad o imposibilidad de la cuadratura del círculo utilizando tan sólo la regla y el compás. Este problema fascinará a los matemáticos durante más de dos mil quinientos años, y hasta 1882 no se podrá concluir que dicha cuadratura es imposible, con la demostración de que **π** es un número trascendente, es decir, que no puede ser solución de ecuaciones algebraicas de coeficientes racionales. En el siglo XVIII, el número **π** hará una nueva aparición, no en geometría y análisis, sino en teoría de la probabilidad.

Un problema mucho más reciente consiste en saber si **π** es un número normal (en el sentido de Borel), es decir, si las propiedades estadísticas de las cifras que van apareciendo en sus decimales son las mismas para todas ellas (por ejemplo, si el 3 se repite con la misma frecuencia que el 5 o el 8, si la pareja 56, por ejemplo, se presenta con la misma frecuencia que la 98, y así sucesivamente). Estos problemas han estimulado la imaginación y han conducido a idear nuevos métodos matemáticos que después han sido útiles para problemas diferentes y mucho más amplios de aquél para el que fueron ideados. El estudio del número **π**, pues, supone un homenaje tanto a las posibilidades humanas de responder cuestiones como a imaginar, inagotablemente, preguntas y preguntas.



Algunas expresiones de π

Vieta, 1592

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

Wallis, 1685

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots$$

Leibniz, 1673

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Lord Brouncker, 1687

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

Para saber más: Bibliografía

A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffel, Une histoire des mathématiques: routes et dédales. París (Éditions du Seuil) 1986.

R. Taton (ed.), Historia general de las ciencias (Recopilación). Orbis 1986.

D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Londres (Penguin) 1987.

G. Ifrah, Histoire universelle des chiffres. París (Robert Laffont) 1994.

Algunos datos cronológicos del número más estudiado

XX a.C.: Babilonia. Se aproxima **π** como 25/8=3,125.

XVII a.C.: Egipto (Papiro Rhind). Se aproxima **π** como (16/9)2=3,160...

VI a.C.: Israel (Biblia, Libro de los Reyes, 7, 23). Se aproxima **π** como 3.

III a.C.: Siracusa. Arquímedes. Acota **π** entre 3 1/7 y 3 10/71 e indica el valor 211875/67441=3,14163 mediante cálculos efectuados con polígonos de 96 lados que inscriben y circunscriben la circunferencia. Esta será la base de casi todos los cálculos de **π** hasta el s.XVII. Además, Arquímedes obtiene las expresiones para el volumen de la esfera de radio **r** y del cono de radio de base **r** y de altura **h**, figuras que hace grabar como epitafio en su tumba.

II d.C.: Alejandría. Ptolomeo. Utiliza 377/120=3,1416 para el número **π**.

V d.C.: China. Tsu Chung Chi. Da para **π** la aproximación racional 355/113, satisfactoria hasta las diezmillonésimas, redescubierta más tarde por Adrian Metius.

XII d.C.: Toledo. Gerardo de Cremona. Publica la traducción latina del tratado *De mensura circuli,* de Arquímedes.

XV d.C.: Bagdad. Al-Kashish. Tras siglos de estancamiento, mejora los resultados de Tsu Chung Chi y llega hasta 16 cifras decimales satisfactorias.
1573: Alemania. V. Otho. Redescubre la fracción 355/113=±3,1415929.
1592: París. F. Vieta. Obtiene **π** con diez cifras decimales correctas. Propone una expresión que descubre ciertas regularidades, en una expresión de **π**/2 en función de un cociente en que intervienen raíces cuadradas de 1/2, deducida de una relación de recurrencia para la razón del área del cuadrado a la del círculo circunscrito (que vale 2/**π**). Primer algoritmo infinito para **π** que se conoce.
1596: Leyden. Ludolph von Ceulen. Dedica unos cuarenta años a obtener **π** con 35 cifras decimales, que figuran en su epitafio.
1654: Amsterdam. Huyghens. Publica el tratado *De circuli magnitudine inventa,* que culmina los métodos de Arquímedes.
1685: Londres. John Wallis. El desarrollo en el análisis matemático introduce métodos para el cálculo de **π**, basados en desarrollos, productos o sumas infinitos. Wallis es uno de los iniciadores y expresa **π**/2 como producto infinito.
1687: Londres. Lord Brouncker. Expresa **π**/4 como fracción continua.
1673: Leipzig. G. Leibniz. Expresa **π**/4 como suma infinita.
1699: Londres. A. Sharp. Calcula **π** con 71 decimales.
1706: Londres. J. Machin. Halla una expresión en forma de suma infinita, mejor que la de Leibniz. Obtiene en poco tiempo 100 decimales para el número **π**.
1748: Berlin. L. Euler. Contribuye a generalizar el uso de la letra griega **π** para designar el número en *lntroductio in analysyn infinitorum* (antes, se utilizó P o C) y demuestra la relación $\mathbf{e}^{i\pi}$=-1 (siendo **e** la base de los logaritmos neperinas e **i** la unidad imaginaria, números ambos a los que dedicaremos nuestra atención en otros artículos de esta serie).
1760: Berlín. J.R. Lambert. Demuestra que **π** es un número irracional, es decir, que puede ser expresado como cociente de dos números enteros. Propone la aproximación racional 103993/33102, mediante fracciones continuas.
1775: París. Academia de Ciencias. Ante la inflación de trabajos erróneos y delirantes sobre el problema de la cuadratura del círculo, la Academia de Ciencias rechaza más papeles sobre este tema.
1777: París. G.L. Buffon. Estudia el problema de la aguja: si se deja caer una aguja sobre un plano, a lo largo del cual se han trazado líneas paralelas separadas por una distancia igual a la longitud de la aguja, la probabilidad de que la aguja atraviese una de dichas líneas paralelas es 2/**π**. A partir de ello, **π**, eminentemente geométrico, hará su aparición en estadística.
1811: Gotinga (Alemania). F. Gauss. Relaciona el valor de **π** con la integral de $\mathbf{e}^{-x^2}$ desde 0 a infinito. Con ello, el número **π** hará a menudo aparición en estadística, en la denominada distribución normal o de Gauss.
1854: Berlín. P. Richter. Calcula **π** con 500 decimales.
1873: Londres. W. Shanks. Calcula **π** con 707 decimales. Pero un error en el decimal 525 origina que, a partir de éste, todos los demás estén equivocados. No se descubrirá hasta 60 años más tarde.
1882: Berlín. Lindemann. Demuestra que **π** es un número trascendente, es decir, que no puede ser solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Este resultado equivale a la demostración del antiquísimo problema de la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás.
1947: Estados Unidos. D.F. Ferguson y J. W. Wrench, jr. Inauguran los métodos mecánicos, con una calculadora mecánica, para la obtención del número **π** y obtienen 800 decimales.

1949: Estados Unidos. G. Reitwiesner. Primer cálculo del número **π** con ordenador (un Eniac, de válvulas de vacío). Obtiene 2037 decimales en tan sólo 70 horas.
1958: Estados Unidos. Se calculan 100000 dcimales de **π** con un ordenador de la casa IBM, el 704.
1967: París. Cálculo de 500000 decimales de **π** con una CDC 6600.
1983: Tokio. Y. Tamura y T. Kanada. Calculan hasta 16 millones de decimales mediante métodos basados en las medias aritmética y geométrica de numeros.
1994: En la actualidad, se conocen ya varios miles de millones de decimales del número **π**. Asimismo, se están estudiando las propiedades estadísticas de la aparición de dichos decimales, un trabajo que fue iniciado por el investigador A. Morgan, hacia el año 1875.

2. El número e:
e **= 2, 7182818284590452353602874713526624977...**

El número ***e*** aparece de forma natural en las actividades bancarias. Supongamos la situación hipotética en que un banco diera un interés del 100% anual. Cien pesetas se convertirían, al cabo de un año, en 200 pesetas. Supongamos ahora que, en vez de esperar a finales de año, fuéramos al banco al cabo de seis meses e incluyéramos en el capital el interés conseguido en aquellos seis meses (50 pesetas). Durante el segundo semestre, el capital sobre el que contarían los intereses sería de 150 pesetas, por lo que produciría durante el segundo semestre un interés de 75 pesetas. Al final del año, el capital inicial se hubiera convertido en 225 pesetas, en lugar de las 200 pesetas del caso en que la capitalización fuera anual. Si en lugar de capitalizar semestralmente lo hiciéramos cada trimestre, el capital final sería de 244 pesetas, es decir, el capital inicial se hubiera multiplicado por 2,44. La pregunta lógica es qué sucedería si efectuáramos la capitalización mes a mes, semana a semana, día a día, hora a hora, segundo a segundo. ¿Qué capital se conseguiría, si la capitalización fuera continua? Dicho límite sería el factor ***e***, según su definición más extendida. El capital inicial que era de 100 pesetas se hubiera transformado, pues, en 100***e*** = 271,828... pesetas.

Este ejemplo fácil tiene el inconveniente de resultar demasiado próximo a nuestras ambiciones cotidianas. De hecho, el número ***e*** aparece en muchas situaciones naturales: enfriamiento de los cuerpos, descarga de condensadores eléctricos, desintegración radiactiva, amortiguamiento de los péndulos, ritmo de crecimiento de las conchas de diversos moluscos, aumento de los precios a ritmo de inflación constante, disminución de las reservas de los combustibles si el incremento de su uso crece a ritmo constante, crecimiento de los aludes, estadística de distribución de notas en un curso o en la distribución de vidas en una población... El número ***e*** es uno de los que aparecen con mayor frecuencia en las leyes naturales y también en las actividades humanas.

El esfuerzo cotidiano

Comprender la ley exponencial es un objetivo importante de la educación: asimilarla, nos lleva mucho más allá de las matemáticas puras y se puede convertir en una lección, modesta pero eficaz, de responsabilidad, ya que nos lleva a apreciar el pequeño esfuerzo cotidiano, el poder enorme del crecimiento acumulativo. La ley exponencial tiene su manifestación estética culminante en la espiral logarítmica, en la que el radio crece como la exponencial del ángulo girado: es la elegancia de la concha del *Nautilus,* es el crecimiento igual a la propia función, la espiral admirable o *Pira Mirabilis,* que fascinó a Jacob Bernoulli, como el presentimiento de un renacer igual a sí mismo pero incrementado en todas las potencias de su identidad. Recientemente, la exponencial ha hecho de nuevo su aparición en la última revolución científica: el caos determinista. Se ha comprobado en muchos sistemas, físicos, biológicos, químicos, matemáticos, que las trayectorias correspondientes a la solución de las ecuaciones dinámicas son extremadamente sensibles, es decir, que dependen exponencialmente de las condiciones iniciales. Ello hace que determinismo y predictibilidad ya no sean sinónimos, y que las posibilidades predictivas de las ciencias estén considerablemente mermadas. Estos argumentos son los que focalizan nuestra atención en el número ***e***.

Los matemáticos buscarán su expresión en suma de infinitos términos, en fracción continua, su carácter irracional o trascendente, sus propiedades en la diferenciación y la integración. En el cuadro inferior figura una breve cronología de los descubrimientos sobre este número, que nació en la mente de los humanos hace apenas cuatro siglos, pero que ha poblado durante milenios explosiones de estrellas y enfriamientos de planetas.

Para saber más: Bibliografía

A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer, Une histoire des mathematiques: routes et dédales. París (Seuil) 1986.

R. Taton (ed.), Historia general de las ciencias (Recopilación). (Orbis) 1986.

D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Londres (Penguin) 1987.

E. Kasner y J. Newman, Matemáticas e imaginación. Barcelona (Salvat) 1987.

L. A. Santaló, La matemàtica: una filosofia i una tècnica. Vic (Eumo) 1993.

J. Argüelles Rodríguez, Historia de la matemática. Madrid (Akal) 1989.

Algunos datos cronológicos

1614: John Napier (Edimburgo). Conocido habitualmente como Neper, introduce el concepto de logaritmo en su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Su definición, aunque no utiliza explícitamente el número ***e***, es la que corresponde, si se utiliza dicho número como base de los logaritmos. En 1615, Briggs utilizará el número 10 como base de los logaritmos.

1665: Newton (Cambridge). Desarrolla e^x, y por lo tanto ***e***, en suma infinita de la inversa de factoriales. Ello le permite comprobar que la derivada de e^x es precisamente igual a e^x, es decir, que la exponencial e^x es la función cuyo ritmo de crecimiento es igual a sí misma.

1687: Newton (Cambridge). Primera edición de los *Principia Mathematica.* En el libro II, dedicado al movimiento de objetos en medios viscosos, aparece la exponencial decreciente como solución de la ecuación diferencial correspondiente al movimiento de un objeto sobre el que actúa una fuerza de frenado proporcional a su velocidad. A partir

del trabajo de Newton, la aparición del número ***e*** será habitual en física, desde el enfriamiento de los cuerpos (estudiado ya por Newton) hasta la ley de las desintegraciones radioactivas (descubiertas dos siglos más tarde).
1691: J. Bernoulli (Basilea). Dedica un estudio detallado a la espiral logarítmica, cuyo radio crece exponencialmente como el ángulo. Esta espiral se encuentra a menudo en la naturaleza (en la concha del *Nautilus,* por ejemplo) y en diversas obras de arte (Leonardo la utilizó en varias ocasiones).
1740: L. Euler (Berlín). Demuestra que cos x= (***e*** ix + ***e***-ix)/2, con lo cual la trigonometría deja de ser una rama independiente de las matemáticas, y pasa a ser una rama del análisis matemático.
1748: L. Euler (Berlín). Demuestra que ***e*** ix = cos x+(V-1) sin x. A partir de ello es necesario demostrar que ***e*** in=-1. Esta fórmula ha sido ya considerada por los expertos como una de las más brillantes, elegantes y misteriosas de las matemáticas de todos los tiempos. En ella confluyen aritmética (-1), álgebra (V-1), geometría (n) y análisis (***e***).
1748: L. Euler (Berlín). Inventa el símbolo ***e,*** calcula 23 cifras decimales del número ***e***, y da su desarrollo en fracción continua, así como el de su raíz cuadrada.
1761: J. H. Lambert (Berlín). Este autor, el primero en demostrar que *nn* es un número irracional, prueba también que ***e*** es un número irracional por un método diferencial del de Euler.
1811: Gaus (Gotinga). En sus trabajos sobre estadística estudia y populariza la llamada distribución normal de probabilidad, proporcional a ***e***-ax2. Por ello, tanto el número ***e,*** como el número *nn,* tendrán una presencia importante en estadística.
1873: Ch. Hermite (París). Demuestra que ***e*** es un número trascendente, es decir, que no es solución de ninguna ecuación algebraica de coeficientes racionales, a partir de los resultados anteriores de Liouville, quien, en el año 1844, demostró que era posible construir clases muy extensas de números trascendentes mediante fracciones continuas.

3. El número de oro (Φ)
Φ = 1, 6180339887498948482045868343656381...

Después de los reportajes dedicados a los números **π** y ***e***, presentamos un viaje por el número de oro. Algunos números, como el 3 o el 7, han acumulado significados religiosos y aparecen con gran frecuencia en teología o en las especulaciones cabalísticas. Es menos frecuente que los números que suscitan este tipo de interés (estético, mágico, religioso, místico) sean números y irracionales. De hecho, la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 irrumpió como un mazazo, según parece, en la escuela pitagórica, que había asignado un papel tan fundamental a las razones de números enteros en la música y en los movimientos de los astros. Pero la escuela pitagórica no tardó en aceptar con entusiasmo (quizás sin saber que era irracional) el "número de oro", o "razón áurea", o "proporción divina". Algo debe tener un número que se define por medio de estos nombres...

La definición de este número es suficientemente elocuente para cautivar nuestra atención. Se trata de dividir un segmento AC en dos partes, AB y BC, tales que la razón entre el fragmento total AC y su parte mayor AB sea igual a la razón entre la parte mayor AB y la parte menor BC. Se llama razón áurea al cociente AB/AC = BC/AB y se designa frecuentemente con la letra griega fi **Φ**. Esta constancia de proporciones a diversos niveles de la realidad podría constituir, de hecho, la base de una cosmología. Así, le basta al fragmento pequeño conocer su relación con el mayor, para poder conocer la relación con el todo. Este proceso de división sugiere de hecho una continuación indefinida, en ambas direcciones, hacia el infinito y hacia el infinitésimo. Precisamente, la estética de las curvas autosimilares (es decir, en que el aspecto de la curva es independiente del detalle con que se la contempla), se ha puesto recientemente de moda en las imágenes de las llamadas curvas fractales.

Los pitagóricos utilizaron como emblema una estrella de cinco puntas o pentagrama pístico, en que la razón áurea aparecía repetidamente. El rectángulo áureo (altura 1 y base $\mathbf{\Phi}$) o el triángulo áureo (triángulo isósceles de lado 1 y base $\mathbf{\Phi}$) han estado en la base de construcciones arquitectónicas emblemáticas. Entre las más importantes citaremos la Gran Pirámide de Gizeh o el Partenón de Atenas o, más modernamente, en muchos trabajos que se deben a Le Corbusier.

Para el matemático puede constituir un placer especial que el número de oro pueda expresarse como la fracción continua más simple, en que sólo aparece el 1, o que sea la solución de una ecuación algebraica de segundo orden. Resulta también atractivo que la razón áurea aparezca en un dominio tan diferente e inesperado como las series de Fibonacci, o, en general, como límite del cociente de los términos de cualquier sucesión en que un término sea igual a la suma de los dos anteriores sucesivos que aparecen, por ejemplo, en las piñas de los pinos, o en las espirales de los granos en los girasoles, o incluso en la espiral logarítmica de la concha del "Nautilus", o en la distribución de bifurcaciones en los árboles.

Pero el número de oro es mucho más que lo que hemos expuesto hasta aquí: no se agota en los pocos decimales con que puede aproximarlo el arquitecto; tampoco acaba en los primeros términos de la serie de Fibonacci. Muy al contrario, el número de oro sigue hasta el infinito, siempre diverso.

Para saber más: Bibliografía

R. Taton (ed.), Historia general de las ciencias (Recopilación). (Orbis) 1986.

D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Londres (Penguin) 1987.

H. E. Huntley, The divine proportion. (Dover) 1970.

Algunos datos cronológicos

XV a.C.: Egipto. Los egipcios ya daban a este número un significado sagrado. Esta razón aparece, por ejemplo, en el papiro Rhind, y en la Gran Pirámide de Gizeh la altura de una cara a la mitad del lado de una base es aproximadamente igual a la razón áurea.

VI a.C.: Pitágoras, Crotona, Magna Grecia (sur de Italia). La escuela pitagórica atribuía un significado místico a este número, que relacionaba con un pentagrama dibujado como una estrella de cinco vértices.

V a.C.: Partenón, Atenas. El cociente entre la altura (desde el vértice del friso hasta el pie de la base) y la anchura de la fachada del Partenón es aproximadamente igual a la razón áurea.

III a.C.: Euclides, Alejandría. Observa que esta razón se da en el pentágono regular, cuyas diagonales se cortan según esta razón. Como el pentágono forma las caras de uno

de los poliedros platónicos más complicados, el dodecaedro (12 pentágonos), el significado místico de este poliedro viene a añadirse a los ya atribuidos a este número. Se propone su desarrollo en fracción continua.
I a.C.: Vitrubio. En su tratado *De Architectura,* uno de los libros más influyentes en la historia de este arte a partir del Renacimiento, preconiza el uso de la razón áurea como patrón estético por excelencia.
820: Al-Kwarizmi, Bagdad. Publica el *Hisrab al Jabar wal Mukabala*, libro fundacional del álgebra, en que se escriben y resuelven varios tipos de ecuaciones algebraicas, en particular de segundo grado, de manera más general a como lo había hecho Diofanto, en Grecia. En esta notación, el número de oro es la solución positiva de la ecuación $x^2+x-1 = 0$. Dicha solución es (1 + V5)/2.
1202: Fibonacci (Leonardo de Pisa), Pisa. Publica su máxima obra *Liber Abaci*. Entre muchos otros problemas estudia un modelo matemático para la reproducción de los conejos, y propone su famosa serie en que cada término es la suma de los anteriores, siendo los dos primeros el 0 y el 1. Posteriormente se comprobará que la razón áurea aparece como el límite del cociente entre términos sucesivos de dicha serie.
1478: Anónimo, Treviso, Italia. El libro *Aritmética de Treviso*, dedica una parte al cálculo del número de oro.
1509: Luca Pacioli (1445-1514). Publica el tratado *De Divina Proportione,* con ilustraciones de sólidos platónicos debidas a su amigo Leonardo da Vinci. Algunos autores afirman que fue Leonardo el primero en denominar sección áurea a este cociente, denominado anteriormente razón sagrada o número sagrado. Pacioli presenta 13 propiedades extraordinarias de este número y las relaciona con el número de participantes en la Santa Cena.
1595: Kepler, Tubinga. Este autor basa sus primeras teorías sobre el cosmos, expuestas en *Mysterium Cosmographicum,* en los poliedros platónicos, que determinan, según él, las esferas en que se mueven los planetas. Para él, los dos máximos tesoros de la geometría universal son el teorema de Pitágoras y la razón áurea.
1830: E. Lucas, París. Generaliza la idea de Fibonacci para cualquier par de números iniciales (la sucesión de Fibonacci tiene como dos primeros términos 0 y 1, y la de Lucas, 1 y 3), y demuestra que el límite del cociente entre términos sucesivos de las sucesiones en que un término es la suma de los dos anteriores es igual a la razón áurea.
1840: J. Binet, París. Halla una fórmula para los términos de la sucesión de Fibonacci en función del número de oro.
1884: A. Zeiring, Berlín. Publica el tratado *Der Goldene Schnitt*, recopilación de todo lo conocido sobre el número de oro. Este trabajo estimula al psicólogo G. Techner a investigar sobre el atractivo estético especial del rectángulo de oro.
1950, Le Corbusier, Marsella. El arquitecto racionalista construye *La cité radieuse* calculando sistemáticamente sus proporciones según el número de oro.

4. El número i

***i* = V-1**

El producto de 1 por 1 vale 1; el producto de -1 por -1 también vale 1. Así, ni +1 ni -1 son raíces cuadradas de -1. En términos generales, ningún número positivo o negativo puede ser la raíz cuadrada de un número negativo. Por ello, la raíz cuadrada de los números negativos pareció, durante siglos, una imposibilidad radical. A principios del Renacimiento, en un florecimiento del álgebra en la Toscana (Italia), Cardano y Bombelli observan que algunas operaciones en las que intervienen raíces cuadradas de números negativos dan, tras aplicar rigurosamente las reglas de cálculo, números enteros perfectamente familiares. Siendo así, ¿cabe negar toda legitimidad a aquel tipo de números? Se empieza a abrir un resquicio de duda en lo que antes era convicción de imposibilidad. Empiezan los primeros tanteos, considerablemente titubeantes, en parte como un juego, en parte como un desafío.

Por un lado, trabajar con raíces cuadradas de números negativos como si fueran entidades posibles, aunque difíciles de imaginar, conduce de forma consistente a resultados matemáticamente atractivos. Aparecen, por ejemplo, relaciones insospechadas y elegantes entre las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales, relaciones que permiten demostrar de manera ágil y rápida resultados que antes eran muy difíciles de obtener. Por otro lado, se sigue desconfiando de la realidad de las raíces cuadradas de los números negativos o, para ser más breve, de la realidad de $\boldsymbol{i}$, el símbolo asignado por Euler a la raíz cuadrada de -1. Leibniz compara el tipo de realidad de $\boldsymbol{i}$, misteriosa pero fructífera, con la del Espíritu Santo. Euler, que con su inteligencia genial abre tantos caminos al uso de números imaginarios, es consciente de su utilidad como instrumento, pero duda de su realidad. Su ecuación $e^{i\pi} = -1$ es una de las fórmulas matemáticas que más comentarios cuasi místicos han originado.

Poco a poco, los números imaginarios se van imponiendo por su fertilidad. Las reticencias que suscitan seguirán siendo considerables durante años. Veamos un ejemplo. La generalización de los números imaginarios a números complejos, representados en un plano, fue propuesta nada menos que en cuatro ocasiones sucesivas sin que obtuviera éxito alguno, y solamente cuando recibe el respaldo de la gran autoridad que era Gauss empieza a ser ampliamente aceptada por todos.

Ya con los números complejos definidos en toda su generalidad, Cauchy y Riemann iniciarán el estudio de funciones de variable compleja, que se convertirá rápidamente en una de las ramas más elegantes del análisis matemático, con importantes aplicaciones en el campo de la física, en especial la electricidad, la física de fluidos, la física de partículas elementales.

Si los lectores que están viendo estas páginas han volado en avión, es muy posible, aunque lo ignoren, que algo deban a los números imaginarios de los que estamos tratando. La representación conforme y otros artilugios del análisis de variable compleja son instrumentos básicos en el estudio teórico del perfil de las alas diseñadas para los aviones. El juego que empezó en la floreciente Toscana de ampliar la realidad del mundo matemático facilitó, a la larga, la ampliación de nuestra realidad cotidiana.

Para saber más: Bibliografía

A. Dahan-Dalmedico y J. Peifet, Une histoire des mathématiques: routes et dédales. París (Editions du Seuil) 1986.

R. Taton, Historia general de las ciencias. (Editorial Orbis) 1986.

D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Londres (Penguin) 1987.

J. Argüelles Rodríguez, Historia de la matemática. Madrid (Ediciones Akal) 1989.

Algunos datos cronológicos

I d.C.: Herón, Alejandría. La primera expresión de la raíz cuadrada de un número negativo (81-144) se halla en *Stereometrica,* un tratado de Herón de Alejandría, quien, sin embargo, no la tomó en serio porque la creyó imposible.
1545: N. Cardano, Pisa. Propone, en su tratado *Ars Magna,* el siguiente problema: descomponer 10 en dos números cuyo producto sea 40. Las soluciones son 5+V-15 y 5-V-15, pero mira con desconfianza estas raíces de números negativos, reputándolas tan sutiles como inútiles.
1572: R. Bombelli, Bolonia. Introduce cantidades imaginarias y demuestra que:
$4 = (2+V\text{-}121)^{1/3} + (2\text{-}V\text{-}121)^{1/3}$
1629: A. Girard, París. Extiende el concepto de número a cantidades como raíz cuadrada de -1 para conseguir que las ecuaciones de grado *n* tengan *n* soluciones.
1637: R. Descartes, París. En el capítulo III de su *Géometrie*, califica de imaginarias las raíces cuadradas de números negativos.
1677: G. Leibniz, Alemania. Generaliza el resultado de Bombelli y demuestra que es real.
1685: J. Wallis, Londres. Propone interpretar las raíces imaginarias de las ecuaciones de segundo grado como puntos fuera de la recta, aunque sin especificar más detalles.
1714: R. Cotes, Londres. Demuestra que ***i***x = log(cosx +V-1 sen x). Este resultado será la base de importantes progresos de De Moivre y de Euler.
1738: A. de Moivre, Londres. Demuestra que la raíz n-sima de cos *a* + V-1 sen *a* admite *n* valores de la forma cos(*a*/*n*) + (V-1) sen (*a*/*n*).
1740: L. Euler, Berlín. Demuestra que cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) /2. Según él, con esta observación la trigonometría deja de ser una rama independiente de las matemáticas y pasa a convertirse en una rama del análisis. Pese a esto, sigue mirando con desconfianza el número ***i***, y lo ve más como una herramienta para efectuar descubrimientos que como algo que merezca atención por sí mismo.
1748: L. Euler, San Petersburgo, Rusia. Demuestra que e^{ix} = cos x + V-1 sen x. A partir de ello es inmediato demostrar que $e^{i\pi}$ = -1, una de las fórmulas de las matemáticas más célebres de todos los tiempos.
1777: L. Euler, Berlín. Introduce el símbolo ***i*** para la raíz cuadrada de -1.
1797: C. Wessel, Copenhague. Propone la idea de plano complejo. Su proposición pasa inadvertida.
1806: R. Argand, Ginebra. En su *Éssai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* vuelve a proponer, con independencia de Wessel, la idea de plano complejo y de módulo del número complejo. Su proposición recibe poca atención en los ambientes académicos.
1828: Warren, en Inglaterra, y Mourey, en Francia. Reinventan la idea del plano complejo, de nuevo sin éxito.
1831: F. Gauss, Gotinga, Alemania. En su tratado *Theoria Residuorum Biquadraticorum* propone el concepto de "número complejo" y su representación en un plano. A partir de entonces, estos conceptos se extenderán rápidamente en los diferentes ámbitos matemáticos de la época.
1835: W. R. Hamilton, Edimburgo. Escribe los complejos como pares de números ordenados y formula sus reglas de suma y de producto, con lo cual consigue evitar el empleo explícito del número ***i***.
1843: W. R. Hamilton, Edimburgo. Introduce los cuaterniones, que generalizan los números complejos en cuatro dimensiones, siendo representados por tétradas de números en vez de por pares de números.

1847: A. L. Cauchy, París. Comienza el análisis de las funciones de variable compleja. Fórmula de los residuos para la integral de una función a lo largo de un contorno cerrado en el plano complejo.
1851: B. Riemann, Gotinga. Publica una importante memoria, relacionada con las funciones de variable compleja, inspirada en puntos de vista diferentes de los que sostenía el frances Cauchy.
1872: W. K. Clifford, Edimburgo. Generaliza una idea original de Hamilton e introduce los números hipercomplejos, o bicuaterniones para el estudio de geometrías no euclidianas.
1890: C. P. Steinmetz, Estados Unidos. Realiza la primera aplicación de los números complejos a la física, en el estudio de corrientes alternas.

5. El número cero (0)

Los grandes creadores que fueron los griegos no consiguieron imaginar ni el vacío ni el cero. El atomismo de Demócrito fue, quizás, la única excepción a esta regla: aceptó el vacío, lo pobló con átomos infinitésimos y errantes, y desterró a los dioses de esta contrucción de materia eterna y formas efímeras. En cambio, los griegos sí aceptaron las fracciones, y tanto llegaron a dividir el espacio y el tiempo que toparon con las perplejidades de una flecha detenida en su movimiento o de una tortuga inalcanzable para Aquiles, el de pie ligero. Sin embargo, esta divisibilidad indefinida no les llevó a la nitidez y a la rotundidad del cero.

En cambio, a los matemáticos hindúes no les repugnó el cero, como tampoco rechazaron suponer que el mundo es, en definitiva, nada. Quizás, si no hubiera sido por este constraste entre una matemática sin cero y una matemática con cero, no nos parecería sorprendente ni genial, sino obvio, designar el vacío de los ábacos con un signo y otorgarle entidad matemática en pie de igualdad con las cifras de las realidades sensibles: un árbol, dos flores, tres piedras, cuatro estrellas...

El cero, que tiene nombre de viento (la palabra árabe *sifr* fue traducida al latín como *zephirum* y de aquí vienen cifra y cero), tiene la fascinación de las caravanas de mercaderes viajando a través de Persia y Mesopotamia. Los grandes algebristas de Bagdad, buenos conocedores de la tradición india, e indios algunos de ellos, lo adaptaron de forma natural. Y, tarde o temprano, algo tan revolucionariamente útil como el cero tenía que llegar hasta Occidente. En uno de los pocos episodios internacionales de su tradición científica, Cataluña jugó un papel nada desdeñable en la transmisión del cero a la cultura occidental. En Ripoll, un monje joven de origen francés, fascinado por las Matemáticas y la Astronomía, aprendió de textos árabes la numeración decimal y el cero. Si Gerbert d'Aurillac no hubiera llegado después al Papado (como Silvestre II) esta anécdota sería irrelevante. Pero el monje, en su carrera eclesiástica, no olvidó del todo las Matemáticas y abogó, desde su poder, por el uso del cero. Sin embargo, pasaron aún dos siglos hasta que Leonardo de Pisa, llamado también Fibonacci, hijo de un mercader establecido durante un tiempo en Bugía, propagara en su *Liber Abaci* (1202) el uso del sistema decimal, con más repercusión que Gerbert y ya de forma irreversible.

Aceptado el cero, ¿queda, algo más que decir? Profundizar en las sutilezas del ser y el no ser, en la presencia eficaz de este símbolo de la ausencia, sería una posibilidad, más bien filosófica y muy atractiva. Nosotros hemos optado por no dar del todo por cerrada una aventura, la del cero, que comenzó en el siglo XII. Podemos hablar también de la numeración binaria, reducida a 0 y 1, en la cual, el cero pasa a ser el protagonista de nada menos que la mitad de la numeración, en lugar de tener una presencia reducida a la décima parte de las cifras.

Finalmente, hemos llegado a un nivel algo más abstracto, en que el concepto de cero queda generalizado, con propiedades sorprendentes, en las teorías de anillos de congruencias. La imaginación de los matemáticos suele ser, hablando en general, incansablemente fértil, y la naturaleza, por su lado, no ha dejado, hasta el momento, de responder al diálogo que el matemático ha iniciado con ella a través de sus símbolos y sus conceptos.

Para saber más: Bibliografía

R. Taton, Historia general de las ciencias. (Ed. Orbis) 1986.

D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Londres (Penguin) 1987.

G. Ifrah, Histoire universelle des chiffres. París (R. Laffont) 1994.

The Mathematical Traveler. Exploring the Grand History of Numbers. Nueva York (D.C. Clawson) 1994.

M. Serres, Historia de las ciencias. Barcelona (Cátedra) 1991.

Algunos datos cronológicos

VI: Aryabhata, India. Aparece el cero como numeral en un tratado de este autor, el *Aryabhamatiya*, en que recopila resultados anteriores de la tradición matemática hindú, en que aparece ya el cero.

628: Brahmagupta, Bagdad. En la corte de Al-Mansur en Bagdad, un matemático indio, Brahmagupta, publica el *Brahmasphuta Sidhanta*, un tratado sobre Aritmética y Astronomía, en que aparecen nueve cifras y el cero. También aparecen los números negativos y sus reglas de manipulación.

629: Bhaskara, India: Este matemático publica su *Comentario del Aryabhamatiya*, en que se pone de manifiesto un uso perfectamente ágil y correcto del cero y de la numeración decimal.

875: Templo de Vaillabhattasvamin, consagrado a Vishnú, cerca de Gwalor, India (a 300 km de Delhi). Aparece el cero en lápidas de piedra que consagran un terreno cedido al templo.

820: Al-Kwarizmi, Bagdad. Publica el *Al Jabr wa'l Mukabala*, texto fundacional del álgebra, en el que sistemáticamente recoge el sistema numeral indio.

990: Gerbert d'Aurillac, Ripoll. El monje Gerbert d'Aurillac (Silvestre II, el Papa del año 1000), el único pontífice matemático de la historia, pasa algunos años de su educación en Vic y en Ripoll. Allí conoce las matemáticas árabes y es el introductor del cero en Europa, aunque su uso no se extendió hasta dos siglos más tarde. 1145: Roberto de Chester, Segovia. Publica la traducción latina del Álgebra (*Al Jabr*) de Al-Kwarizmi.

1150: Bhaskarakaria,India. En su tratado *Siddhantasironami*, este autor, uno de los

más geniales matemáticos (es bien conocida una de sus elegantes demostraciones del teorema de Pitágoras), introduce la idea de que la unidad dividida por cero es igual a infinito. A menudo se denomina a este autor simplemente Bhaskara (no debe confundirse con el autor de este nombre del s.VII).
1202: Fibonacci, Pisa. Leonardo de Pisa, uno de los primeros grandes matemáticos europeos, conocido también como Fibonacci, reúne en su *Liber Abaci* su saber matemático acumulado en numerosos viajes por el norte de África, en los que llegó a la conclusión de que el sistema árabe de numeración era superior a la numeración romana. Este tratado, cuyo primer capítulo esta dedicado a exponer la numeración india, y con muchas aplicaciones a problemas de comercio empezará a popularizar el uso del cero en toda Europa.
1478: Anónimo, Treviso (Italia). El manual de *Aritmética de Treviso* testimonia la amplitud de la difusión de la numeración árabe en Europa.
1484: N. Chuquet, Lyon. Introduce en Europa occidental el uso de los números negativos.
1656: J. Wallis, Londres. Extiende la notación exponencial introducida por Descartes para exponentes positivos, a exponentes negativos, fraccionarios y al cero.
1679: G. Leibniz, Leipzig. Publica el breve tratado *De progressio dyadica*, en que propone la utilización de la numeración de base 2, en que todos los números se expresan en términos de 0 y de 1. Antecedentes de la numeración binaria pueden hallarse ya algunos años antes en las obras de Blaise Pascal (1654) y de J. Caramuel (1670).
1696: G. de L'Hopital, París. En su *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* establece una regla que permite calcular límites de funciones en el caso de indeterminaciones del tipo 0/0.
1701: T. Fantet, París. Con independencia de Leibniz, este matemático francés propone la numeración en base binaria y expone sus ventajas prácticas, al margen de las consideraciones filosóficas, religiosas y metafísicas de Leibniz.
1703: G. Leibniz, Leipzig. La publicación de sus *Explicaciones sobre la aritmética binaria* en el boletín de la Académie Royale des Sciences pone de moda este tema entre los intelectuales europeos.
1801: F. Gaus, Gotinga. En sus *Disquisitiones arithmeticae* establece la noción de congruencia (dos números ***b*** y ***c*** se llaman congruos según ***a*** si la diferencia de ***b*** y ***c*** es divisible por ***a***). Ello permite introducir la noción de divisores de cero. Se dice que dos números ***b*** y ***c*** son divisores de cero si, siendo tanto ***b*** como ***c*** diferentes de cero, su producto es cero. Por ejemplo, 2 y 3 son divisores de cero módulo 6, ya que 2x3 = 6, y 6 es congruo con 0 módulo 6.
1910: Steintz, Kiel. Sistematiza las teorías de anillos y de cuerpos, de finales del siglo anterior en estudios de teoría de números y de geometría algebraica. El cero desempeña determinado papel en la clasificación de anillos, llamando anillos de integridad a los que no tienen divisores de cero, según la definición expuesta. En estas estructuras abstractas. el elemento que generaliza al cero (elemento neutro para la suma) puede tener propiedades curiosas, que no tiene el cero, en los números enteros, racionales o reales.