Valor Absoluto - Desigualdades No lineales

David J. Coronado[1]

[1]Departamento de Formación General y Ciencias Básicas
Universidad Simón Bolívar

Matemáticas I

Contenido

Contenido

Contenido

Valor Absoluto

El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, denotado por $|x|$ se define como

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto es una distancia no dirigida. En particular, *la distancia de x al origen.*
De manera análoga, la expresión $|x - a|$ es la distancia desde x hasta a.

Valor Absoluto

Teorema

Propiedades

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *Desigualdad Triangular.*
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Otras propiedades son:

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$$
$$|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x > a \text{ ó } x < -a$$

Contenido

Valor Absoluto

Ejemplo

Resolver

$$|x - 2| < 2$$

Solución:

$$-2 < x - 2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

$$\Rightarrow S : (0, 4)$$

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x - 5| \geq 1$.

Solución:

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x - 5| \geq 1$.

Solución:

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x - 5| \geq 1$.

Solución:

$$|3x - 5| \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 3x - 5 \quad \text{ó} \quad 3x - 5 \geq 1$$

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x-5| \geq 1$.

Solución:

$$|3x-5| \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 3x-5 \quad \text{ó} \quad 3x-5 \geq 1$$

$$\begin{aligned} 4 = 5-1 &\geq 3x \\ \frac{4}{3} &\geq x \end{aligned}$$

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x-5| \geq 1$.

Solución:

$$|3x-5| \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 3x-5 \quad \text{ó} \quad 3x-5 \geq 1$$

$$\begin{array}{rcl} 4 = 5-1 & \geq & 3x \\ \frac{4}{3} & \geq & x \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{rcl} 3x & \geq & 5+1=6 \\ x & \geq & \frac{6}{3}=2 \end{array}$$

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver $|3x-5| \geq 1.$

Solución:

$$|3x-5| \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 3x-5 \quad \text{ó} \quad 3x-5 \geq 1$$

$$\begin{array}{rcl} 4 = 5-1 & \geq & 3x \\ \frac{4}{3} & \geq & x \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{rcl} 3x & \geq & 5+1=6 \\ x & \geq & \frac{6}{3}=2 \end{array}$$

$$\text{Así} \Rightarrow S : \left(-\infty, \tfrac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$$

Valor Absoluto

Recordemos que $\sqrt{a}$ es la raíz cuadrada no negativa de a.

Decir $\sqrt{16} = \pm 4$ es incorrecto. Lo correcto es decir $\pm\sqrt{16}$.

Así

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{y} \quad |x|^2 = x^2.$$

Esto nos permite afirmar que

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Valor Absoluto

Recordemos que $\sqrt{a}$ es la raíz cuadrada no negativa de a.
Decir $\sqrt{16} = \pm 4$ es incorrecto. Lo correcto es decir $\pm\sqrt{16}$.
Así

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{y} \quad |x|^2 = x^2.$$

Esto nos permite afirmar que

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Valor Absoluto

Recordemos que $\sqrt{a}$ es la raíz cuadrada no negativa de a.
Decir $\sqrt{16} = \pm 4$ es incorrecto. Lo correcto es decir $\pm\sqrt{16}$.
Así

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ y } |x|^2 = x^2.$$

Esto nos permite afirmar que

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Valor Absoluto

Ejercicios

Resolver

1. $|3x+1| < 2|x-6|$
2. $\left|2+\dfrac{5}{x}\right| > 1$
3. $|2x+3| \leq 1$
4. $|2x+4| - |x-1| \leq 4$

Valor Absoluto

Ejercicios

Soluciones

1. $|3x+1| < 2|x-6|$ $\qquad S : (-13, \frac{11}{5})$
2. $\left|2+\dfrac{5}{x}\right| > 1$ $\qquad S : (-\infty, -5) \cup (-\frac{5}{3}, 0) \cup (0, \infty)$
3. $|2x+3| \leq 1$ $\qquad S : [-2, -1]$
4. $|2x+4| - |x-1| \leq 4$ $\qquad S : [-9, \frac{1}{3}]$

Desigualdades no lineales

Para resolver las desigualdades no lineales estudiaremos algunos tipos de desigualdades:

1. Desigualdades cuadráticas y de orden superior
2. Desigualdades racionales

Contenido

Desigualdades no lineales

El primer tipo de desigualdad no lineal que estudiaremos corresponde a desigualdades donde aparecen polinomios de grado dos (desigualdades cuadráticas) y polinomios de grado $\geq$ que dos (desigualdades de orden superior).
En ambos casos, siempre debemos *factorizar* los polinomios y estudiar los signos en cada intervalo. Veamoslo con ejemplos.

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Primer paso: *Pasamos* todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad

$$x^2 > 2x \Rightarrow x^2 - 2x > 0$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Primer paso: *Pasamos* todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad

$$x^2 > 2x \Rightarrow x^2 - 2x > 0$$

Segundo paso: Factorizamos

$$x^2 > 2x \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:
Tercer paso: Buscamos los intervalos de cambio de signo. Estos se construyen con las raíces del polinomio:

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Los intervalos son $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, \infty)$
Escogemos un testigo (número) de cada intervalo:
$-1 \in (-\infty, 0),\ 1 \in (0, 2)$ y $3 \in (2, \infty)$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Cuarto paso: Hacemos una tabla:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
	-1	1	3
x			
$x-2$			
$x(x-2)$			

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Cuarto paso: evaluamos cada testigo en la expresión de la primera columna. El signo que dá el resultado, lo colocamos en la casilla correspondiente

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
	-1	1	3
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)$			

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:

Cuarto paso: para la última fila, multiplicamos todos los signos de cada columna:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
	-1	1	3
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 > 2x$

Solución:
Analizamos los resultados:

- En los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ se tiene que $x^2 - 2x > 0$
- En el intervalo $(0, 2)$ se cumple $x^2 - 2x < 0$

Por lo que la solución es

$$\text{Sol: } \boxed{(-\infty, 0) \cup (2, \infty)}$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2 - 1)(2x + 4) < 0$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2 - 1)(2x + 4) < 0$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2-1)(2x+4)<0$

Solución:
Primer paso: Factorizamos (ya todos los términos estaban del lado izaquierdo):

$$(x^2-1)(2x+4)<0 \Rightarrow \ (x-1)(x+1)(2x+4)<0$$

Segundo paso: Buscamos las raíces

$$(x-1)(x+1)(2x+4)=0 \Rightarrow \ x_1=1, \ x_2=-1, \ x_3=-2$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2-1)(2x+4)<0$

Solución:
Segundo paso: Buscamos las raíces

$$(x-1)(x+1)(2x+4)=0 \Rightarrow \ x_1=1, \ x_2=-1, \ x_3=-2$$

Tercer paso: Construímos los intervalos

$$(-\infty,-2), \ (-2,-1), \ (-1,1), \ (1,\infty)$$

Con testigos:
$-3 \in (-\infty,-2), \ -1,5 \in (-2,-1), \ 0 \in (-1,1), \ 2 \in (1,\infty)$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2 - 1)(2x + 4) < 0$

Solución:
Cuarto paso: Hacemos una tabla:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
	-3	$-1,5$	0	2
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)(x + 1)(2x + 4)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x^2 - 1)(2x + 4) < 0$

Solución:
Como la pregunta es ¿cuándo el polinomio es negativo? la solución es

$$\text{Sol: } \boxed{(-\infty, -2) \cup (-2, -1)}$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x-1)(2-x) \geq 1$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x-1)(2-x) \geq 1$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x-1)(2-x) \geq 1$

Solución:

Paso 1: $(x-1)(2-x) \geq 1 \Rightarrow (x-1)(2-x) - 1 \geq 0$

Paso 2: Resolvemos para factorizar

$$\begin{aligned} (x-1)(2-x) - 1 &\geq 0 \\ 2x - x^2 - 2 + x - 1 &\geq 0 \Rightarrow -x^2 + 3x - 3 \geq 0 \end{aligned}$$

Al aplicar la resolvente, notamos que no tiene raíces: no se puede factorizar.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 9 - 4(-1)(-3) \\ &= 9 - 12 = -3 < 0 \end{aligned}$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver la desigualdad $(x-1)(2-x) \geq 1$

Solución:
En estos casos, existe un sólo intervalo: $(-\infty, \infty)$. Cualquier valor servirá de testigo, tomemos $x = 0$.
Al evaluar (no hacemos tabla ya que tendría una sola columna):

$$-x^2 + 3x - 3 \Rightarrow -0^2 + 3 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$$

Por lo tanto, la expresión $-x^2 + 3x - 3$ siempre es negativa, lo cual implica solución vacía

$$\text{Sol: } \boxed{\emptyset}$$

Contenido

Desigualdades no lineales

En los casos en que aparezca una fracción, procedemos de manera similar, recuerda que no puedes pasar multiplicando ni dividiendo ninguna expresión donde aparezca la variable ya que no conoces el valor de x ni si el resultado es positivo o negativa (no sabes si la desigualdad cambia o no).
Veamos los ejemplos

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:

Paso 1: Todo a la izquierda

$$\frac{2x+1}{1-x} \leq \frac{x+3}{1-x} \Rightarrow \frac{2x+1}{1-x} - \frac{x+3}{1-x} \leq 0$$

Paso 2: Simplificamos y factorizamos numerador y denominador:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{1-x} - \frac{x+3}{1-x} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2x+1-(x+3)}{1-x} \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x-2}{1-x} \leq 0 \end{aligned}$$

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:
Paso 3: Ya factorizado, buscamos las raíces tanto del numerador y denominador, estos valores determinaran los intervalos:

$$\frac{x-2}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \;\; x_1 = 2, \;\; x_2 = 1$$

Intervalos

$$(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$$

Hacemos la tabla

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:

Cuarto paso: La tabla:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$1-x$	$+$	$-$	$-$
$x(x-2)$	$-$	$+$	$-$

Como la respuesta no depende de los testigos escogidos, podemos omitir la fila correspondiente.

Desigualdades no lineales

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+3}{1-x}$

Solución:
Por lo tanto la solución es

$$\text{Sol:}(1,2] \cup [2,\infty) = \boxed{(1,\infty)}$$

Nota: En 2 el intervalo va cerrado por ser la desigualdad $\leq$. Pero en el 1 va abierto por ser la raíz del denominador (siempre va abierto).

Desigualdades no lineales

En general, no hace falta escribir los pasos, pero es importante seguirlos

- Pasar todo a la izquierda.
- Factoriazar (el polinomio o el numerador y el denominador). Buscar raíces y definir intervalos.
- Realizar la tabla.
- Escribir la conclusión.

Desigualdades no lineales

Ejercicios

Resolver

1. $$\frac{x}{x+2} < 0$$
2. $$\frac{2x+1}{1-x} \leq \frac{x+2}{1-x}$$
3. $$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$$
4. $$\left|\frac{x-1}{2-x}\right| \geq 1$$
5. $$\frac{(x^2-1)(2x+4)}{x(3-x)} > 0$$

Desigualdades no lineales

Ejercicios

Soluciones

1. $\dfrac{x}{x+2} < 0$ $\qquad S : (-2, 0)$
2. $\dfrac{2x+1}{1-x} \leq \dfrac{x+2}{1-x}$ $\qquad S : \mathbb{R} \setminus \{1\}$
3. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$ $\qquad S : (1, 2) \cup (3, \infty)$
4. $\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right| \geq 1$ $\qquad S : \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, \infty)$
5. $\dfrac{(x^2-1)(2x+4)}{x(3-x)} > 0$ $\qquad S : (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$

Desigualdades no lineales

Saludos.
Si no logras resolver correctamente los problemas planteados, no dudes en notificarlo en el foro de la unidad.
Estaremos pendientes.