Dos demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras

Vicente Meavilla Seguí

Resumen

En este artículo se presentan dos demostraciones de carácter dinámico-manipulativo mediante las cuales el alumno, orientado por el profesor, puede *descubrir* el teorema de Pitágoras.

La primera demostración ha sido extraída del texto «An introduction to the History of Mathematics» del autor H. Eves, la segunda se debe al matemático árabe Thabit Ibn Qurra, del siglo IX.

1. Un poco de historia

Egipto

Es posible que los antiguos geómetras egipcios (harpedonaptae) construyensen triángulos rectángulos, extendiendo alrededor de tres estacas una cuerda dividida en tres partes, de longitudes respectivas $3k$, $4k$ y $5k$. Si esta suposición fuese cierta, resultaría que los pobladores del Valle del Nilo estuvieron familiarizados —unos 2.000 años a. de C.— con el famoso teorema del triángulo rectángulo, al menos en el caso particular ($3k$, $4k$, $5k$):

El historiador G. J. Allman («Greek Geometry from Thales to Euclid», págs. 29 y 30) se aventura más y opina que los egipcios pudieron ser capaces de demostrar el «teorema de Pitágoras» para el triángulo rectángulo isósceles. Esta hipótesis no resulta improbable, dado que la simple contemplación de un suelo cubierto con baldosas cuadradas congruentes conduce —de forma inmediata— a la conclusión de que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo isósceles es equivalente a los cuadrados construidos sobre sus catetos (ver figura 1).

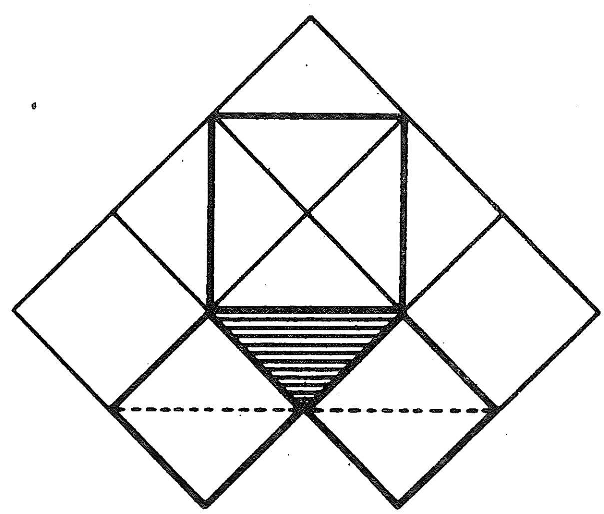


Figura 1

Babilonia

En una pequeña tablilla cuneiforme se representa la figura de un cuadrado con sus dos digonales. Sobre un lado del cuadrado está escrito el número 30 y sobre las diagonales aparecen los números 1.24.51.10 y 42.25.35, expresados en el sistema de numeración sexagesimal babilonio (véase O. Neugebauer: *The Exact Sciences in Antiquity*, págs. 35 y 36).

El significado de estos tres números resulta claro teniendo en cuenta que 1.24.51.10 (= 1,4142129) es una muy buena aproximación de $\sqrt{2}$ y que 42.25.35 (= 42,426388) es aproximadamente igual al resultado que se obtiene al multiplicar 30 por 1.24.51.10.

Por tanto, unos mil años antes del nacimiento de Pitágoras, los matemáticos babilonios eran capaces de calcular la diagonal de un cuadrado en función de su lado. Dicho en otras palabras: los babilonios conocieron el «teorema de los tres cuadrados» muchos siglos antes de que su «pretendido» descubridor viniese al mundo.

India

Además de las civilizaciones egipcia y babilónica, los hindúes también estuvieron al corriente del teorema de Pitágoras.

En efecto, los Sulvasutras o «manuales de la cuerda» (textos en los que se detallan las reglas para la construcción de altares de forma y dimensiones dadas) probablemente fueron escritos entre los años 500 y 200 a. de C. y contienen información matemática que podría remontarse al año 1000 a. de C. Pues bien, en dichos manuales aparecen algunos pasajes que hacen referencia al teorema de Pitágoras y a los «triples pitagóricos» (ternas de números naturales que satisfacen a la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$).

Así, en el Sulvasutra atribuido a Baudhayana, matemático del que desconocemos cualquier dato biográfico, pueden leerse los dos fragmentos siguientes: «La diagonal de un oblongo produce, por construcción de un cuadrado sobre ella, lo que producen por separado la longitud y la anchura».

«Esto se observa en los oblongos cuyos lados son 3 y 4,12 y 5,15 y 8,7 y 24,12 y 35,15 y 36».

La conclusión que puede obstenerse de estos textos es clara: los hindúes posiblemente trabajaron con el teorema de Pitágoras desde el año 1000 a. de C.

A partir de lo expuesto hasta aquí podría decirse, a modo de resumen, que:

a) Los matemáticos de las civilizaciones más antiguas estuvieron familiarizados con el «teorema de los tres cuadrados».

b) Pitágoras no fue ciertamente el descubridor del teorema que lleva su nombre.

¿Cuál fue, pues, la contribución del sabio de Samos a dicho teorema?

Quizá, su demostración.

2. El teorema de Pitágoras en la enseñanza matemática elemental

En el apartado anterior hemos puesto de manifiesto que el teorema de Pitágoras formó parte del bagaje cultural de las civilizaciones más antiguas, en una época en la que la matemática comenzaba a dar sus primeros y vacilantes pasos.

Por tanto, parece apropiado que el famoso «teorema de los tres cuadrados» esté incluido en los programas de la enseñanza matemática de los niveles elementales, en los cuales el alumno —como las antiguas civilizaciones— empieza a caminar por el mundo de la matemática.

Puestas así las cosas, sería deseable que cualquier alumno, una vez concluida su andadura por la EGB, conociera el mensaje geométrico que se encierra en el teorema de Pitágoras. Si además de esto, hubiese sido capaz de *descubrir* alguna de sus numerosas y bellas demostraciones, mucho mejor.

Desgraciadamente, la situación en la que se encuentran los alumnos al finalizar sus estudios de Educación General Básica e incluso al llegar a COU no es ésta. Son capaces de aplicar el teorema pero desconocen su significado.

A las pruebas me remito.

De entre las variopintas respuestas a la pregunta: «Enuncia el teorema de Pitágoras», propuesta a distintos grupos de alumnos de 1.º de BUP al comienzo de cada curso académico, las que se dan con mayor frecuencia absoluta son las siguientes:

1. $a^2 = b^2 + c^2$.
2. $b^2 = c^2 + c^2$.
3. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hagamos un brevísimo análisis.

La respuesta 1 es simplemente una igualdad algebraica cuya desconexión con el significado geométrico del teorema de Pitágoras es evidente.

La respuesta 2 es una particularización de la anterior (los dos sumandos del segundo miembro de la igualdad coinciden).

La respuesta 3, quizá la más cercana a la correcta, deja de lado la consideración de las áreas de los cuadrados construidos sobre los tres elementos rectilíneos del triángulo rectángulo.

3. Hacia un cambio metodológico

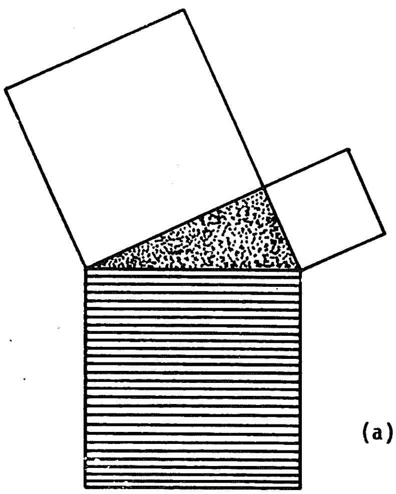
Los errores detectados en la sección precedente, junto con otros muchos que están en el ánimo de todos los enseñantes, aconsejan un cambio de rumbo en la metodología de la enseñanza matemática. Cambio que, sin duda alguna, debe conducir a que el profesor no sea mero transmisor de conocimientos, sino *orientador* de sus alumnos.

En esta línea presentamos dos actividades, rescatadas de algunos textos de Historia de la Matemática y «puestos al día», mediante los cuales el alumno, convenientemente dirigido por su profesor, puede llegar a *descubrir* el teorema de Pitágoras.

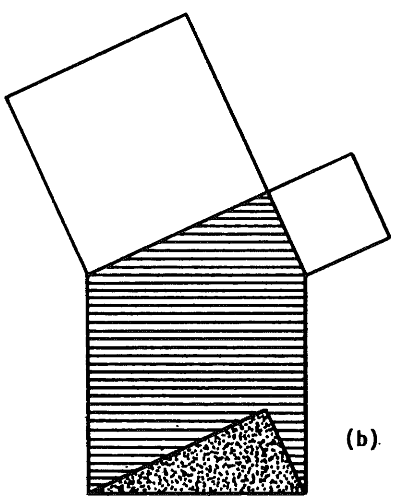
En ambas experiencias (la primera de autor desconocido y la segunda debida al matemático árabe del siglo IX, Thabit Ibn Qurra) solamente ofrecemos una sucesión de figuras en las que determinados «elementos» cambian de forma, se dividen, se desplazan y dan lugar a nuevas configuraciones.

Se trata, pues, de una especie de dibujos animados (muy rudimentarios, por cierto) cuyo estudio e interpretación deben conducir —éste es nuestro deseo— a que el alumno descubra uno de los teoremas geométricos más famosos de la Historia de la Matemática.

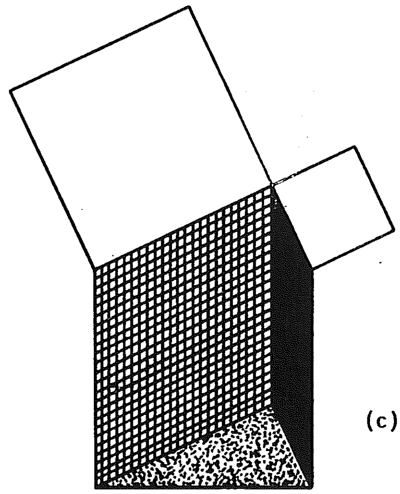
Actividad 1



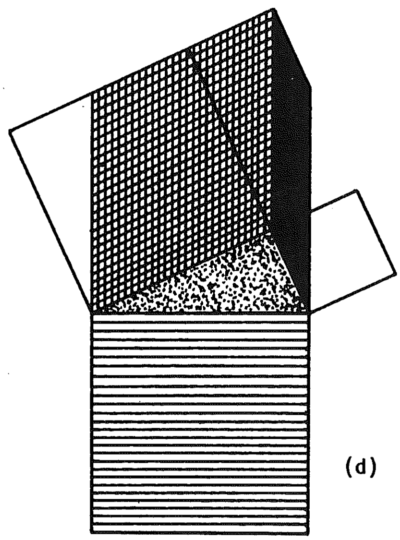
(a)



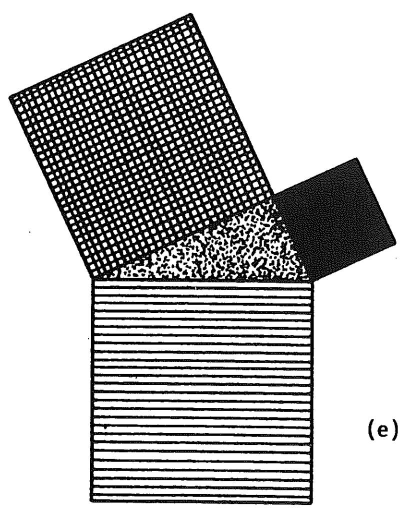
(b)



(c)

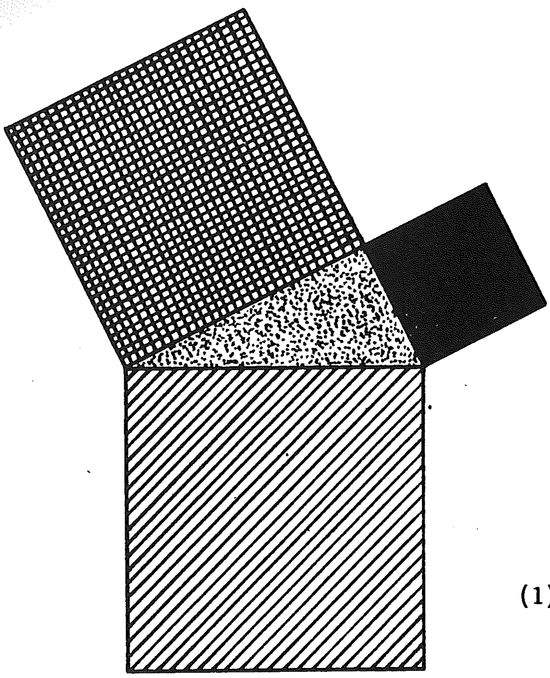


(d)

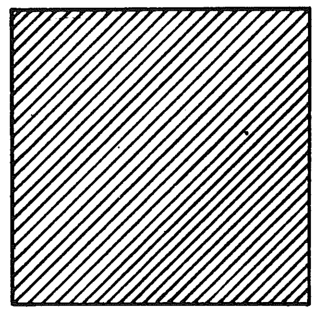


(e)

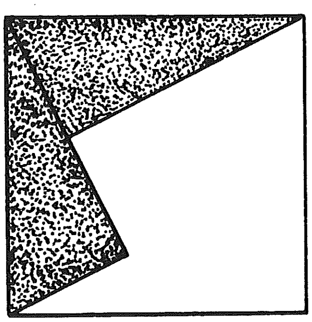
Actividad 2



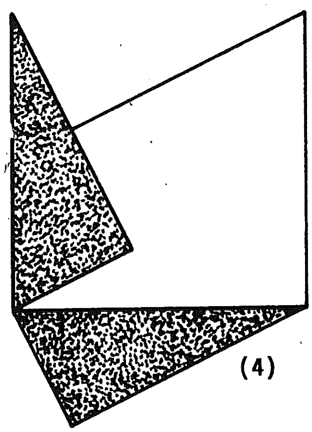
(1)



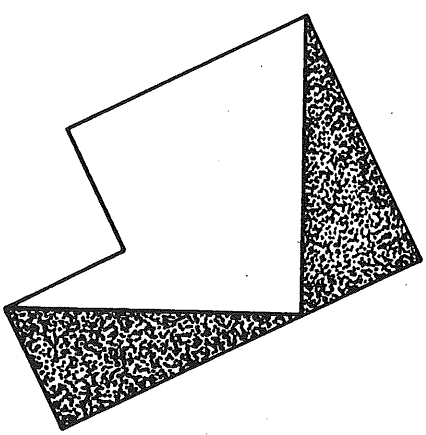
(2)



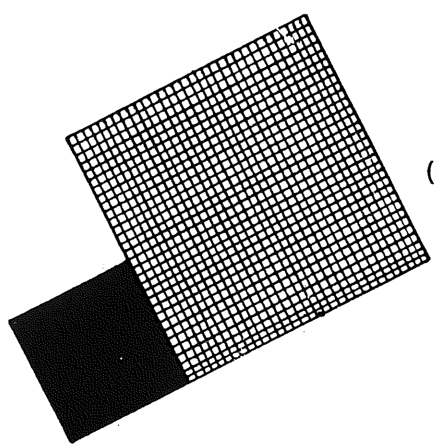
(3)



(4)



(5)



(6)