FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 ÁNGULO
2 FUNCIÓN SENO Y FUNCIÓN COSENO
3 FUNCIÓN TANGENTE
4 VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS CONOCIDOS
5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

Existen expresiones algebraicas que contienen funciones trigonométricas, que para simplificarlas hay que conocer y usar sus propiedades, identidades y valores conocidos.

OBJETIVOS:

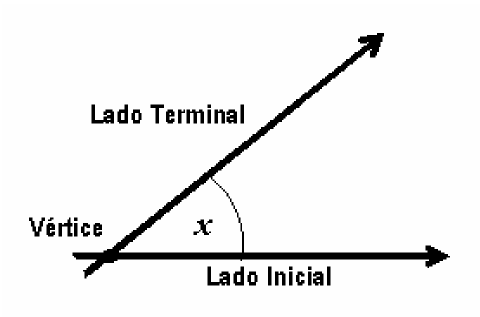
SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:

- Defina ángulo.
- Defina función acotada, función periódica, funciones trigonométricas para ángulos en general.
- Aplique las identidades trigonométricas básicas para determinar si ciertas expresiones trigonométricas dadas son identidades o no.
- Represente en el plano cartesiano el gráfico de las funciones trigonométricas básicas.

1 ÁNGULO.

ÁNGULO es la abertura que existe entre 2 semirectas que tienen un punto común de intersección.

Esquemáticamente tenemos:



Se lo puede denotar de la siguiente manera

$\measuredangle x$

También se suele emplear letras del alfabeto griego

$\measuredangle \alpha$

$\measuredangle \beta$

$\measuredangle \gamma$

1.1 PATRÓN DE MEDIDA

La ***MEDIDA DE UN ÁNGULO*** es la cantidad de rotación que tiene que realizar el lado inicial para coincidir con el lado terminal.

Si consideramos la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj diremos que el **ángulo** es **POSITIVO**; en cambio, si lo medimos en sentido horario diremos que el **ángulo** es **NEGATIVO**.

La medida de un ángulo se la expresa en:

- **GRADOS** (patrón referencial); y/o
- **RADIANES** (patrón de números reales)

Para realizar conversiones consideremos la *equivalencia básica*:

$$180^{\circ} = \pi \text{ Radianes}$$

A manera de ejemplos, como derivación de esta equivalencia tenemos:

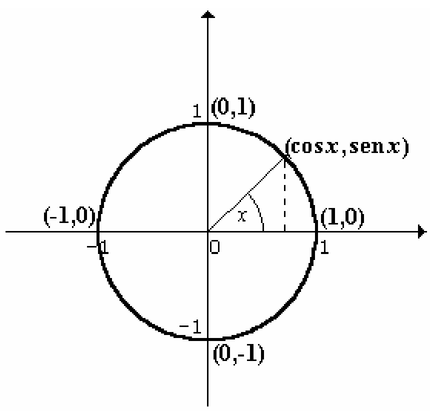
GRADOS	RADIANES
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
180°	π
210°	$\frac{7\pi}{6}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$
300°	$\frac{5\pi}{3}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$
360°	2π
135°	
120°	
225°	
315°	

Completar

2 FUNCIÓN SENO Y FUNCIÓN COSENO

La regla de correspondencia para la función seno es $f(x) = \operatorname{sen} x$, y para la función coseno $f(x) = \cos x$, donde x denota un ángulo.

Para tabular valores de estas funciones, y realizar las gráficas respectivas, recurrimos a un círculo unitario, centrado en el origen.

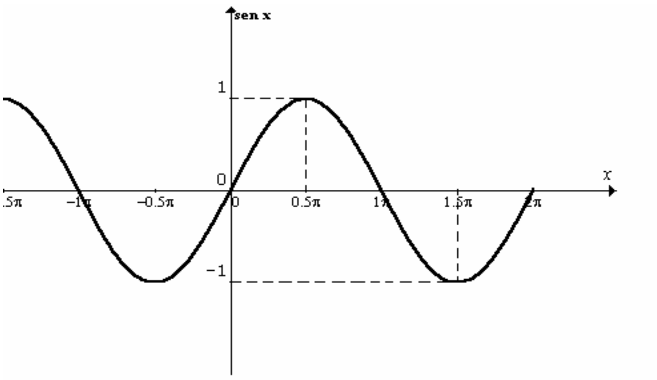


Note que aquí la variable independiente “ x ” representa a un ángulo

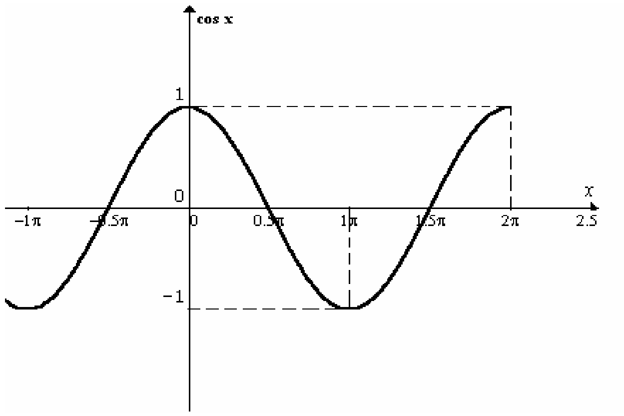
En cada posición de giro del radio vector (ángulo “ x ”) , la ABCISA del vértice indica el valor del COSENO y la ORDENADA indica el valor del SENO. ¿POR QUÉ?

Para las coordenadas del vértice del radio vector en ángulos (posición) estratégicos tenemos:

x	$\operatorname{sen} x$
0	$0 = \operatorname{sen} 0$
$\frac{\pi}{2}$	$1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
π	$0 = \operatorname{sen} \pi$
$\frac{3\pi}{2}$	$-1 = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2π	$0 = \operatorname{sen} 2\pi$



x	$\cos x$
0	$1 = \cos 0$
$\frac{\pi}{2}$	$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
π	$-1 = \cos \pi$
$\frac{3\pi}{2}$	$0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2π	$1 = \cos 2\pi$



CONCLUSIONES:

- $\boldsymbol{Dom}(\operatorname{sen} \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Dom}(\cos \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{IR}$

- Las gráficas son ONDAS SENOIDALES.

- Sus gráficas presentan SIMETRÍA.

  El seno es una función impar. Por tanto $\boxed{\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x}$

  El coseno es una función par. Por tanto $\boxed{\cos(-\boldsymbol{x}) = \cos \boldsymbol{x}}$

- Son FUNCIONES PERIÓDICAS, con período $\boxed{\boldsymbol{T} = 2\boldsymbol{\pi}}$.

  Una FUNCIÓN ES PERIÓDICA si y sólo si $\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$

  Por tanto $\boxed{\operatorname{sen}(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{T}) = \operatorname{sen}(\boldsymbol{x})}$ y $\boxed{\cos(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{T}) = \cos(\boldsymbol{x})}$

- Son FUNCIONES ACOTADAS.

  Una FUNCIÓN ES ACOTADA si y sólo si $\forall \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n} \le \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{m}]$

  Note que $\boxed{\boldsymbol{rg} = (\operatorname{sen} \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{rg} \cos \boldsymbol{x} = [-1,1]}$, es decir:

$$-1 \le \operatorname{sen} \boldsymbol{x} \le 1 \;\wedge\; -1 \le \cos \boldsymbol{x} \le 1$$

OPCIONAL

Estas conclusiones son válidas para las funciones en su forma elemental, pero piense cuales serían las características de las gráficas de:

- $y = 2\operatorname{sen} x$.

  Generalice $y = A\operatorname{sen} x$ donde $A \equiv \boldsymbol{amplitud}$

- $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{6})$.

  Generalice para $y = \operatorname{sen}(x \pm \Phi)$ donde $\Phi \equiv \boldsymbol{desfase}$

- $y = \operatorname{sen}(2x)$.

  Generalice para $y = \operatorname{sen} \omega x$ donde $\omega \equiv$ ***frecuencia angular***

Finalmente, las reglas de correspondencia de la función seno y de la función coseno pueden ser generalizadas de la siguiente forma:

$\boxed{y = A\operatorname{sen}(\omega(x \pm \Phi))}$ donde $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ entonces $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$\boxed{y = A\cos(\omega(x \pm \Phi))}$

Ejercicios Propuestos 1

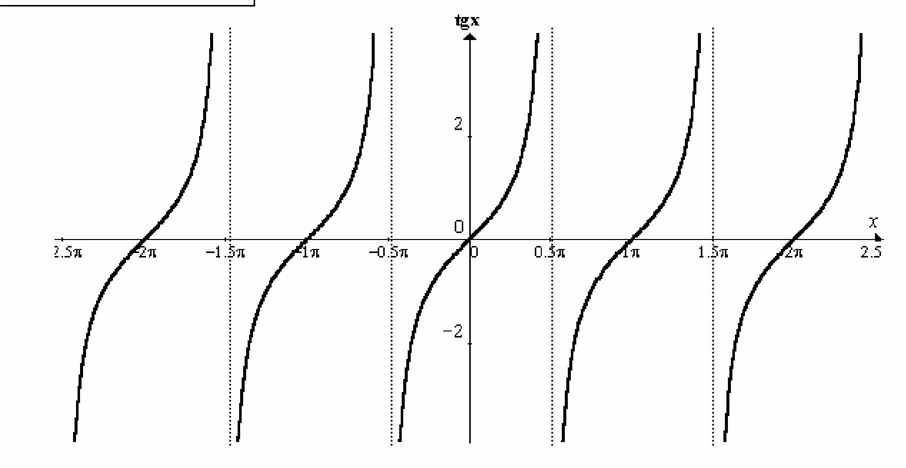
GRAFIQUE:

1. $y = -sen(x)$
2. $y = \operatorname{sen}(-x)$
3. $y = |sen(x)|$
4. $y = \operatorname{sen}|x|$
5. $y = 2sen(x - \frac{\pi}{3}) + 1$

3 FUNCIÓN TANGENTE

La función tangente se define como $\boxed{y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x}$

Por tanto su gráfica tendrá asíntotas verticales en $\cos x = 0$. Es decir en $\boxed{x = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; n = 0,1,2,...}$



CONCLUSIONES:

- $\boldsymbol{Dom}(\operatorname{tg}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{IR}-\left\{\pm(2\boldsymbol{n}-1)\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}\quad;\boldsymbol{n}=0,1,2,\ldots\right\}$
- $\boldsymbol{rg}(\operatorname{tg}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{IR}$. Por tanto, no es una función acotada
- Es una función periódica, con período $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\pi}$. Entonces $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T}}$
- Es una función impar. Por tanto $\operatorname{tg}(-\boldsymbol{x})=-\operatorname{tg}\boldsymbol{x}$
- En general, la regla de correspondencia sería $\boxed{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\operatorname{tg}(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\pm\Phi))}$

OPCIONAL: *Ejercicio Propuesto 2*

GRAFICAR:

1. $y=-tg(x)$
2. $y=tg(-x)$
3. $y=\operatorname{tg}|x|$
4. $y=|tg(x)|$
5. $y=\operatorname{tg}|x|$
6. $y=tg(x-\frac{\pi}{3})$

4 VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS CONOCIDOS

Con ciertos ángulos el estudiante puede concebir estrategias básicas para solucionar situaciones prácticas. Para otros ángulos no nos preocuparemos mayormente, porque bastará sólo con emplear una calculadora.

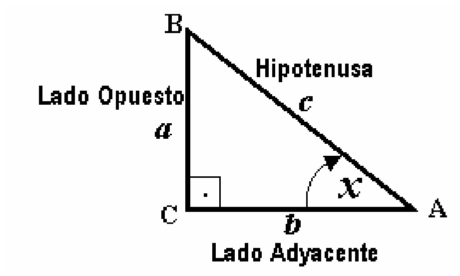
Ubiquemos en una tabla los valores del seno, coseno y tangente para los ángulos que ya definimos anteriormente y además también para los ángulos de 30°, 45° y 60°, que justificaremos luego.

$\boldsymbol{x}$	$\operatorname{sen}\boldsymbol{x}$	$\cos\boldsymbol{x}$	$\operatorname{tg}\boldsymbol{x}$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	1	0	∞
$\pi=180^\circ$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	-1	0	∞
$2\pi=360^\circ$	0	1	0

La trigonometría está íntimamente ligada a la geometría. Para obtener los valores de las funciones trigonométricas para 30°, 45° y 60° podemos emplear un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras es de mucha ayuda.

4.1 Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo (triángulo que tiene un ángulo recto(90°)), el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de las longitudes sus catetos.



Es decir: $c^2 = a^2 + b^2$

4.2 Funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo

Para el triángulo rectángulo anterior tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \quad \mapsto \quad \operatorname{sen} x = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{\text{Lado adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \quad \mapsto \quad \cos x = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Lado adyacente}} \quad \mapsto \quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$$

También se definen las **Cofunciones** de la siguiente manera:

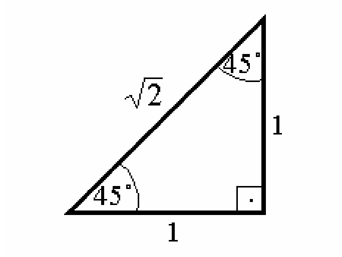
COSECANTE : $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{c}{a}$

SECANTE: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{c}{b}$

COTANGENTE: $\cot x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{b}{a}$

4.3 Funciones trigonométricas para 45°, 30° y 60°.

Para 45° empleamos un triángulo rectángulo de catetos iguales. Digamos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 1$, entonces aplicando en Teorema de Pitágoras tenemos que $\boldsymbol{c} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

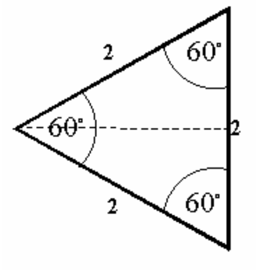


$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

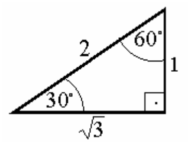
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$$

Para 30° y 60° empleamos un triángulo equilátero (triángulo de lados de igual medida y por ende, ángulos de igual medida (60°)). Digamos $\boldsymbol{l} = 2$



$\Rightarrow$



$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ejercicio resuelto

La operación $\operatorname{sen}^2 60^\circ + 2\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\csc 60^\circ} - 4\left(\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ\right)$ da como resultado:

a) $9/4$ b) $-9/4$ c) 1 d) 0 e) -1

<u>SOLUCIÓN</u>:

Reemplazando los valores de funciones trigonométricas para los ángulos, tenemos:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) - 4\left(1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} + \cancel{2}^{1}\left(\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{\frac{\cancel{6}}{\cancel{2}_{1}}}\right)\right) - 4 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{3-12}{4} = -\frac{9}{4}$$

<u>RESPUESTA</u>: Opción "b"

Para **ÁNGULOS MAYORES A 90° Y MENORES A 360°**, podemos considerar lo siguiente:

1. Regla del cuadrante:

Cuadrante	x	
I	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$f(x) = f(x)$
II	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$f(x) = \pm f(\pi - x)$
III	$\pi < x < 3\frac{\pi}{2}$	$f(x) = \pm f(x - \pi)$
IV	$3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$	$f(x) = \pm f(2\pi - x)$

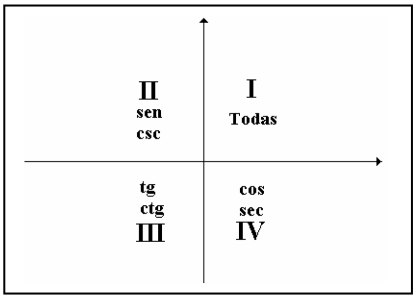
Donde
$f = \text{sen}, \cos, \text{tg}$
$= \csc, \sec, c\,\text{tg}$

El signo se lo escoge de acuerdo a la siguiente regla:

2. Regla de los signos

Cuadrante	x	$\text{sen}\, x$, $\csc x$	$\cos x$, $\sec x$	$\text{tg}\, x$, $c\,\text{tg}\, x$
I	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-
III	$\pi < x < 3\frac{\pi}{2}$	-	-	+
IV	$3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-

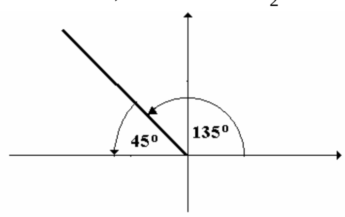
Entonces las **funciones trigonométricas POSITIVAS** en los respectivos cuadrantes son:



Ejemplo 1

Para calcular $\text{sen}\,135^\circ$, debemos considerar que:

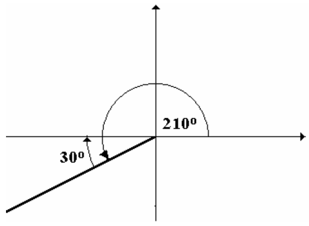
1. En ángulo es del segundo cuadrante, por tanto su seno es positivo.
2. $\text{sen}\,135^\circ = \text{sen}(180° - 135°) = \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Ejemplo 2

Para calcular $\cos 210^\circ$, debemos considerar que:

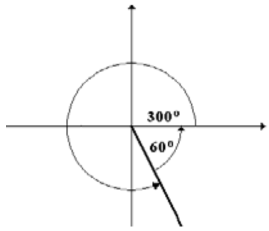
1. Es un ángulo del tercer cuadrante, por tanto su coseno es negativo.
2. $\cos 210^\circ = -\cos(210° - 180°) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ejemplo 3

Para calcular $\operatorname{tg} 300°$, debemos considerar que:

1. Es un ángulo del cuarto cuadrante, por tanto su tangente es negativa.
2. $\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg}(360° - 300°) = -\operatorname{tg}(60°) = -\sqrt{3}$



Ejercicios Propuestos 3

Calcular:

1. $\cos 120°$
2. $\operatorname{tg} 150°$
3. $\operatorname{sen} 225°$
4. $\operatorname{tg} 240°$
5. $\cos 315°$

Para **ÁNGULOS SUPERIORES A 360°**, considere el criterio de la función periódica, es decir: $f(x) = f(x - n2\pi)$. Donde "n" es un número natural, lo suficiente para llevar a "x" a un ángulo entre 0° y 360°, y luego aplicar las reglas anteriores.

Ejemplo 1

Para calcular $\operatorname{sen} 405°$, debemos considerar que:

$$\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen}(405° - 360°) = \operatorname{sen} 45° \Rightarrow \operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen} 45°$$

$$\operatorname{sen} 405° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2

Para calcular $\operatorname{tg} 1125°$, debemos considerar que:

$$\operatorname{tg} 1125° = \operatorname{tg}(1125° - 3(360°)) = \operatorname{tg} 45° \Rightarrow \operatorname{tg} 1125° = 1$$

Ejemplo 3

Para calcular $\cos 480°$, debemos considerar que:

1. $\cos(480° - 360°) = \cos 120°$.
2. $\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Ejercicios propuestos 4

Calcular:

1. $\cos 1080°$
2. $\operatorname{tg} 495°$
3. $\operatorname{sen} 1050°$

Si el **ÁNGULO ES NEGATIVO** se puede emplear uno de los siguientes métodos:

1. El criterio de simetría, es decir $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Y el resto de manera semejante a lo que ya se ha explicado.
2. Llevarlo a un ángulo entre 0° y 360°, $f(-x) = f(-x + n2\pi)$

Ejemplo

Para calcular $\operatorname{sen}(-30)$, podemos considerar que:

- $\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$; o considerar que,
- $\operatorname{sen}(-30°) = \operatorname{sen}(-30° + 360°) = \operatorname{sen} 330° = -\frac{1}{2}$

5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Existen expresiones trigonométricas que son válidas para cualquier valor de x.

Del círculo unitario que nos sirvió para definir a la función seno y a la función coseno, tenemos que: $\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$ (JUSTIFÍQUELO)

De aquí, al despejar tenemos que: $\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$\boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}$

Además se puede demostrar que:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

De aquí se deriva que:

$$\operatorname{tg}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\frac{\operatorname{sen}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{\cos(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}=\frac{\operatorname{tg}\boldsymbol{x}+\operatorname{tg}\boldsymbol{y}}{1-\operatorname{tg}\boldsymbol{x}\operatorname{tg}\boldsymbol{y}}$$

$$\operatorname{tg}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{\operatorname{tg}\boldsymbol{x}-\operatorname{tg}\boldsymbol{y}}{1+\operatorname{tg}\boldsymbol{x}\operatorname{tg}\boldsymbol{y}}$$

Si hacemos $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ en las identidades para la suma de seno y coseno, resulta:

$$\operatorname{sen}2\boldsymbol{x}=2\operatorname{sen}\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}$$

$$\cos 2\boldsymbol{x}=\begin{cases}\cos^2\boldsymbol{x}-\operatorname{sen}^2\boldsymbol{x}\\ 2\cos^2\boldsymbol{x}-1\\ 1-2\operatorname{sen}^2\boldsymbol{x}\end{cases}$$

Si hacemos $x=\frac{x}{2}$ en $\boxed{\cos 2\boldsymbol{x}=2\cos^2\boldsymbol{x}-1}$ y en $\boxed{\cos 2\boldsymbol{x}=1-2\operatorname{sen}^2\boldsymbol{x}}$; y luego despejamos, entonces resulta que:

$$\cos\frac{\boldsymbol{x}}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\boldsymbol{x}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\boldsymbol{x}}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\boldsymbol{x}}{2}}$$

Ejercicio resuelto 1

Calcular $\operatorname{sen}(75^\circ)$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Una opción sería emplear la identidad $\operatorname{sen}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\operatorname{sen}\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{y}+\cos\boldsymbol{x}\operatorname{sen}\boldsymbol{y}$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(75^\circ)&=\operatorname{sen}(45^\circ+30^\circ)=\operatorname{sen}45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\operatorname{sen}30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}\end{aligned}$$

Ejercicio resuelto 2

Al simplificar la expresión: $\dfrac{1+\operatorname{sen}x-\cos^2 x}{\cos x\left(1+\operatorname{sen}x\right)}$ se obtiene:

a) $\operatorname{sen}x$ b) $\cos x$ c) $\operatorname{tg}x$ d) 1 e) 0

SOLUCIÓN :

Reemplazando la identidad $\boxed{1=\operatorname{sen}^2 \boldsymbol{x}+\cos^2 \boldsymbol{x}}$ en la expresión dada, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen}\boldsymbol{x}-\cos^2\boldsymbol{x}}{\cos\boldsymbol{x}(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{x})} &= \frac{\operatorname{sen}^2\boldsymbol{x}+\cancel{\cos^2}\boldsymbol{x}+\operatorname{sen}\boldsymbol{x}-\cancel{\cos^2}\boldsymbol{x}}{\cos\boldsymbol{x}(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{x})}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\boldsymbol{x}(\operatorname{sen}\cancel{\boldsymbol{x}+1})}{\cos\boldsymbol{x}(\cancel{1+\operatorname{sen}\boldsymbol{x}})}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\boldsymbol{x}}{\cos\boldsymbol{x}}\\
&= \operatorname{tg}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

RESPUESTA: opción "**c**"

Ejercicio resuelto 3

¿Qué expresión se debe colocar en lugar de "x", para que: $\frac{\cos A}{1+\operatorname{sen}A}+\frac{\cos A}{1-\operatorname{sen}A}=\frac{2}{x}$ se convierta en una identidad?

a) $\csc A$ c) $\operatorname{sen}A$ e) $\cos A$

b) $\operatorname{sen}A\cos A$ d) $\operatorname{tg}A$

SOLUCIÓN:

Despejando "$\boldsymbol{x}$" en la igualdad dada, tenemos:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\cos\boldsymbol{A}}{1+\operatorname{sen}\boldsymbol{A}}+\frac{\cos\boldsymbol{A}}{1-\operatorname{sen}\boldsymbol{A}} &= \frac{2}{\boldsymbol{x}}\\
\frac{\cos\boldsymbol{A}(1-\operatorname{sen}\boldsymbol{A})+\cos\boldsymbol{A}(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{A})}{(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{A})(1-\operatorname{sen}\boldsymbol{A})} &= \frac{2}{\boldsymbol{x}}\\
\frac{\cos\boldsymbol{A}-\cos\boldsymbol{A}\operatorname{sen}\boldsymbol{A}+\cos\boldsymbol{A}+\operatorname{sen}\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{A}}{(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{A})(1-\operatorname{sen}\boldsymbol{A})} &= \frac{2}{\boldsymbol{x}}\\
\frac{\cancel{2}\cos\boldsymbol{A}}{(1+\operatorname{sen}\boldsymbol{A})(1-\operatorname{sen}\boldsymbol{A})} &= \frac{\cancel{2}}{\boldsymbol{x}}\\
\boldsymbol{x} &= \frac{1-\operatorname{sen}^2\boldsymbol{A}}{\cos\boldsymbol{A}}\\
\boldsymbol{x} &= \frac{\cos^2\boldsymbol{A}}{\cos\boldsymbol{A}}\\
\boldsymbol{x} &= \cos\boldsymbol{A}
\end{aligned}
}
$$

RESPUESTA: Opción "e"

Ejercicios Propuestos 5

1. La expresión $\frac{\operatorname{tg}x+c\operatorname{tg}x}{c\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x}$, es idéntica a:

   a) $\csc 2x$
   b) $\sec 2x$
   c) $\operatorname{sen}2x$
   d) $\cos 2x$
   e) $\operatorname{tg}2x$

2. Una expresión idéntica a $\frac{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x+\cos^2 x-1}{1-\cos^2 x}$ es:

   a) $\operatorname{sen}x+\cos x$
   b) $2\operatorname{sen}x$
   c) $1-\cos^2 x$

d) $2\cos x - 1$
e) $\operatorname{sen} 2x - \cos x$

3. La expresión $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ es equivalente a:

a) $\frac{1}{2}\sec x$
b) $3\operatorname{tg} x$
c) $2\csc x$
d) $\cos x$
e) $4\, c\operatorname{tg} x$

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\sqrt{8}\cos\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\right)$?

a) $2(\cos x - \operatorname{sen} x)$
b) $2(\operatorname{sen} x - \cos x)$
c) $2(1+\operatorname{sen} x)$
d) $2(\operatorname{sen} x + \cos x)$
e) $2(1-\cos x)$

5. La expresión: $2\cos\boldsymbol{\alpha}\operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha} + \left(\dfrac{1-\boldsymbol{c}\operatorname{tg}\boldsymbol{\alpha}}{\csc\boldsymbol{\alpha}}\right)^2$ es idéntica a:

a) $2\operatorname{tg}\alpha$
b) -1
c) $2\, c\operatorname{tg}\alpha$
d) 1
e) $\operatorname{tg}\alpha$

6. Una expresión idéntica a $\dfrac{\operatorname{sen} 2\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x} + \operatorname{sen}^2\boldsymbol{x} - 1}{1-\operatorname{sen}^2\boldsymbol{x}}$ es:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x$
b) $1-\operatorname{sen}^2 x$
c) $2\operatorname{sen} x$
d) $\operatorname{sen} 2x - \cos x$
e) $2\operatorname{sen} x - 1$

7. ¿Cuál de las siguientes igualdades es una identidad?

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
b) $\operatorname{tg}^2 x = 1 - \sec^2 x$
c) $1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
d) $2\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \cos x$
e) $\operatorname{sen} x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Misceláneos

1. Una de las siguientes afirmaciones es FALSA, identifíquela:

a) $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
b) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\cos 0 = \cos 8\pi$
d) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$

e) $\forall x\left[\cos x(\operatorname{tg} x+\cot g\ x)=\cos x\right]$

2. La expresión $\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x+\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x-\cos 2x}$ es IDÉNTICA a:
   a) $\operatorname{sen} x$
   b) $\cos x$
   c) $\sec x$
   d) $\cot x$
   e) $\operatorname{tg} x$

3. Sean " x " y " y " números reales. Entonces una de las siguientes proposiciones es VERDADERA, identifíquela:
   a) $Sen(x+y)=SenxCosy-CosySenx$
   b) $Sen2x=\dfrac{SenxCosy}{2}$
   c) $Cos^2x=1+Sen^2x$
   d) $Sen\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos^2 x}{x}}$
   e) $Cos2x=Cos^2x-Sen^2x$

4. El valor de Δ para que la expresión $\dfrac{\Delta+\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}}=\cos x$ sea una IDENTIDAD es:
   a) $\cos x$
   b) $\sec x$
   c) $\operatorname{sen} x$
   d) $\cos^2 x$
   e)1

5. La expresión $\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x+\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x-\cos 2x}$ es idéntica a:
   a) $\operatorname{sen} x$
   b) $\cos x$
   c) $\operatorname{tg} x$
   d) $\cot gx$
   e) $\sec x$

6. El valor de la expresión: $\dfrac{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\left[1+\left(\cot\frac{\pi}{3}\right)^2\right]^{-1}}$ es:

   a) $-\dfrac{1}{3}$ b) -12 c) -3 d) $-\dfrac{3}{12}$ e) $\dfrac{3}{12}$

7. SIMPLIFICANDO $\dfrac{3\cos x-4\cos^3 x}{\operatorname{sen} 2x-\cos x}$, se obtiene:
   a) $\operatorname{sen} x+\cos x$
   b) $1-2\cos x$
   c) $2\operatorname{sen} x+1$
   d) $2-\operatorname{sen} x$
   e) $\cos x-\operatorname{sen} x$

8. La expresión $\left(\dfrac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{sen} x+\cos x}\right)\cos x$ es idéntica a:
   a) tg x
   b) tg x +1
   c) ctg$x$
   d)ctg$x$ - 1
   e)1

9. La expresión $\left(\dfrac{\sec x + \csc x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2$ es IDÉNTICA a:

   a) $\cot^2 x$
   b) $\sec^2 x$
   c) $\csc^2 x$
   d) $\operatorname{sen}^2 x$
   e) $\cos^2 x$

10. La expresión $[(1 - \cos x)(\csc x + \cot x)]$ es IDÉNTICA a:
    a) $-\operatorname{sen} x$
    b) $\csc x$
    c) $-\csc x$
    d) $\operatorname{sen} x$
    e) $-\cos x$

11. El VALOR de $\dfrac{\operatorname{sen} 45^\circ . \operatorname{tg} 60^\circ . \sec 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ . \cot 60^\circ}$, es:

    a) $\sqrt{6}$
    b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
    c) $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$
    d) $2\sqrt{3}$
    e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
