Demostraciones de la Irracionalidad de √ 2

Article · December 2018

1 author:

Julio Trujillo
Universidad de Panamá

Demostraciones de la Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Julio E. Trujillo G.

Resumen

El objetivo principal de este artículo es presentar varias pruebas sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por ejemplo la de reducción al absurdo, la de descenso infinito y la otra usando una equivalencia lógica del principio de inducción conocido como principio del buen orden. Además, estas demostraciones se pueden presentar en un curso de fundamentos para llamar la atención de los alumnos.

Palabras clave: Número irracional, reducción al absurdo, descenso infinito, principio de inducción, principio de buen orden, equivalencia lógica.

1. Introducción

El descubrimiento de los números irracional se atribuye generalmente al pitagórico Hipaso de Metaponto, pero omitiendo la atribución de este resultado.
Sólo diremos que es una contribución muy importante de los pitagóricos este descubrimiento la existencia de tales números, no es claro como se descubrió, tal vez fue aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo isósceles o puede ser al estudiar las propiedades del pentágono estrellado, el cual es el símbolo de los pitagóricos.

2. Demostración por Reducción al Absurdo.

Lo que en realidad demostraron los pitagóricos fue que la diagonal de un cuadrado y su lado no son conmensurables, es decir que el cociente no es igual a ningún cociente de números enteros. Aunque no tenemos la prueba original, podemos hacer una reconstrucción gracias a una cita de Aristóteles que hace uso del método de reducción al absurdo.

Teorema: La diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables.
Prueba.
Sea h la diagonal de un cuadrado y c su lado. Por el teorema de Pitágoras tenemos que: $h^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$.
Entonces: $\frac{h^2}{c^2} = 2$
Supongamos que h y c son conmensurables. Entonces existen dos números a y b,con $(a, b) = 1$, tales que
$\frac{h}{c} = \frac{a}{b}$.

Entonces: $\frac{h^2}{c^2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$
De lo última igualdad se deduce que a^2 es par, por lo que a debe ser par(entonces debe ser b impar, ya que supusimos que a y b eran coprimos).

Entonces $a = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, se tiene que: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$
Simplificando:$2k^2 = b^2$
De manera análoga se deduce que b^2 es par, por lo que b debe ser par, pero esto es una contradicción, ya que b era impar.
En conclusión, h y c son inconmensurables.$\square$

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se deduce como una consecuencia directa del teorema anterior o se adapta la demostración a este caso particular.

3. Demostración por Descenso Infinito.

El comienzo es similar al caso anterior, es decir: Sea $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ considerando $p, q \in \mathbb{N}$. Concretamente que $q > 0$.

Tenemos entonces $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$
Restando ambos lado pq,obtenemos:

$$p^2 - pq = 2q^2 - pq \Rightarrow p(p-q) = q(2q-p)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q}$$

$$\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$$

y aquí está la contradicción: se trata de una fracción con términos menores a la primera.
¿Será cierto? Como

$$1 < \sqrt{2} = \frac{p}{q} < 2$$

como q es positivo, multiplicando por q tenemos

$$q < p < 2q,$$

y restando q

$$0 < p - q < q.$$

Así, el denominador de la segunda fracción es positivo y menor que el de la primera fracción que es igual a raíz de 2. Con esta nueva fracción podríamos hacer lo mismo y encontraríamos otro entero positivo menor que $p - q$ que cumpliría lo mismo. Es decir, podemos encontrar una sucesión infinita y decreciente de enteros positivos cumpliendo lo anteriormente citado.

Esto es imposible, ya que no existe ninguna sucesión de enteros positivos decreciente con infinitos términos. Por lo tanto la suposición inicial era falsa.
En conclusión $\sqrt{2}$ es irracional $\square$

4. Demostración por el Principio del Buen Orden.

Procederemos indirectamente, comenzamos de manera similar suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional; esto es, supongamos que existen números naturales p, q tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Entonces

$$S = \{k \in \mathbb{N} | k = n\sqrt{2} \; para \; algun \; n \in \mathbb{N}\}$$

donde $S \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$(en particular, $q\sqrt{2} = p$, luego $p \in S$).

Sea $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = y\sqrt{2}$.
Ahora $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ es un número natural menor que y(puesto que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \to 0 < y(\sqrt{2} - 1) < y \longleftrightarrow 0 < x - y < y$).

Luego, $z = y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ es menor que x(ya que $y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = (x - y)\sqrt{2} < y\sqrt{2} = x$).

Pero $z = 2y - y\sqrt{2} = 2y - x$. Luego, $z \in \mathbb{N}$ y $z \in S$(ya que $x - y < y \to x < 2y$ y $z = y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2})$ con $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ un número natural menor que y según vimos).

Así, se tiene una contradicción pues $z \in S$ es menor que x. Luego, S debe ser vacío. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional.$\square$

5. Referencias

1. David M. Bloom, *A One − Sentence Proof That* $\sqrt{2}$ *Is Irrational*, Mathematics Magazine 68(1995), No. 4, 286.
2.Tom M. Apostol, *Analisis Matematico*,Editorial Reverté(Barcelona), Segunda Edición.