Demostración $\mathbf{0^0 = 1}$

Asdrúbal Enrique Beltrán Herrera
asbeltran@.uan.edu.co
Universidad Antonio Nariño

Introducción

Este artículo se escribe debido al mal uso que se le da a la expresión 0^0. En ocaciones a la pregunta a que es igual, o cuanto es 0^0, se debe ser cuidadoso al responder, mejor aún se debe ser específico al preguntar.

1. Demostración

Antes que nada en esta parte se pretende dar respuesta a la pregunta a que es igual el **número natural** cero elevado al **número natural** cero, que representado simbólicamente es 0^0.

1.1. Ejercicio propuesto en Teoría de Conjuntos

En los dos semestres del año 2006 tuve la maravillosa oportunidad de ver el curso de Teoría de Conjuntos; el primero a cargo del docente Rodrigo De Castro Korgi y el curso que "repetí", a cargo del docente Alexander Jonathan Berenstein, en el primero uno de los textos guía erá: *"Introducción a la teoría de conjuntos"* de Jose María Muñoz (ver [1]), en este en la página 250 dice:

PROPOSICIÓN 25.

a) $\alpha^0 = 0$, cualquiera sea el cardinal α (**observe que** $\mathbf{0^0 = 1}$)

b) Si $\alpha^0 \neq 0$, entonces $0^\alpha = 0$.

c) $\alpha^1 = \alpha$

d) $\alpha^\beta = 0$ si y solo si $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$

En el segundo curso el texto guía erá *"Introduction to set theory"* (ver [2]), en la página 97, dice el ejercicio 1.2 (ver imagen):

Demuestre que $\kappa^0 = 1$ y $\kappa^1 = \kappa$ para todo κ

Exercises

1.1 Prove properties (a)–(n) of cardinal arithmetic stated in the text of this section.
1.2 Show that $\kappa^0 = 1$ and $\kappa^1 = \kappa$ for all κ.
1.3 Show that $1^\kappa = 1$ for all κ and $0^\kappa = 0$ for all $\kappa > 0$.
1.4 Prove that $\kappa^\kappa \leq 2^{\kappa\cdot\kappa}$.

Notese que el ejercicio 1.2 es para todo κ es decir se incluye la posibilidad que $\kappa = 0$.

En el libro de Set Theory [3] en su página 29 la **proposición** 3.10 (ver imagen) dice:

$\kappa^0 = 1$; $1^\kappa = 1$; $0^\kappa = 0$ si $\kappa > 0$

A few simple facts about cardinal arithmetic:

(3.4) $+$ and $\cdot$ are associative, commutative and distributive.
(3.5) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
(3.6) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
(3.7) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.
(3.8) If $\kappa \leq \lambda$, then $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
(3.9) If $0 < \lambda \leq \mu$, then $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
(3.10) $\kappa^0 = 1$; $1^\kappa = 1$; $0^\kappa = 0$ if $\kappa > 0$.

To prove (3.4)–(3.10), one has only to find the appropriate one-to-one functions.

Aquí también es para todo κ sin la exclución de que $\kappa = 0$. En conclusión se ve que $0^0 = 1$ es un caso particular de cada ejercicio propuesto.

Las definiciones y propiedades mostradas a continuación son tomadas del libro "*Introduction to Set Theory*" [2].

1.2. Conjunto Potencia

Definición 1. Sean A y B conjuntos. El conjunto de todas las funciones de A en B se denota por B^A. Por supuesto se debe demostrar que este conjunto existe; esto está propuesto en el ejercicio 3.9.

1.3. Cardinalidad

Definición 2. Los conjuntos A y B son equipotentes (tienen la misma cardinalidad) si existe una funcion f uno a uno, con dominio A y rango B. Esto se denota por $|A| = |B|$.

1.3.1. Cardinalidad de Conjuntos Finitos

Es pertinente recordar que antes de esto los números naturales se definieron y se construyerón como conjuntos en la teoría, de manera consistente.

Definición 3. Un conjunto S es finito si este es equipotente con algún número natural $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos $|S| = n$ y se dice que S tiene n elementos. Un conjunto es infinito si no es finito.

Como nosotros mismos lo enseñamos a nuestros estudiantes, en una igualdad lo que suceda con los termimos de algún extremo es equivalente a lo que sucede con los terminos del otro, es decir; **"Las propiedades de los números naturales se pueden apreciar a partir de las caracteristicas que se derivan, en la cantidad de elementos de conjuntos finitos"**.

Es de notar que al definirse la teoría de conjuntos $0 = \emptyset$, entonces según lo anterior $|\emptyset| = 0$.[1]

En la página 95 dice: *"Para definir la exponenciación de números cardinales, se nota que si A y B son conjuntos finitos con a y b sus respectivos elementos, entonces a^b es el numero de todas las funciones de B en A"*. (Recuerde que $a, b \in \mathbb{N}$ según la definición 3)

Definición 4. $\kappa^\lambda = |A^B|$, donde $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$.

La definición de κ^λ no depende de la elección de A y B.

Ejemplo 1. A que es igual $|A^B|$, si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$, notese que $|A| = 2$ y $|B| = 3$. Solución: En este caso es posible construir el conjunto de todas las funciones que van de B en A.

1. $f_1 : B \to A = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}$
2. $f_2 : B \to A = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$
3. $f_3 : B \to A = \{(0,0), (1,1), (2,0)\}$
4. $f_4 : B \to A = \{(0,0), (1,0), (2,1)\}$
5. $f_5 : B \to A = \{(0,1), (1,0), (2,0)\}$
6. $f_6 : B \to A = \{(0,1), (1,1), (2,0)\}$
7. $f_7 : B \to A = \{(0,1), (1,0), (2,1)\}$
8. $f_8 : B \to A = \{(0,0), (1,1), (2,1)\}$

Como $A^B = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ por ser un conjunto finito según la definición 3 entonces

$$|A^B| = |\,\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}\,| = 8$$

Observe que $2^3 = 8$ que es lo que estipula la definición 4.

[1] Son igualdades distintas pues la primera es entre conjuntos y la segunda entre números

1.4. Teorema $|\emptyset^{\emptyset}| = \mathbf{0^0 = 1}$

Teorema 1. $|\emptyset^{\emptyset}| = \mathbf{0^0 = 1}$.

Demostración. Por las definiciones 3 y 4 se tiene que $|\emptyset^{\emptyset}| = 0^0$, se demostrará entonces que $|\emptyset^{\emptyset}| = 1$, lo cual implica que $0^0 = 1$ la cual es una igualdad de números naturales.

El conjunto $\emptyset^{\emptyset}$, se compone por las funciones que van de $\emptyset$ en $\emptyset$. Recordemos que según la definición[2] de función:

> Función: Una relación binaria F es llamada función (o mapa de correspondencia) si aFb_1 y aFb_2 implica que $b_1 = b_2$, para cualquier a, b_1, y b_2. En otras palabras, una relación binaria F es una función si y solo si para todo a de $\mathrm{dom}F$, existe exactamente un b tal que aFb.

La ultima parte se puede tomar como F es función: Si

$$\forall\, a \in \mathrm{dom}F \Rightarrow \exists\, \text{b único tal que } aFb$$

En nuestro caso particular tenemos que, si una relación F a de tener dominio $\emptyset$ entonces la defincición anterior toma la forma:

$$\underbrace{\forall\, a \in \emptyset}_{Falso} \Rightarrow \exists\, \text{b único tal que } aFb$$

Vemos que su antecedente es simpre falso pues en el conjunto $\emptyset$ no hay elementos por ende la pròposición como tal es verdadera ello confirma que la relación F con dominio $\emptyset$ cumple el ser función. Este tipo de funciones, sin perdida de generalidad se representan como la función $\emptyset$.

Por ende el conjunto $\emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, el cual es un conjunto finito de un elemento por la definición 3, tenemos que $|\emptyset^{\emptyset}| = 1$ y por lo tanto

$$0^0 = 1$$

□

[2]definición de la página 23 de [2].

2. El Teorema del Binomio, la MAA y Donald Knuth

El Teorema del Binomio según Proofs and Fundamentals [6] en la página 313;

Theorem 7.7.9 (Binomial Theorem). Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i\end{aligned}$$

Si $x \neq 0$ y calculamos $[x+(-x)]^0 = 0^0$ tenemos:

$$0^0 = [x+(-x)]^0 = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}x^{0-i}(-x)^i = \binom{0}{0}x^{0-0}(-x)^0 = 1 \cdot x^0(-x)^0 = 1$$

Lo anterior da que $0^0 = 1$, pero para los escépticos, posiblemente el valor de $n = 0$ en la sumatoria no es permitido ya que como es el caso del libro referenciado [6], los conjuntos inductivos los construyen desde 1, y prueban el teorema del binomio por inducción desde $n = 1$. Pues bien al investigar un poco más encontre (ver [4]) en la red un artículo de Donald Knuth, en la página 408 dice que podemos hacer el cálculo de $(0+1)^1 = 1$; si aplicamos el teorema del binomio a la expresión izquierda de la igualdad la cual si cumple los requerimientos implicitos y explicitos del teorema obtenemos:

$$1 = [0+1]^1 = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}(0)^{1-i}(1)^i = \binom{1}{0}(0)^{1-0}(1)^0 + \binom{1}{1}(0)^{1-1}(1)^1 = 1 \cdot 0^1 \cdot 1 + 1 \cdot 0^0 \cdot 1 = 0 + 0^0 = 0^0$$

Esto ultimo se puede llamar sin lugar a dudas segunda demostración de que $0^0 = 1$, pues el teorema del binomio se demuestra en la mayoría de textos, por inducción para $n \geq 1$ y $x, y \in \mathbb{R}$. O ¿será que a Newton y demás se les paso por alto este "pequeño" detalle?.

2.1. La MAA y Donald Knuth

Bien como lo mencioné con anterioridad encontré un artículo[3] de Donald E. Knuth, (¡si el creador LaTeX!) llamado "*Two notes on notation*" [4] publicado por la MAA, Mathematical Association of America, al final de la página 407 de la cual se muestrá un fragmento de imagen:

presenting his former professor's reason for believing that $0^0 = 1$ (basically a proof that $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$). Möbius also went further and presented a supposed proof that $\lim_{x\to 0+} f(x)^{g(x)} = 1$ whenever $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = 0$. Of course "S" then asked [**3**] whether Möbius knew about functions such as $f(x) = e^{-1/x}$ and $g(x) = x$. (And paper [**36**] was quietly omitted from the historical record when the collected works of Möbius were ultimately published.) The debate stopped there, apparently with the conclusion that 0^0 should be undefined.

1992] TWO NOTES ON NOTATION 407

Allí luego de hablar sobre la historia de la polémica de 0^0, dice que el debate termina aparentemente concluyendo que 0^0 es indefinido, pero en la página siguiente de forma desesperada dice:

But no, no, ten thousand times no! Anybody who wants the binomial theorem

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (1.18)$$

to hold for at least one nonnegative integer n *must* believe that $0^0 = 1$, for we can plug in $x = 0$ and $y = 1$ to get 1 on the left and 0^0 on the right.

The number of mappings from the empty set to the empty set is 0^0. It *has* to be 1.

"¡Pero no, no, diez mil veces no!..." y en seguida argumenta que no puede ser así por lo del Teorema del Binomio y el cardinal de $|\emptyset^{\emptyset}|$, ambos argumentos citados anteriormente en este artículo.

[3] EL artículo de Knuth es completisimo tiene la historia sobre la polémica de 0^0. ver enlace de descarga en [4].

3. Que es el número Cero a la Cero en la AMS

En una temática del blog el topológico el profesor Gustavo Piñeiro hace referencia al siguiente documento de la doctora Julia Robinson del cual se muestra un fragmento de imagen:

> 704 JULIA ROBINSON [December
>
> $$a = 0 \wedge b = 0 \leftrightarrow a + b = 0, \qquad a = 0 \vee b = 0 \leftrightarrow ab = 0,$$
> $$a \neq 0 \leftrightarrow 0^a = 0.$$
>
> In connection with the last formula, we recall that $0^0 = 1$. Notice also that

Publicado por la AMS American Mathematical Society en diciembre de 1950 como: *"General Recursive Functions"* (vease enlace). Como lo dice el profesor Gustavo en su blog es posible que a la sociedad Americana de Matematicas se le hubiese pasado por alto tal "error garrafal", permitiendo que la doctora Julia Robinson exponga en su artículo que $0^0 = 1$, de hecho esto no es así pues entonces todas las justificaciones anteriores junto con la MAA, autores, profesores y textos guias estarián en un error. Y como decimos en terminos matemáticos de ser así "demuestre lo contrario".

4. Cero a la Cero es Indeterminado: Intentos fallidos

En los diferentes blogs como en el citado anteriormente, son muchos los intentos de los participantes opositores, por mostrar que 0^0 es indeterminado ellos se pueden clasificar en dos tipos, y todos los demás son en si lo mismo:

- $0^0 = 0^{n-n} = 0^n \cdot 0^{-n} = \frac{0}{0}$ que es indeterminado.
- Sea $y = 0^0 \Longrightarrow \ln y = \ln 0^0 = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$ que es indeterminado

En la primera se asume que $n \neq 0$, por ello argumentan que $0^n = 0$, Según el calculo de Apostol [5], en la página 23 dice:

Teorema I.8. **POSIBILIDAD DE LA DIVISIÓN** Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax = b$. La x se designa por b/a o $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a.

Según esto el argumento uno no se puede aplicar ya que la propiedad en general a^{-n} aplica si $a \neq 0$.

Para el argumento dos en el calculo de Apostol [5], en la página 300 dice en la definición 6.15: **Definición de** a^x para $a > 0$ y x real: ...con ello es más facil probar las siguientes propiedades exponenciales:

$$\log a^x = x \log a ...$$

Esto muestra que el argumento dos no se puede aplicar si la base es cero.

Y es por ello que en todos estos casos se llega a contradicciones pues se aplica a la igualdad propiedades no permitidas como el famoso ejemplo de:

$$\begin{aligned} x &= y \\ x-y &= y-y \\ x-y &= 0 \\ \frac{x-y}{x-y} &= \frac{0}{x-y} \\ 1 &= 0 \quad \text{(contradicción)} \end{aligned}$$

5. La forma indeterminada Cero a la Cero

En el libro calculo de Apostol [5] en la página 369 dice: *"Ademas de* $0/0$ *e* ∞/∞ *existen otras formas indeterminadas. algunas de esas se* ***representan con los símbolos*** $0 \cdot \infty$, $\mathbf{0^0}$, *e* ∞^0,...*"*. Hay alguna contradicción con esto y todo lo anterior, ninguna en lo absoluto pues como Apostol afirma se utiliza el símbolo 0^0 para representar la forma indeterminada de una función de la forma $f(x)^{g(x)}$ en donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, de aquí en adelante cualquier interpretación diferente por sutil que sea puede ser erronea y estar fuera de contexto como:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0^0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} \to 0^0$

Si se está hablando de la forma indeterminada 0^0 ninguna de las dos expresiones es equivalente a ello, pues en ambas se está asegurando que su límite es 0^0 y por todo lo anterior su límite será 1, Apostol, y cualquier libro de calculo serio habla de la forma indeterminada al ver, como cada función tanto base como exponente tienden a cero independientemente, y ello lo representa simbolicamente como 0^0, en ningun momento se afirma que 0^0 sea indeterminado, mas aún si una función toma dicho valor o su límite es el número 0^0 como se demostró este valor es 1. Pues recordemos que el límite es un "acercamiento a", pero no podemos asegurar que el límite sea 0^0 hasta no ver que se acerca a este, de ser así su límite sera 1, cuestión diferente a que cada función independientemente tienda a 0.

Por eso cuando usted diga ¿que es 0^0?, precise si habla del símbolo que representa la forma indeterminada de los límites, o del número natural 0^0.

Referencias

[1] Muñoz Quevedo Jose M.: *"Introducción a la Teoría de Conjuntos"*. Universidad Nacional de Colombia, 4ª ed, 2002. 1

[2] Karel Hrbacek y Thomas Jech.: *"Introduction to set theory": Third Edition, revised and Expanded*. Monographs and texbooks in pure and applied mathematics, 1999. 2, 4

[3] Thomas Jech.: *"Set Theory": The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics, 2006. 2

[4] Donald E. Knuth: *"Two notes on notation"*. AMM 99 Nº. 5 (May 1992), pags 403-422
web: Enlace al artículo 5, 6

[5] Thom M. Apostol.: *"Calculus"; Vol 1*. 2ª edición, Editorial Reverte 1988. 7, 8

[6] Ethan D. Bloch: *"Proofs and Fundamentals"; A Firts Course in Abstract Mathematics*. Birkhäuser. 2000 5

[7] Web; http://eltopologico.blogspot.com/2008/04/cero-elevado-la-cero.html

[8] Web; http://eltopologico.blogspot.com/2009/07/otra-addenda-00-1.html

[9] Web; Enlace a la AMS