CAPITULO 2 B.   PERÍMETRO, ÁREAS Y VOLÚMENES

<u>PERÍMETROS</u>:

Empecemos con una definición previa

Definición 1: El **perímetro** de un polígono o de una poligonal cualquiera es la suma de las longitudes de sus lados.

La primera idea que nos da esta definición, es que *estamos en un plano,* es decir, se trata de un concepto de la Geometría Plana o Planimetría.
Recordemos que una *poligonal* o línea quebrada es una línea formada por una sucesión de trazos y/o de semirrectas, como muestra la Fig. 1,

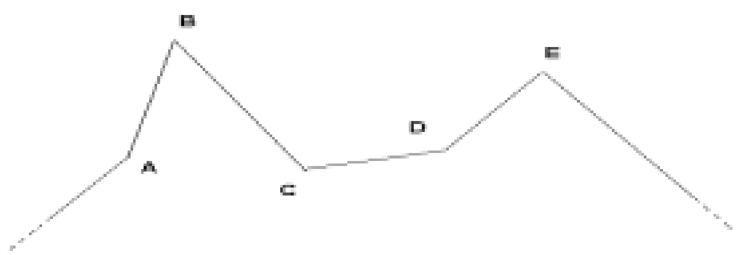


Figura 1. Poligonal

y un polígono es una poligonal cerrada, como muestra la Fig. 2.

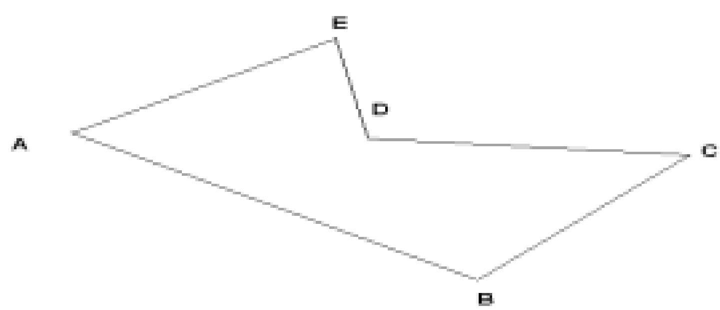


Figura 2. Polígono

Las poligonales y por lo tanto, los polígonos pueden ser **convexos o cóncavos**. Decimos que una poligonal es convexa si al prolongar cualquiera de sus lados, toda la poligonal pertenece al mismo semiplano, y evidentemente un polígono convexo estará formado por una poligonal de este tipo, como muestra la Fig. 3

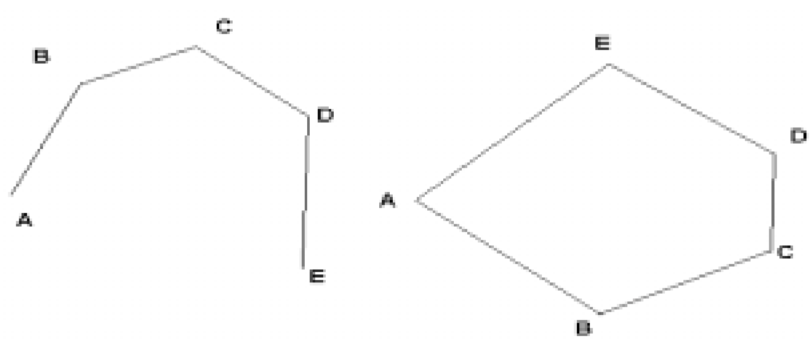


Figura 3 poligonal convexa y polígono convexo.

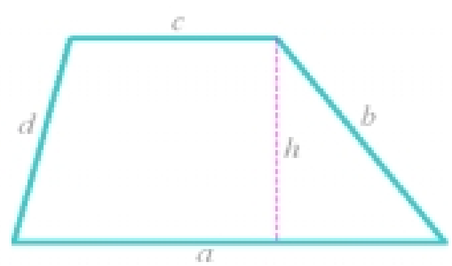
En caso contrario, hablamos de poligonales y polígonos cóncavos.

Volviendo a la definición 1, notamos que hace referencia a una *suma de longitudes* . Luego, tales longitudes deben ser números. En efecto, recordemos que la longitud de un trazo es el número que expresa cuantas veces está contenido en el trazo un segmento que hemos elegido como unidad. Observe que estamos *midiendo*, es decir, comparando dos magnitudes de la misma naturaleza. Desde un punto de vista algebraico, estamos dividiendo. Este simple hecho esconde insospechadas dificultades tanto teóricas como prácticas, v, gr. trazos inconmensurables, “ecuación personal del error”, etc. etc.
Observamos además, que si deseamos conocer el perímetro de una poligonal, ésta no podrá contener semirrectas, ya que la longitud de éstas últimas no son números.
Existe un camino teórico que puede ayudar a comprender mejor esta operación de asignar números a trazos: definir “distancia” entre dos puntos usando el concepto de función. Pero ya nos estamos saliendo de la Geometría Euclidiana básica.

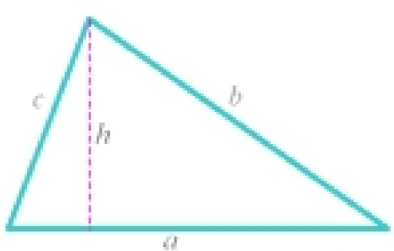
Sin embargo, a pesar de las restricciones discutidas, podemos calcular algunos perímetros de polígonos clásicos. (observe que hemos dicho: *calcular*).

$2s= 4a$

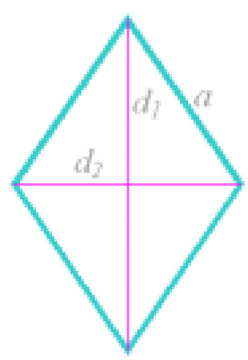
$2s=2(a+b)$



$2s= a+b+c+d$



$2s= a+b+c$



$2s= 4a$

Figura 4. Fórmulas para calcular perímetros.

ejemplo 1:

¿Cuántos kilómetros recorre un deportista que da cuatro vueltas a un parque con la forma y medidas dadas por la Fig.5?

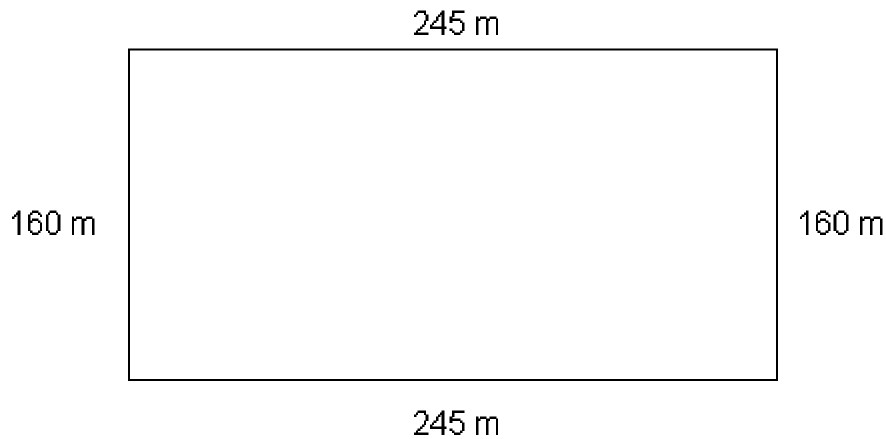


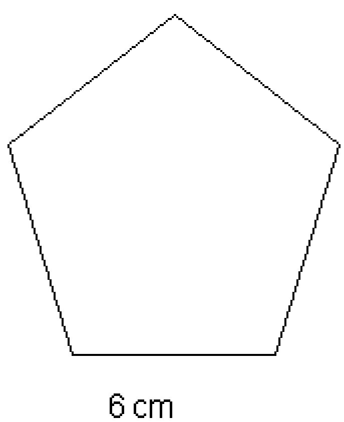
Figura 5. Forma y dimensiones de un parque

Para la solución de este problema, es indispensable conocer la longitud del contorno del parque, el cual se obtiene sumando las longitudes de todos sus lados.
Por lo tanto, el perímetro del parque es: 2s = P=245m + 245m + 160m + 160m = 810m
Como el deportista le da 4 vueltas al parque, se multiplica el perímetro por 4: 810m x 4 = 3240 m.
El deportista recorre 3 240 m.

Cuando un polígono es regular, su perímetro se obtiene multiplicando el número de lados por la longitud de uno de ellos.

ejemplo 2:

Calcular el perímetro del poligono regular siguiente:



$P = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \times 6 = 30$ cm

número de lados (n) — medida de Un lado (l)

Volvamos nuevamente a la definición 1, que dijimos era provisoria. De acuerdo con ella, no podríamos calcular el perímetro de una circunferencia, o de una curva cualquiera, cerrada o no. Sin embargo sabemos que, por ejemplo, la circunferencia sí tiene un perímetro que puede calcularse conociendo el radio.
Luego, debemos extender el concepto de longitud a curvas generales. Aquí aparecen nuevas dificultades. En efecto, lea cuidadosamente la siguiente

Definición 2. La **longitud de una curva finita** es el límite hacia el cual tiende el perímetro de un contorno poligonal inscrito en la curva entre los dos extremos, cuando las longitudes de los trazos tiende a cero.

La Fig. 6 da una idea de este proceso

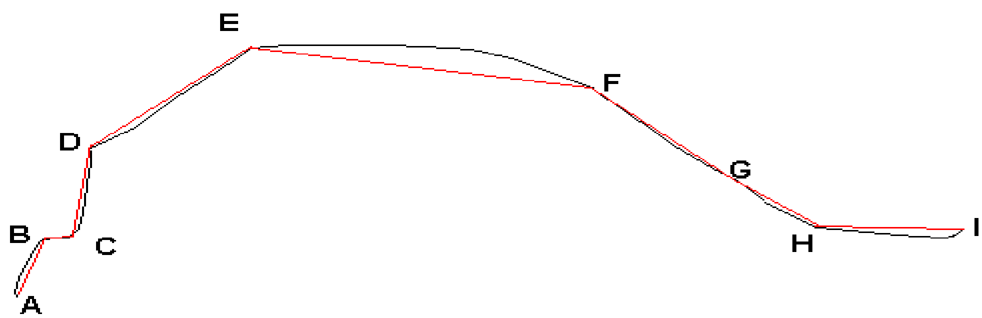
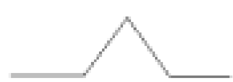


Figura 6. Poligonal inscrita en una curva cualquiera.

Para ser rigurosos, debemos probar que el límite existe, pues este límite no existe para cualquier curva, y que este límite es independiente del proceso de inscripción de la poligonal, es decir, no depende de la manera cómo las medidas de los lados tienden a cero.
Para el caso de la circunferencia, debemos considerar "redes" que envuelvan la curva, por ejemplo, polígonos inscritos y circunscritos.
Hay curvas cerradas y *acotadas* de perímetro infinito. Por ejemplo, aquellas con frontera definidas por "fractales". Veamos el siguiente ejemplo tomado del texto "The beauty of fractal" de H.O. Peitgen & P.H. Richter, Springer Verlag, 1986. Se trata de la curva "copo de nieve" descubierta por el matemático sueco Von Koch en 1904, y que se construye de la siguiente manera:
La *curva inicial* o curva de orden cero, es un triángulo equilátero y el *generador* o poligonal *Gen.* Para pasar de la curva de orden n, denotada L_n, a la curva de orden L_{n+1}, reemplazamos cada segmento de la curva de orden n, por el segmento generador Gen, según se observa en la Fig. 7.



segmento generador Gen

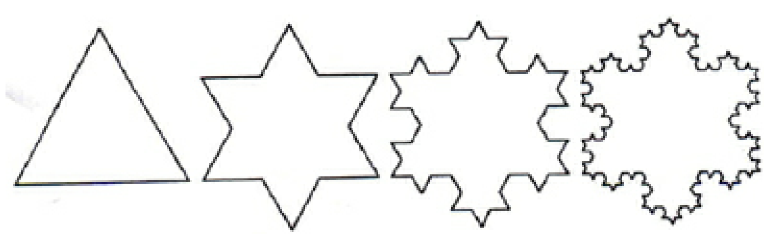


Figura 7. Curvas de Von Koch.

Se puede calcular que la longitud de L_{n+1} es $\frac{4}{3}$ la longitud de L_n, lo que implica que el perímetro de esta curva tiende a infinito!.

Volvamos al problema de calcular el perímetro de una circunferencia: En todo círculo existe una relación constante entre el diámetro y la circunferencia. Esto se demuestra prácticamente de la siguiente manera: consideremos dos círculos de diferente tamaño, como muestra la Fig. 8

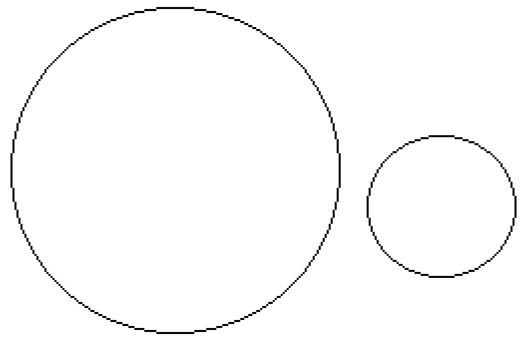


Figura 8. Dos círculos de diferente radio.

sin embargo, en los dos casos la circunferencia contiene al diámetro tres veces y una fracción que equivale aproximadamente a un séptimo del mismo. Esta fracción puede representarse como 0,1416

Utilizando un cordel del tamaño del diámetro de cada círculo se puede comprobar lo anterior al colocarlo en forma sucesiva sobre la circunferencia.

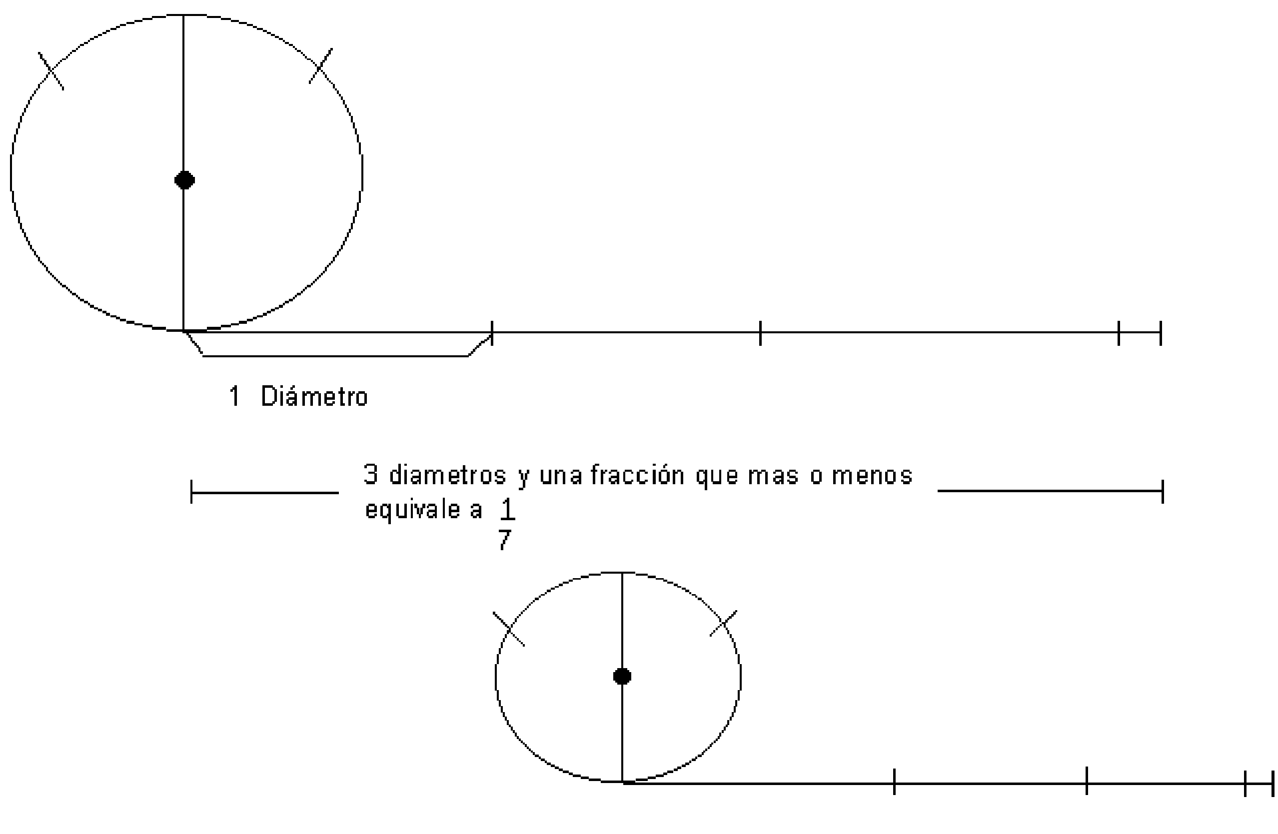


Figura 9. Visualización del número π.

Una vez comprobado lo anterior, cabe mencionar que este valor se representa con la letra griega π, y para fines prácticos se considera que su valor es de 3,1416, por lo tanto**:**

El perímetro del círculo o bien la longitud de la circunferencia es igual al producto de π (pi) por el diámetro o π por el doble del radio.

es decir

$$\boxed{P = \pi d} \quad \text{o} \quad \boxed{P = \pi 2r = 2\pi r}$$

ejemplo 3.

El brocal de un pozo mide 0.75 m de radio, ¿cuál es su perímetro?

$P = \pi d$
$d = 2r = 2(0.75) = 1.50$ m
$P = (3.1416)(1.50)$
$P = 4.71$m

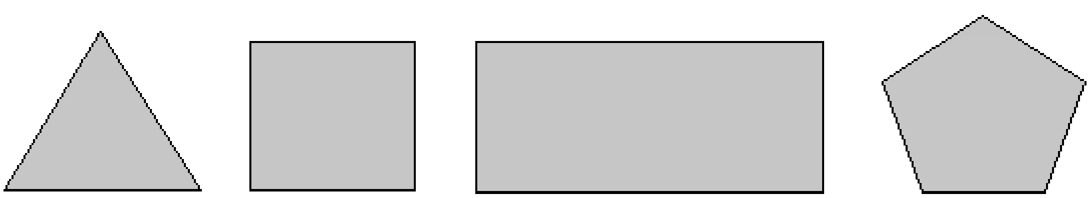
$P = 2\pi r$
$P = 2(3.1416)(0.75)$
$P = (6.28\ 9)(0.75)$
$P = 4.71$ m

<u>ÁREAS</u>

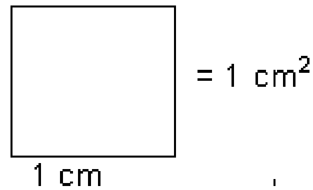
Definición 3. El **área** de una superficie es un número que indica las veces en que una cierta unidad de superficie, está contenida en la superficie total.

Tal como en el caso del perímetro, aquí también hablamos de un *número* como resultado de una *medición.*

Empecemos por considerar superficies planas, entendiendo por tal a la parte del plano limitada por los lados de una figura, es decir, consideramos superficies acotadas. Las siguientes figuras geométricas elementales muestran la superficie que definen en forma sombreada:



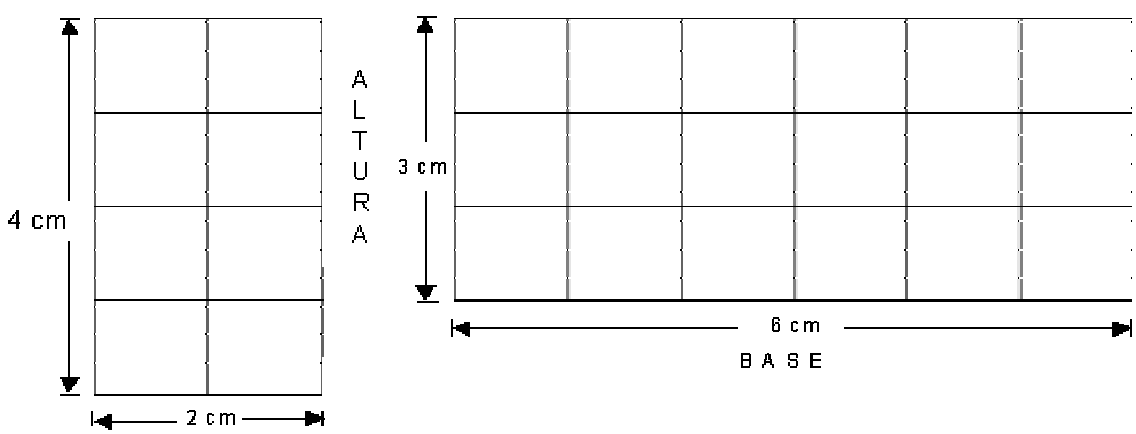
Así como para medir longitudes, las unidades son trazos, para medir superficies las unidades son cuadrados; su nombre y valor se derivan de las unidades de longitud; por ejemplo, si la medida es un cuadrado de 1 cm por lado, se denomina 1 cm^2, y se lee, un centímetro cuadrado.



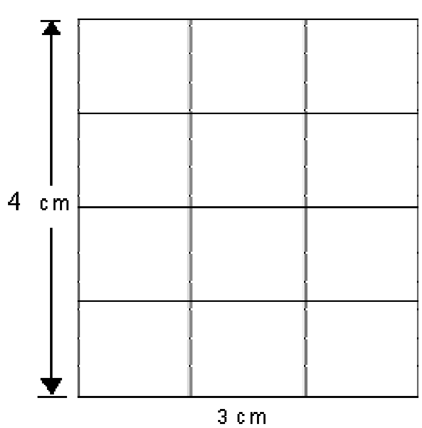
Como ya dijimos, el área es la medida de una superficie y por lo tanto, se expresa en unidades cuadradas del Sistema Métrico Decimal como el mm^2, cm^2, dm^2, m^2, hm^2, km^2, y otras del sistema inglés.
Para obtener el área de una superficie, es necesario que las dimensiones que se dan estén expresadas con la misma unidad de medida, por ejemplo, metros con metros o kilómetros con kilómetros. Cuando las dimensiones tienen unidades de medida diferentes se debe hacer una conversión para poder obtener el área, pues en caso contrario las unidades que se obtendrían no serían cuadradas, tendrán forma rectangular .

Area del rectángulo
Obsérvense las dimensiones de cada uno de los rectángulos siguientes y el total de unidades cuadradas que cubren su superficie, es decir, su área A.

a) $A = 8\ cm^2$ b) $A = 18\ cm^2$



c) $A = 12\ cm^2$



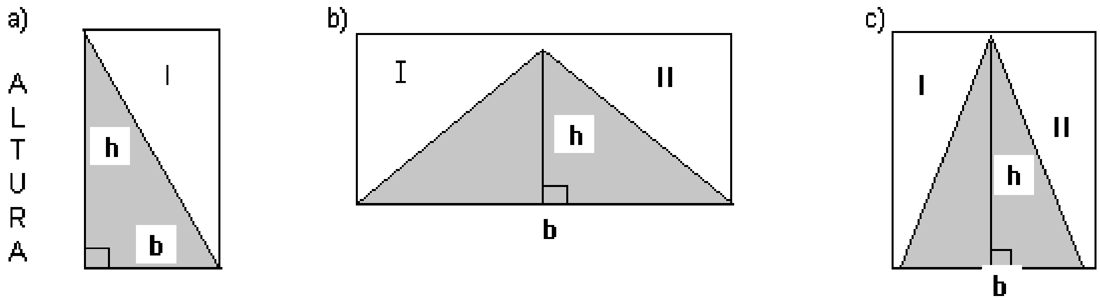
Nótese la relación que existe entre las dimensiones y el área de cada rectángulo.

El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura:

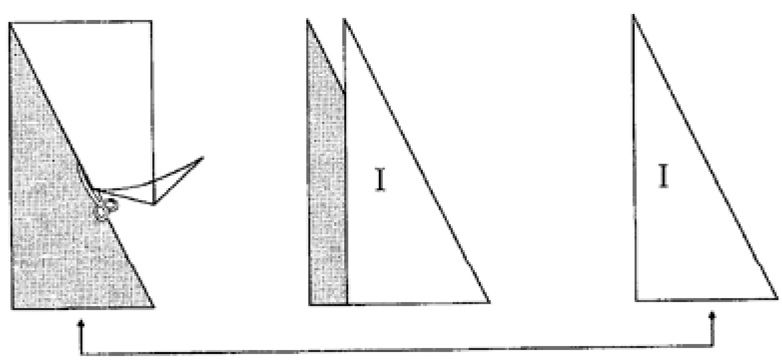
$$A = b \cdot h$$

Área del triángulo

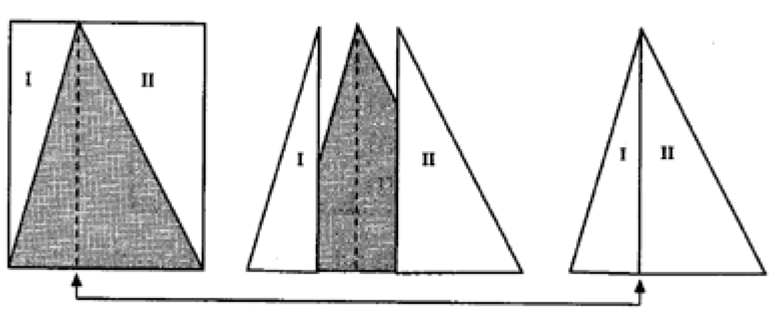
Considérese los rectángulos a, b y c, y obsérvese el triángulo sombreado que contiene.



Nótese que la base y la altura de cada triángulo miden igual que la base y la altura del rectángulo que lo contiene (en b) hay un pequeño error pues h no alcanza a ser exactamente igual a la altura del rectángulo).
Si se recorta y sobrepone el triángulo I del primer rectángulo en el triángulo sombreado se podrá observar que los dos triángulos coinciden; son de igual medida:



Haciendo lo mismo con los triángulos I y II de los rectángulos b y c se tiene:



Se puede observar que los triángulos I y II forman otro que coincide con el triángulo sombreado.

Cada rectángulo contiene dos triángulos cuya base y altura es igual a la base y altura del rectángulo.
Por lo tanto, el área de uno de los triángulos es la mitad del área del rectángulo. Esto es: Área del triángulo igual a la mitad del área del rectángulo que lo contiene.

$$A_{\triangle} = \frac{A_{\square}}{2}$$

Pero como $A_{\square} = b \bullet h$

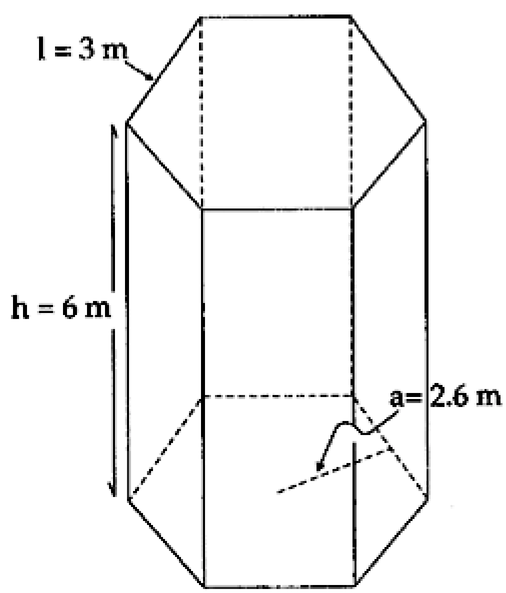
Entonces:

> El área del triángulo es igual a base por altura sobre dos:
>
> $$A = \frac{b \bullet h}{2}$$

Áreas de cuerpo geométricos

En muchas ocasiones es necesario obtener áreas de diferentes cuerpos geométricos para resolver situaciones problemáticas que surgen de la realidad.
¿Cómo se obtienen esas áreas?

ejemplo 4.
Supóngase que se tiene un prisma recto hexagonal regular como el siguiente:



Donde la altura h= 6 m, la arista basal es de 3 m y la apotema es de 2.6 m y se pide calcular el **área lateral** (A_L). Este valor se obtiene multiplicando el perímetro de la base por la altura:

P=2s= 3m×6 = 18 m; A_L =18m×6m (perímetro de la base por altura) = 108 m^2

Para hallar el **área total** de este prisma, debemos agregar a A_L las áreas de las dos bases, es decir, $2\left(\frac{p\times a}{2}\right)$.
Luego, $A_B = 2\left(\frac{18\times 2{,}6}{2}\right)$ = 2(23,4) , y se obtiene el área de las dos bases A_B = 46,8 m^2. Así para encontrar el área total del prisma:

A_T = 46.8 + 108   Area de las dos bases + área lateral

A_T = 154.8 m^2 ——— Area total

Otra manera de encontrar el área total del prisma hexagonal es a través de un **desarrollo** del mismo. Como muestra la Fig. 10

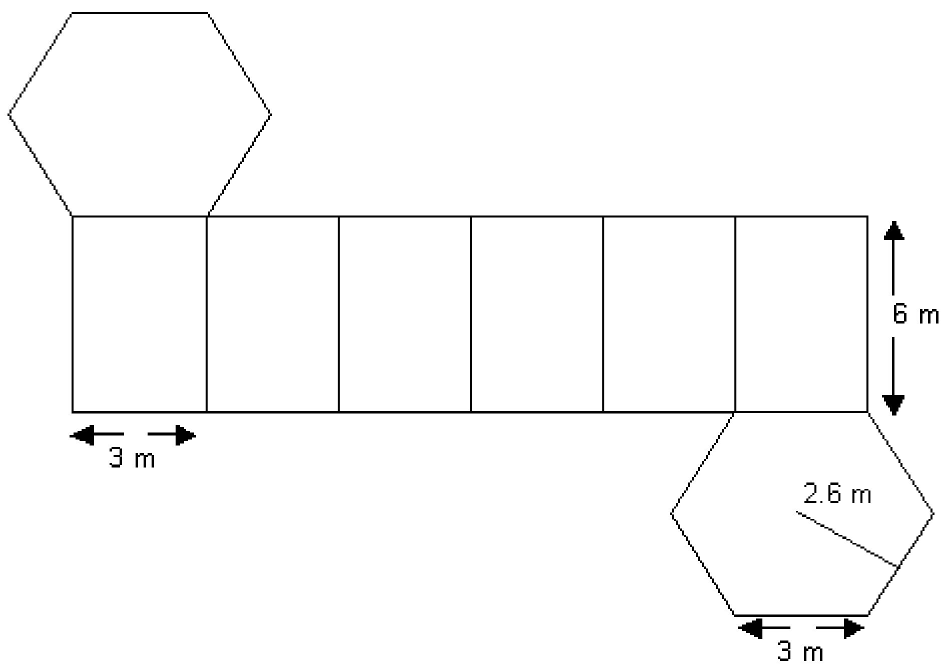
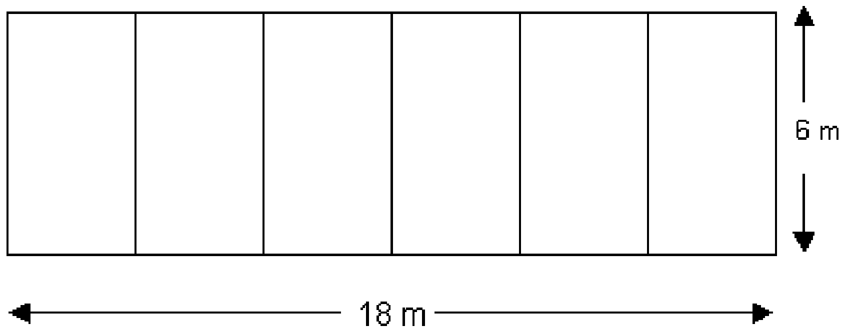


Figura 10. Desarrollo de un prisma recto exagonal regular.

Se tienen dos tipos de figuras: un **rectángulo** y dos **exágonos regulares.** Por lo tanto usarermos las siguientes figuras y fórmulas;



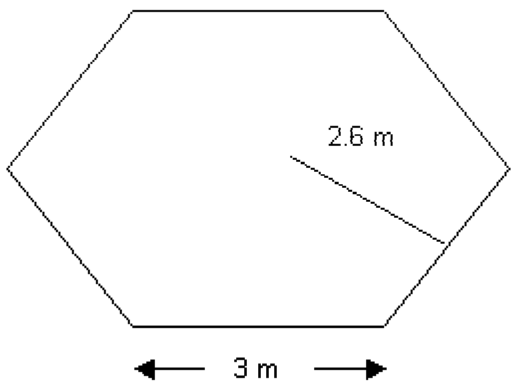
Rectángulo

Área del rectángulo

$A = b \times h$

$A = 18 \times 6$

$A = 108 \text{ m2}$



$$A = \frac{Pa}{2}$$

$$P = 6 \times 3$$

$$P = 18 \text{ m2}$$

$$A = \frac{18(2.6)}{2}$$

$$A = \frac{46.8}{2}$$

$$A = 23.4 \text{ m2}$$

Como se tienen 2 bases, el área obtenida se multiplica por dos, obteniéndose para dichas áreas:

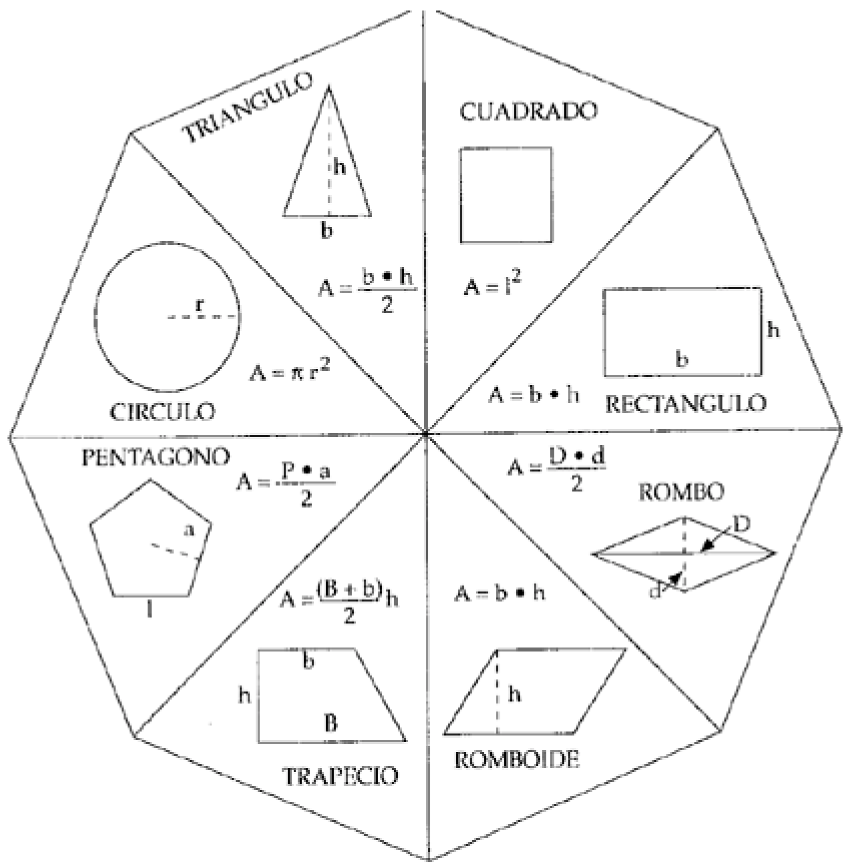
$$A = 2\,(23.4 \text{ m}^2)$$

$$A = 48.8 \text{ m}^2 \qquad \text{Área de las dos bases.}$$

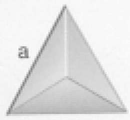
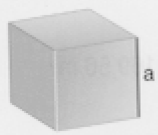
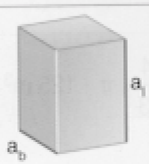
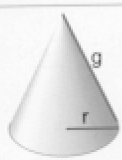
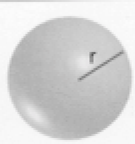
Ahora bien, con el área del rectángulo y las áreas de las dos bases, también se obtiene el área total del prisma.

área de rectángulo =	+ 108 m^2
las dos áreas de los hexágonos =	46.8 m^2
área total del prisma =	154.8 m^2

Este fue un ejemplo en el que se obtuvo el área de un cuerpo geométrico; sin embargo, es conveniente no olvidar que existen otras fórmulas para resolver situaciones problemáticas, las cuales se encuentran inscritas en la siguiente figura.



Agregamos algunas fórmulas para calcular el área total de algunos sólidos:

Figura	Nombre	Área
	Tetraedro	$\mathbf{A} = \sqrt{3}a^2$
	Octaedro	$\mathbf{A} = 2\sqrt{3}a^2$
	Icosaedro	$\mathbf{A} = 5\sqrt{3}a^2$
	Hexaedro (cubo)	$\mathbf{A} = 6a^2$
	Dodecaedro	$\mathbf{A} = 30a \cdot ap$
	Prisma regular	$\mathbf{A} = P_b \cdot a_l + 2A_b$
	Pirámide regular	$\mathbf{A} = \frac{P_b \cdot ap}{2} + A_b$
	Cilindro	$\mathbf{A} = 2\pi r\,(g + r)$
	Cono	$\mathbf{A} = \pi r\,(g + r)$
	Esfera	$\mathbf{A} = 4\pi r^2$

Con ayuda del formulario expuesto, se puede hacer uso de las fórmulas para resolver problemas.
En el medio circundante hay muchas de estas figuras y es bastante común que se requiera conocer su área, por lo que en la práctica es muy útil saber aplicar estas fórmulas**.**

VOLÚMENES

Definición 4. El **volumen** de un cuerpo geométrico o sólido es un número que indica las veces que está contenida una unidad de volumen en el sólido.

Es importante hacer notar que muchos autores confunden volumen con el objeto a medir, esto es el sólido o cuerpo. A veces se dice que: **volumen es el espacio que ocupa cualquier cuerpo**, definición que puede aceptarse, pero no dice lo más importante: el volumen es un número, claro que tal como el el caso del área y del perímetro, este número va acompañado de alguna unidad. Para el volumen, las unidades mas comunes son: mm^3, cm^3, dm^3 y m^3.

Para determinar el volumen de los cuerpos geométricos se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. El volumen de un cubo de arista **a** es $V=a^3$
2. El volumen de cualquier prisma es igual al producto del área de la base por su altura; $V= Bh$.
3. El volumen de un cilindro de radio basal **r** es igual al producto de la base ($\pi^2 r$) por su altura: $V= \pi^2 rh$
4. El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área basal por su altura: $V=\frac{1}{3}Bh$
5. El volumen de un cono es igual a un tercio del producto del área basal por su altura: $V=\frac{1}{3}Bh= \frac{1}{3}\pi^2 rh$

ejemplo 5.

La altura de un prisma pentagonal regular es de 20 cm y sus bases miden 16 cm por lado y 11 cm de apotema, ¿cuál es su volumen?

Los datos con los que se cuenta son:
longitud de los lados = 16 cm
longitud del apotema = 11 cm
altura del prisma = 20 cm.
Primero se procede a determinar el área de la base (B):

$$B = \frac{P \bullet a}{2}$$

El perímetro se halla multiplicando la longitud de uno de los lados por cinco, ya que se trata de un pentágono.
Sustituyendo valores se tiene**:**

$$B = \frac{5\,(16\text{ cm})(11\text{cm})}{2} = \frac{880\text{cm}^2}{2} = 440\text{cm}^2$$

Una vez que se tiene el área de la base, se determina el volumen de este prisma con la fórmula V = Bh
Sustituyendo valores se tiene: V = 440 cm² (20 cm) = 8 800 cm³ .

Esto indica que el volumen de este prisma pentagonal es de 8 800 cm³.

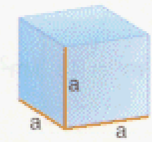
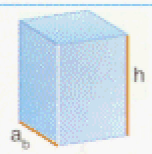
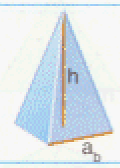
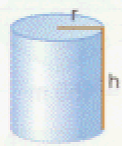
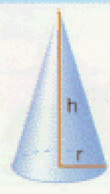
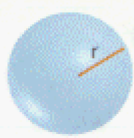
ejemplo 6.

Si la base de una pirámide rectangular tiene por dimensiones 10 dm de largo y 8 dm de ancho, y la altura de la pirámide es de 15dm, ¿cuál es su volumen?
Los datos con que se cuenta son:
largo de la base = 10dm
ancho de la base = 8dm
altura de la pirámide = 15 dm
Se determina el área de la base: B = largo x ancho
Sustituyendo valores: B = 10 dm (8 dm) = 80 dm² .
Se aplica la fórmula para calcular el volumen de una pirámide: $V = \frac{1}{3}Bh$.
Sustituyendo valores: V = 80 dm² (15 dm) = 1 200 dm³
El volumen de esta pirámide rectangular es de 1 200 dm³.

De lo anterior, podemos concluir que:

El volumen de los prismas y las pirámides se determina aplicando fórmulas, en las cuales se relaciona su longitud, altura y anchura, mientras que en el cilindro y el cono se relacionan el radio y la altura.

Terminamos estos apuntes con un glosario de fórmulas para sólidos comunes

Figura	*Nombre*	*Volumen*
	Hexaedro (cubo)	$V = a^3$
	Prisma regular	$V = A_b \cdot h$
	Pirámide regular	$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$
	Cilindro	$V = \pi r^2 \cdot h$
	Cono	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
	Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

CONCLUSIÓN DEL TEMA :Perímetros, áreas y volúmenes:

¿Qué tienen en común estos tres conceptos? Respuesta: Los tres son **números**, acompañados de ciertas unidades, que expresan las veces en que esa unidad de medida está contenida en la magnitud a medir.